

GS 1. — ~~1~~¹⁵. rujna 2026.

Zadatak 1.

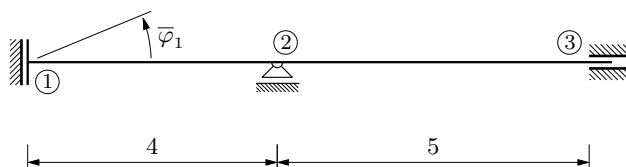
- a. Metodom sila izračunajte potrebne vrijednosti i nacrtajte dijagrame unutarnjih sila ako su

$$\bar{\varphi}_1 = 0,0025,$$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2,$$

$$b_{1,2}/h_{1,2} = 30/30 \text{ [cm]} \text{ i}$$

$$b_{2,3}/h_{2,3} = 30/45 \text{ [cm]}!$$



Slika 1.

- b. Nacrtajte progibnu liniju! Očitajte duljinu pomaka točke 1 i kut zaokreta osi u točki 2!
- c. Izračunajte orijentiranu duljinu pomaka točke 1 i kut zaokreta osi u točki 2! (Primenite redukcijski stavak!)

a. Sistem je dva puta statički neodređen: $s_{\min} = 1 \cdot 3 - (2 + 1 + 2) = -2$, a lako je vidjeti da je sistem geometrijski nepromjenjiv, pa je $s = s_{\min}$. Na slikama 2.a. do f. prikazani su neki mogući/smisleni osnovni sistemi za metodu sila, a na slikama g. i h. i dva nemoguća [zašto su nemogući/besmisleni?].

Dijagrami m_1 i m_2 za (smislene) osnovne sisteme sa slike 2. prikazani su na slici 3. (Nadam se da crtanje tih dijagrama ne treba objašnjaviti.)

Osnovni sistemi na slikama 2.d., e. i f. oblikovani su umetanjem zgloba u upeti ležaj prisilni zaokret kojega je zadan. To znači da vrijednosti X_1 i X_2 neodređenih momenata ili sila moraju biti takve da se os grede neposredno uz umetnuti zglob zaokrene za kut $\bar{\varphi}_1$, pa su jednadžbe kompatibilnosti oblika

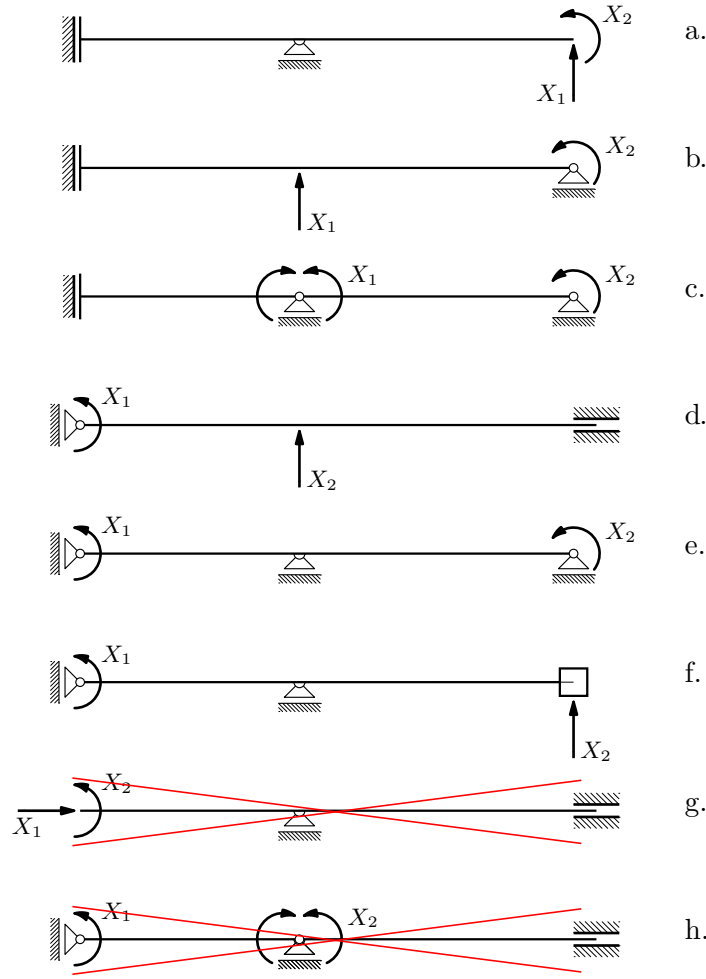
$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 = \bar{\varphi}_1,$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 = 0;$$



pomaka ili zaokreta (u odnosu na podlogu i jednoga dijela sistema u odnosu na drugi) na mjestu i po pravcu ili oko osi drugoga raskinutog spoja nema, pa je u drugoj jednadžbi s desne strane znaka jednakosti 0.

