

GS 1. — 2. kolokvij (2022./2023.)

Zadatak D3.

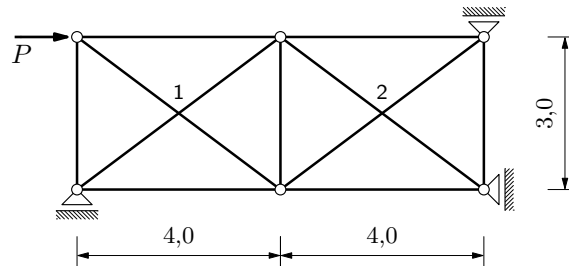
a. (25) Izračunajte vrijednosti sila u štapovima rešetke!

(U točkama 1 i 2 štapovi se mimoilaze.)

b. (15) Izračunajte orijentiranu duljinu horizontalnoga pomaka hvatišta sile $\vec{P}$!

$$P = 125 \text{ kN}$$

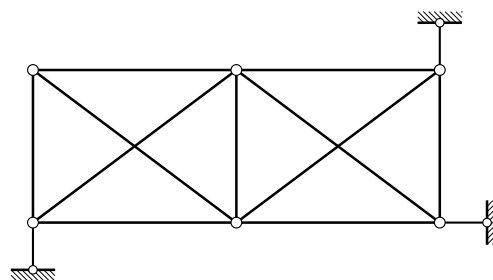
$$EA = 500\,000 \text{ kN}$$



Korak prvi. Stupanj statičke neodređenosti i osnovni sistem(i) (za metodu sila).

Za ravninske rešetkaste sisteme vrijedi „Maxwellovo pravilo”: ravninski je rešetkasti sistem geometrijski nepromjenjiv i statički određen ako je broj zglobnih štapova b jednak dvostrukome broju zglobnih čvorova n , $b = 2n$; štapovi pritom moraju biti ispravno raspoređeni. Iz Maxwellova pravila možemo „izvesti” izraz za minimalan broj stupnjeva slobode ravninskoga rešetkastog sistema: $S_{\min} = 2n - b$.

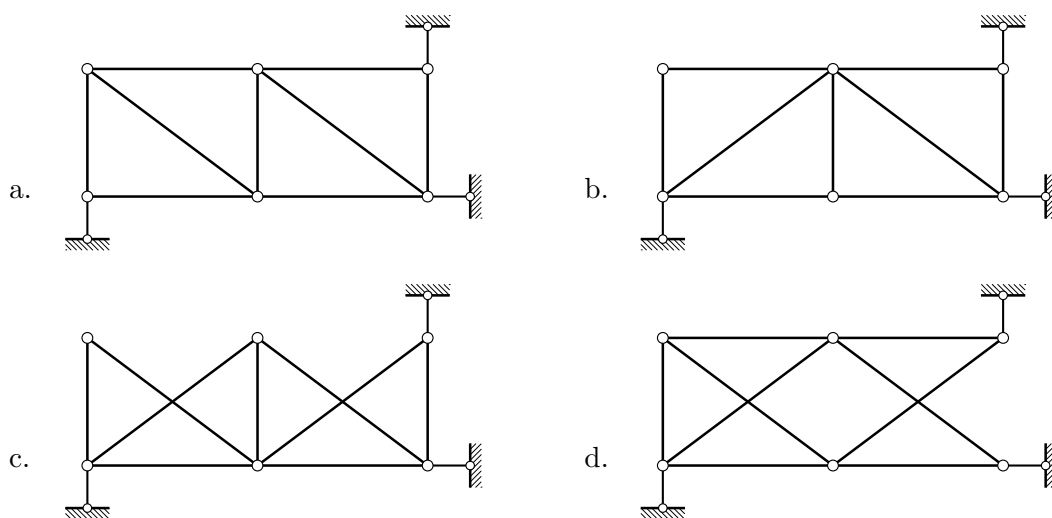
Ako zglobnopomične ležajeve u našoj rešetki zamijenimo istovrijednim spojevima s podlogom zglobnim štapovima (slika 1.), bit će $n = 6$ i $b = 14$, pa je $S_{\min} = -2$. Prema tome, dva su zglobna štapa „višak”, što znači da je sistem najvjerojatnije (geometrijski nepromjenjiv i) dva puta statički neodređen; „najvjerojatnije”, jer pitanje ispravnoga rasporeda štapova još nismo riješili. Rješenje tog pitanja ujedno će biti ključ oblikovanja osnovnoga sistema.



Slika 1.

Trokut zglobnih štapova ili zglobni trokut, kao što bi još iz *Mehanike 1.* trebalo biti poznato, osnovni je ravninski iznutra geometrijski nepromjenjiv sklop zglobnih štapova. (Podsjećam da „iznutra nepromjenjiv” znači da se međusobni položajni odnosi i udaljenosti zglobnih čvorova ne mogu mijenjati, ali da se trokut kao cjelina može gibati u

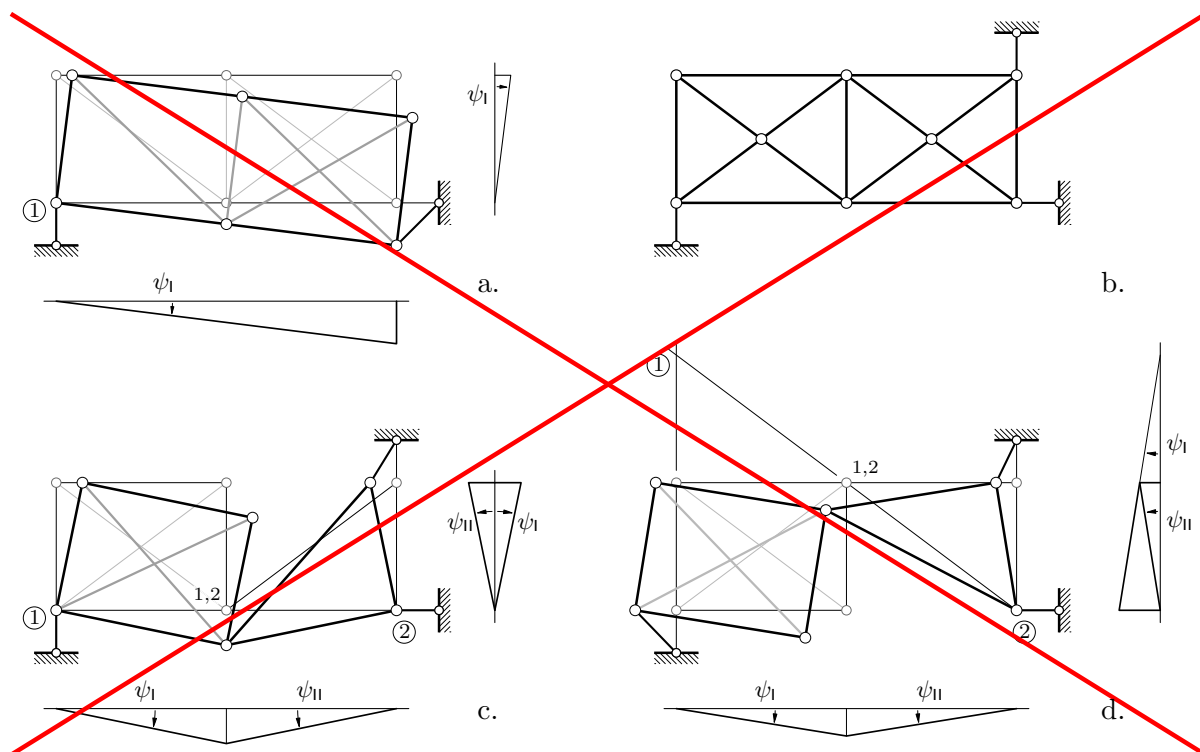
ravnini. Poznato bi trebalo biti i to da je degenerirani slučaj u kojem sva tri čvora leže na istom pravcu iznutra geometrijski promjenjiv.) Spojimo li dvama zglobnim štapovima četvrti zglobni čvor s dvama vrhovima zglobnoga trokuta tako da osi tih dvaju štapova nisu na istom pravcu, dobiveni će sklop, sastavljen od dva zglobna trokuta sa zajedničkom stranicom, i dalje biti geometrijski nepromjenjiv. I tako dalje. Iznutra nepromjenjivi sklop zglobnih štapova ponaša se kao kruto tijelo koje nije spojeno s podlogom — ima tri stupnja slobode, pa ga, da bi postao (i izvana) geometrijski nepromjenjiv, treba s podlogom spojiti trima zglobnim štapovima osi kojih ne prolaze jednom točkom. Četiri su primjera tako oblikovanih elementarnih ravninskih rešetkastih sistema prikazana na slici 2. Osim što su, kao što smo pokazali, geometrijski nepromjenjivi, elementarni su rešetkasti sistemi i statički određeni — moguće je naći čvor u koji su priključena samo dva štapa s nepoznatim vrijednostima sila, te se uzastopnim uravnoteživanjem čvorova s po dvije sile nepoznatih vrijednosti mogu odrediti vrijednosti sila u svim štapovima (zbog toga se ti sistemi i nazivaju „elementarnima”).



Slika 2.

U odnosu na inačicu zadanoga sistema prikazanoga na slici 1., sistemi sa slike 2. imaju po dva štapa manje. Dodavanjem dvaju štapova bilo kojem od tih sistema ne možemo narušiti njegovu geometrijsku nepromjenjivost, pa možemo zaključiti da je i sistem sa slike 1. geometrijski nepromjenjiv i, budući da je „nastao” dodavanjem dvaju zglobnih štapova statički određenom sistemu, dva puta statički određen. I obratno, možemo reći da su sistemi prikazani na slici 2. nastali uklanjanjem dvaju štapova iz sistema sa slike 1., pa bilo koji od njih može biti osnovni sistem za rješavanje zadanoga sistema metodom sila.

Ipak, ne mogu se ukloniti bilo koja dva štapa. Na slikama 3.c. i d. prikazana su dva mehanizma (s planovima pomaka, zornoga prikaza radi) koja su također nastala uklanjanjem dvaju štapova iz neodređenoga sistema sa slike 1. Usporedba tih mehanizama s geometrijski nepromjenjivim sistemima na slici 2. pokazuje da mehanizmi nastaju



Slika 3.

uklanjanjem štapova iz istoga polja (u našim primjerima desnoga), a da za oblikovanje nepromjenjivoga sistema treba ukloniti po jedan štap u svakom polju*. (Može se uz to pokazati da su u oba mehanizma lijeva polja ostala statički neodređenima, pa je riječ o mehanizmima s jednim stupnjem slobode koji su jedanput statički neodređeni.)

Ni jedan se zglobovi štap koji sklop zglobnih trokuta spaja s podlogom ne smije ukloniti — za geometrijski nepromjenjivo spajanje tijela s podlogom potrebna su (najmanje) tri štapova. Na slici 3.a. prikazan je plan pomakā mehanizma koji je nastao raskidanjem jednoga spoja s podlogom (uz uklanjanje jedne dijagonale lijevoga polja, te je ono statički određeno, dok je desno polje statički neodređeno; jasno je da bi mehanizam ostao mehanizmom (s istim planom pomakā) i da dijagonala nije uklonjena, ali bi to bio dvaput statički neodređeni mehanizam s jednim stupnjem slobode).

Napomenut ću još da se statički određeni sistem ne može oblikovati (samo) umetanjem zglobova u točke u kojima se dijagonale naizgled sijeku (slika 3.b.). Svakim se zglobovima time dodaju po dva stupnja slobode, ali se dodaju i po zglobna štapova, pa je sistem i dalje dva puta statički neodređen: $2n - b = 2 \cdot 8 - 18 = -2$. [Domaća zabava: oblikujte (barem) tri suvisla osnovna sistema za rješavanje neodređenoga sistema sa slike 3.b.!]

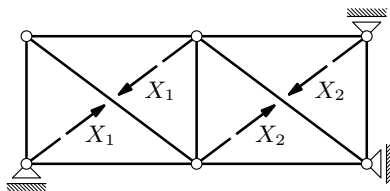
Korak drugi. Jednadžbe kompatibilnosti i njihovo rješenje.

Strože govoreći, osnovni sistem za rješavanje neodređenoga rešetkastog sistema ne nastaje uklanjanjem nekog štapa, nego raskidanjem koje omogućava uzdužni pomak jednoga

* Za oblikovanje sistema sa slike 2.d. može se reći da je srednji vertikalni štap pripadao prvome polju.

od razdvojenih dijelova u odnosu na drugi, ali ne dopušta međusobni poprečni pomak kao ni međusobni zaokret dijelova;[†] drugim riječima, štap „ostaje” u sistemu, ali ne može prenijeti uzdužnu silu. Budući da ne prenose sile, raskinute štapove u većini slučajeva nećemo crtati.

Koračić 1. Za osnovni sistem odabrat ćemo sistem prikazan na skici 4. (Treba zamisliti da se dijelovi raskinutih štapova u točkama prekida dodiruju i da su hvatišta dviju sila u parovima $\mp \vec{X}_1$ i $\mp \vec{X}_2$ neizmjerljivo blizu.) Uskoro će postati jasno zašto smo odabrali upravo taj sistem.

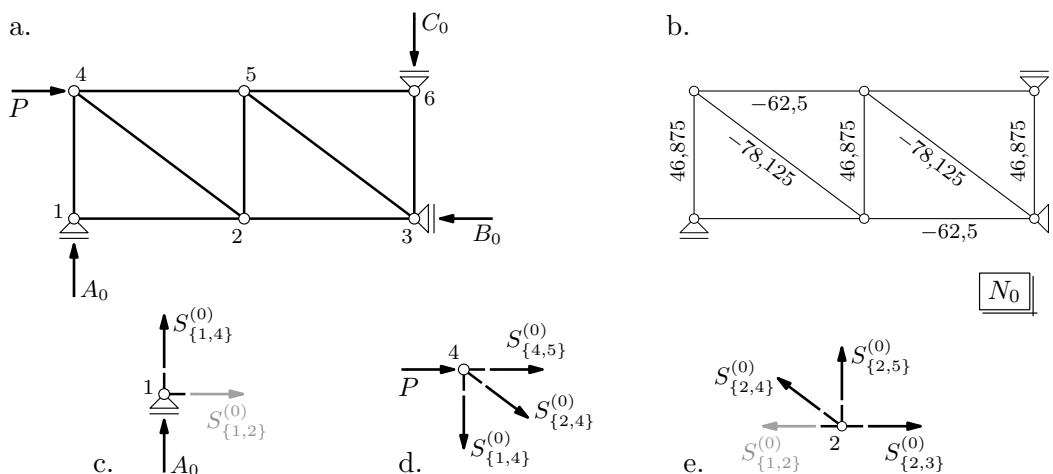


Slika 4.

Koračić 2. Za opterećenje osnovnoga sistema silom $\vec{P}$ (slika 5.a.) iz uvjeta ravnoteže horizontalnih neposredno slijedi $B_0 = P$. Sile $\vec{B}_0$ i $\vec{P}$ tvore spreg moment koji mora uravnotežiti moment sprega reakcija $\vec{A}_0$ i $\vec{C}_0$, pa iz $-3P - 8C_0 = 0$ slijedi

$$C_0 = -\frac{3}{8}P = -46,875 \text{ kN} \quad \& \quad A_0 = C_0.$$

(Kako je i zadani sistem u odnosu na podlogu statički određen (jedno tijelo $\&$ tri spoja), vrijednosti reakcija ne ovise o njegovim neodređenim iznutricama, pa će vrijednosti reakcija biti jednake u zadanom i u osnovnom sistemu, $A = A_0$ $\&$ td.)



Slika 5.

[†] Na isti način raskidamo zatege i štapove ojačanja pri oblikovanju osnovnih sistema za rješavanje neodređenih sistema koji nas "podsjećaju" na trozglobne sa zategama ili bez njih ili na ojačane, obješene ili poduprte grede.

Sila u štapu $\{1, 4\}$ i reakcija $\vec{A}_0$ na istom su pravcu, pa iz (vektorskoga) uvjeta ravnoteža sile koje djeluju na čvor 1 (slika 5.c.) neposredno slijedi $S_{\{1,2\}}^{(0)} = 0$ i

$$S_{\{1,4\}}^{(0)} = -A_0 = -(-46,875) = 46,875 \text{ kN}.$$

Uz poznatu vrijednost $S_{\{1,4\}}^{(0)}$ na čvor 4 djeluju samo dvije sile nepoznatih vrijednosti (slika d.). Uvjet ravnoteže projekcija sila na vertikalnu os,

$$S_{\{1,4\}}^{(0)} + \frac{3}{5} S_{\{2,4\}}^{(0)} = 0,$$

daje

$$S_{\{2,4\}}^{(0)} = -\frac{5}{3} S_{\{1,4\}}^{(0)} = -78,125 \text{ kN},$$

a potom iz uvjeta ravnoteže projekcija sila na horizontalnu os,

$$P + \frac{4}{5} S_{\{2,4\}}^{(0)} + S_{\{4,5\}}^{(0)} = 0,$$

slijedi

$$S_{\{4,5\}}^{(0)} = -P - \frac{4}{5} S_{\{2,4\}}^{(0)} = -62,5 \text{ kN}.$$

Uvjet ravnoteže projekcija sila koje djeluju na čvor 2 (slika e.) na vertikalnu os,

$$-\frac{3}{5} S_{\{2,4\}}^{(0)} - S_{\{2,5\}}^{(0)} = 0,$$

daje

$$S_{\{2,5\}}^{(0)} = -\frac{3}{5} S_{\{2,4\}}^{(0)} = 46,875 \text{ kN}.$$

Slika 5.a. uz $B_0 = P$ i $C_0 = A_0$ pokazuje da je sistem s vanjskim silama centralnosimetričan u odnosu na polovište štapa $\{2, 5\}$. Centralnosimetrični parovi čvorova su 6 i 1, 3 i 4 i 5 i 2, pa su

$$S_{\{5,6\}}^{(0)} = S_{\{1,2\}}^{(0)} = 0 \quad \& \quad S_{\{3,6\}}^{(0)} = S_{\{1,4\}}^{(0)} = 46,875 \text{ kN}$$

i

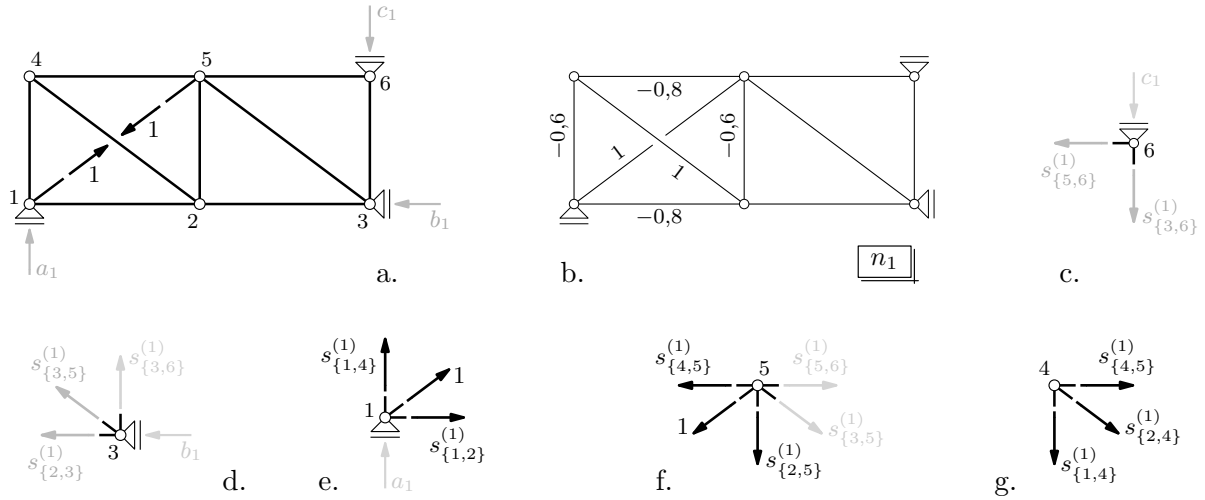
$$S_{\{3,5\}}^{(0)} = S_{\{2,4\}}^{(0)} = -78,125 \text{ kN} \quad \& \quad S_{\{2,3\}}^{(0)} = S_{\{4,5\}}^{(0)} = -62,5 \text{ kN},$$

dok je štap $\{2, 5\}$ centralnosimetričan samome sebi, to jest $S_{\{2,5\}}^{(0)} = S_{\{2,5\}}^{(0)}$:o).

„Dijagram” N_0 prikazan je na slici 5.b.

Koračić 3. Ako osnovni sistem nije opterećen, neće biti ni reakcija. Par jediničnih sila na pravcu djelovanja para $\mp \vec{X}_1$ i s jednakim orijentacijama kao sile toga para (slika 6.a.) statički je neutralan, što znači da ne mijenja ravnotežno stanje sistema sila kojemu je dodan. Stoga, opteretimo li sistem samo statički neutralnim sistemom sila, reakcije se neće pojaviti ($a_1 = b_1 = c_1 = 0$).

Budući da je $c_1 = 0$, čvor 6 je neopterećen. U njega su priključena dva štapa osi kojih nisu na istom pravcu (slika 6.c.) , pa su $s_{\{5,6\}} = s_{\{3,6\}} = 0$. Sada su od vrijednosti sila u



Slika 6.

štapovima koji se sastaju u čvoru 3 nepoznate dvije (slika d.), a kako je i $b_1 = 0$ i kako osi štapa s nepoznatim vrijednostima sila nisu na jednom pravcu, bit će i $s_{2,3} = s_{3,5} = 0$.

Jednadžbe ravnoteže projekcija sila koje djeluju na čvor 1 (slika 6.e.) na horizontalnu i vertikalnu os,

$$s_{\{1,2\}}^{(1)} + \frac{4}{5} \cdot 1 = 0 \quad \mathcal{E} \quad -s_{\{1,4\}}^{(1)} - \frac{3}{5} \cdot 1 = 0,$$

daju

$$s_{\{1,2\}}^{(1)} = -\frac{4}{5} = -0,8 \quad \mathcal{E} \quad s_{\{1,4\}}^{(1)} = -\frac{3}{5} = -0,6.$$

U čvoru 5 nepoznate su samo vrijednosti sila u štapićima $\{4, 5\}$ i $\{2, 5\}$ (slika f.), pa iz

$$-s_{\{4,5\}}^{(1)} - \frac{4}{5} \cdot 1 = 0 \quad \mathcal{E} \quad s_{\{2,5\}}^{(1)} + \frac{3}{5} \cdot 1 = 0,$$

slijedi

$$s_{\{4,5\}}^{(1)} = -\frac{4}{5} = -0,8 \quad \mathcal{E} \quad s_{\{2,5\}}^{(1)} = -\frac{3}{5} = -0,6.$$

(Ili: mogli smo uočiti da su čvorovi 5 i 1 (s jediničnim silama i uz $s_{3,5} = s_{5,6} = 0$), a time i štapići $\{2, 5\}$ i $\{1, 4\}$ te $\{4, 5\}$ i $\{1, 2\}$ centralnosimetrični u odnosu na polovište štapa $\{2, 4\}$, pa su $s_{\{2,5\}}^{(1)} = s_{\{1,4\}}^{(1)} = -0,6$ i $s_{\{4,5\}}^{(1)} = s_{\{1,2\}}^{(1)} = -0,8$.) I na kraju, jedan od dva uvjeta ravnoteže projekcija sila koje djeluju na čvor 4 (slika g.), recimo

$$s_{\{4,5\}}^{(1)} + \frac{4}{5} \cdot s_{\{2,4\}}^{(1)} = 0$$

daje

$$s_{\{2,4\}}^{(1)} = -\frac{5}{4} s_{\{4,5\}}^{(1)} = -\frac{5}{4} \cdot (-0,8) = 1.$$

U „dijagramu” n_1 (slika 6.b.) prikazan je i raskinuti štap $\{1, 5\}$ s jediničnom vrijednošću sile u njemu; u presjeku prekida na raskidanju nastale dijelove toga štapa na pravcu njegove osi djeluje uravnoteženi par jediničnih sila, pa u njemu postoji uzdužna sila.

Koračić 4. Usporedba slika 7.a. i 6.a. pokazuje da je sistem opterećen parom jediničnih sila na pravcu i u smislu djelovanja sila para $\mp \vec{X}_2$ centralnosimetričan u odnosu na polovište štapa $\{2, 5\}$ sistemu opterećenom parom jediničnih sila na pravcu i u smislu djelovanja sila para $\mp \vec{X}_1$, pa su

$$s_{\{5,6\}}^{(2)} = s_{\{1,2\}}^{(1)} = -0,8,$$

$$s_{\{3,6\}}^{(2)} = s_{\{1,4\}}^{(1)} = -0,6,$$

$$s_{\{2,3\}}^{(2)} = s_{\{4,5\}}^{(1)} = -0,8,$$

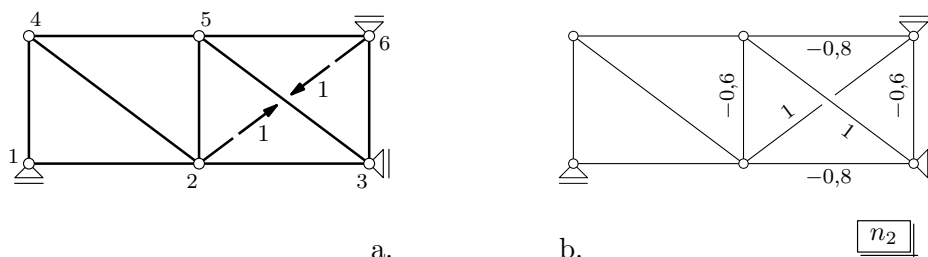
$$s_{\{3,5\}}^{(2)} = s_{\{2,4\}}^{(1)} = 1,$$

$$s_{\{2,5\}}^{(2)} = s_{\{2,5\}}^{(1)} = -0,6$$

i, dakako,

$$s_{\{2,6\}}^{(2)} = 1$$

(slika 7.b.).



Slika 7.

Koračić 5. Budući da u štapovima rešetke postoje samo uzdužne sile, koeficijente popustljivosti izračunavamo i slobodne članove prema (općim) izrazima

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^b \int_0^{\ell_k} \frac{n_j(\xi_k) n_i(\xi_k)}{EA_k} d\xi_k \quad \mathcal{E} \quad \delta_{i,0} = \sum_{k=1}^b \int_0^{\ell_k} \frac{N_0(\xi_k) n_i(\xi_k)}{EA_k} d\xi_k.$$

Vrijednosti su sila uzduž štapova konstantne (a uz to su $EA_k = EA$ za sve štapove), pa se izrazi pojednostavnjuju:

$$\delta_{i,j} = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^b n_{j,k} n_{i,k} \ell_k \quad \mathcal{E} \quad \delta_{i,0} = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^b N_{0,k} n_{i,k} \ell_k,$$

pri čemu u obzir treba uzeti predznake vrijednosti $n_{i,k}$ i $N_{0,k}$; $n_{i,k}$ i $N_{0,k}$ vrijednosti su u „dijagramima” n_i i N_0 za štap k (nismo uveli posebne broježane oznake štapova, nego smo ih, kao u metodi pomakā, označili parovima brojčanih oznaka njihovih čvorova, na lako je uvesti, recimo, „leksikografsko preslikavanje” $1 \sim \{1, 2\}$, $2 \sim \{1, 4\}$, $\dots$, $10 \sim \{4, 5\}$, $11 \sim \{5, 6\}$, pa su, primjerice, $n_{1,2} = s_{\{1,4\}}^{(1)}$, $n_{2,1} = s_{\{1,2\}}^{(2)}$ i $N_{0,10} = S_{\{4,5\}}^{(0)}$).

Koeficijenti popustljivosti su

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EA} \left[2 \cdot (-0,6)^2 \cdot 3 + 2 \cdot (-0,8)^2 \cdot 4 + 2 \cdot 1^2 \cdot 5 \right] = \frac{17,28}{EA},$$

$$\delta_{2,2} = \frac{17,28}{EA} \quad (\delta_{2,2} = \delta_{1,1} \text{ zato što je } n_2 \text{ centralnosimetrična slika } n_1),$$

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{EA} \cdot (-0,6)^2 \cdot 3 = \frac{1,08}{EA},$$

dok su slobodni članovi

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \frac{1}{EA} \left[2 \cdot 46,875 \cdot (-0,6) \cdot 3 + (-62,5) \cdot (-0,8) \cdot 4 + (-78,125) \cdot 1 \cdot 5 \right] \\ &= -\frac{359,375}{EA}, \end{aligned}$$

$$\delta_{2,0} = -\frac{359,375}{EA} \quad (\delta_{2,0} = \delta_{1,0} \text{ zato što je i } N_0 \text{ centralnosimetričan}).$$

Koračić 6. Uvrštavanjem u jednadžbe kompatibilnosti

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = 0,$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = 0$$

nakon množenja s EA i prebacivanja slobodnih članova na desnu stranu znaka jednakosti dobivamo sustav

$$17,28 X_1 + 1,08 X_2 = 359,375,$$

$$1,08 X_1 + 17,28 X_2 = 359,375.$$

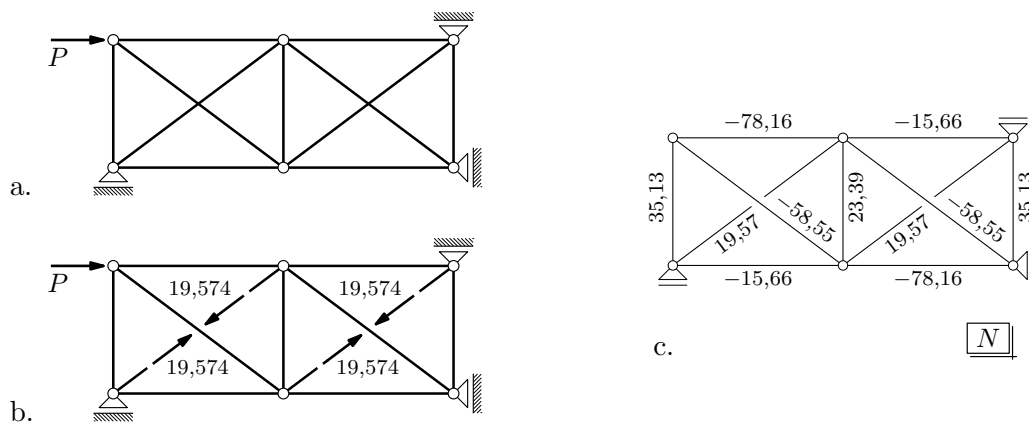
Njegovo je rješenje

$$X_1 = X_2 = 19,574.$$

Koračić 7. Konačne vrijednosti sila u štapovima (slika 8.c. na sljedećoj stranici) izračunavamo prema izrazu

$$S_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta}^{(0)} + X_1 s_{\alpha,\beta}^{(1)} + X_2 s_{\alpha,\beta}^{(2)}.$$

To su sile u zadanom statički neodređenom sistemu koji je opterećen silom $\vec{P}$ (slika 8.a.), ali i u osnovnom sistemu koji je osim silom $\vec{P}$ opterećen i parovima sila $\mp \vec{X}_1$ i $\mp \vec{X}_2$ koje smo nazvali „statički neodređenima”, ali koje sada imaju potpuno određene vrijednosti $X_1 = X_2 = 19,574$ (slika b.). Ta je činjenica temelj redukcijskoga „stavka” koji ćemo primijeniti u sljedećem koraku.



Slika 8.

Korak treći. Orijentirana duljina horizontalnoga pomaka hvatišta sile $\vec{P}$.

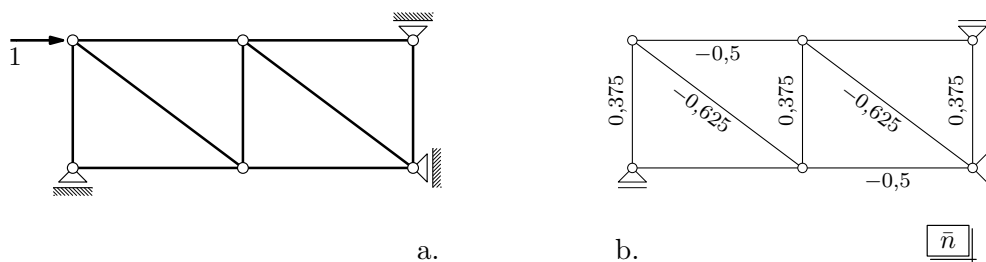
Orijentirane duljine pomaka odabranih točaka izračunavamo metodom jedinične sile. Za rešetkaste sisteme primjenjujemo izraz pojednostavljeni (opći) izraz

$$\delta = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^b N_k \bar{n}_k \ell_k,$$

gdje je N_k vrijednost u „dijagramu” N stvarnih uzdužnih sila, izazvanih zadanim djelovanjima, za štap k , dok je $\bar{n}_k$ vrijednost za štap k u „dijagramu” $\bar{n}$ virtualnih uzdužnih sila izazvanih virtulnom jediničnom silom koja na pravcu traženoga pomaka djeluje u točki pomak koje tražimo.

Ako je sistem statički neodređen, redukcijski „stavak” kaže da „dijagram” $\bar{n}$ može biti dijagram virtualnih uzdužnih sila na bilo kojem osnovnom sistemu. („Stavak” ne treba dokazivati (ili: dokazivanje bi bilo vrtnja u krugu), jer su vrijednosti u „dijagramu” N vrijednosti sila u zadanom sistemu, ali i u osnovnom sistemu koji je opterećen i „statički neodređenim” silama upravo onih vrijednosti kojih daju rješenje neodređenoga sistema. Drugim riječima, izračunavamo orijentiranu duljinu pomaka odgovarajuće točke toga osnovnog sistema.)

Odabrat ćemo osnovni sistem pomoću kojega smo u koraku drugom riješili zadani sistem (slika 9.). Kako treba izračunati pomak hvatišta sile $\vec{P}$ po pravcu njezina djelovanja, izračunavanje vrijednosti u „dijagramu” $\bar{n}$ svodi se na dijeljenje vrijednosti u



Slika 9.

„dijagramu” N_0 vrijednošću $P = 125$ sile $\vec{\mathcal{P}}$: prema zakonu superpozicije jedinična sila (stvarna ili virtualna) u hvatištu sile $\vec{\mathcal{P}}$, na pravcu i u smislu njezina djelovanja, izazvat će sile u štapovima vrijednosti kojih su P puta manje od vrijednosti sila koje je izazvala sila $\vec{\mathcal{P}}$, $\bar{s}_{\{i,j\}} = S_{\{i,j\}}^{(0)}/P$.

Pomak je hvatišta sile $\vec{\mathcal{P}}$ po horizontalnom pravcu

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{500,000} \left[2 \cdot 35,13 \cdot 0,375 \cdot 3 + 23,39 \cdot 0,375 \cdot 3 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (-78,16) \cdot (-0,5) \cdot 4 + 2 \cdot (-58,55) \cdot (-0,625) \cdot 5 \right] \\ &= 0,001568 \text{ m} \approx 1,6 \text{ mm}.\end{aligned}$$