U osnovnim sistemima na slikama 2.a., b. i c. na mjestima i po pravcima ili oko osi raskinutih spojeva nema pomaka ni zaokreta, pa će u obje jednadžbe na desnim stranama biti 0. Umetanjem zgloba u upeti ležaj osnovne sisteme pretvaramo u mehanizme omogućavajući time njihovo pomicanje zbog zadanoga prisilnog zaokreta. Na slici 4. prikazani su dijagrami projekcija pomaka mehanizama na vertikalni pravac. (Prva su dva mehanizma samo po jedno tijelo. U oba se mehanizma lijevi pomični zglobni ležaj može pomicati samo po vertikalnom pravcu, pa traženi apsolutni pol tijela mora biti na horizontalnom pravcu koji prolazi kroz taj ležaj. Drugi se pak ležaj može pomicati samo po



Slika 2.

horizontalnom pravcu, pa apsolutni pol mora biti na vertikali kroz njega. Treći sistem doduše sadrži dva tijela, ali desno je tijelo nepomično (dva ležaja sprečavaju vertikalne pomake i zaokretanje tijela, jedan ležaj, u lancu s lijevim tijelom, sprečava horizontalni pomak), pa je apsolutni pol lijevoga tijela u njegovu spoju s nepomičnim desnim.) Opći je oblik jednadžbi kompatibilnosti sada

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \bar{\delta}_{1,0} &= 0, \\ \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \bar{\delta}_{2,0} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

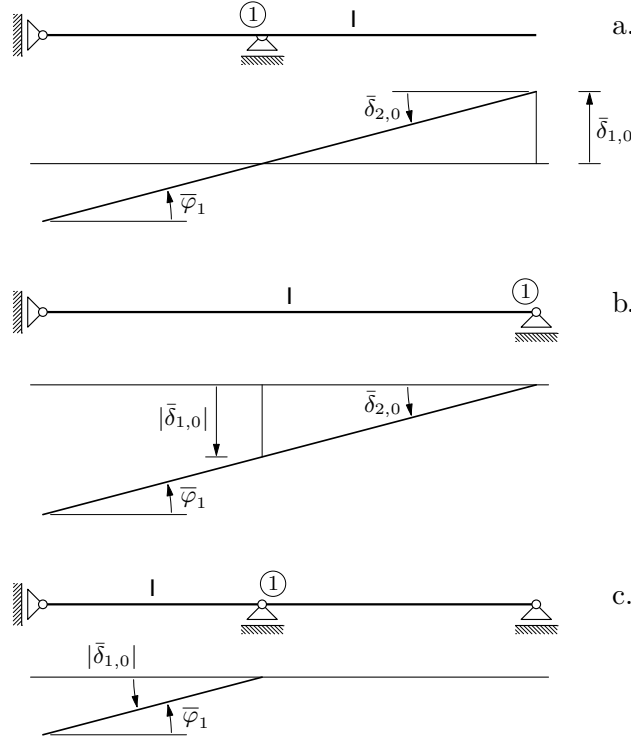
pri čemu su utjecaji prisilnoga zaokreta na orijentirane duljine pomaka i kutove zaokreta hvatišta neodređenih sila i momenata

- za osnovni sistem sa slike 2.a. (prema slici 4.a.)

$$\bar{\delta}_{1,0} = \bar{\varphi}_1 \cdot 5 = 0,0125 \quad \& \quad \bar{\delta}_{2,0} = \bar{\varphi}_1 = 0,0025,$$

- za osnovni sistem sa slike 2.b. (prema slici 4.b.)

$$\bar{\delta}_{1,0} = -\bar{\varphi}_1 \cdot 5 = -0,0125 \quad \& \quad \bar{\delta}_{2,0} = \bar{\varphi}_1 = 0,0025,$$



Slika 4.

momenta, i reakcije, tako da iz izraza za jednakost radova vanjskih i unutarnjih virtualnih sila slijedi da su u općem slučaju orijentirana duljina pomaka odabrane točke sistema po odabranom pravcu ili kut zaokreta osi grede u odabranoj točki

$$1 \cdot \delta_i^{\parallel} \stackrel{\text{ili}}{=} 1 \cdot \varphi_i = \int_0^{\ell} n_i(x) \left[\frac{N(x)}{E A(x)} + \alpha t_s \right] dx + \int_0^{\ell} m_i(x) \left[\frac{M(x)}{E I(x)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \right] dx \\ - n_{i,0} \bar{u}_0 - n_{i,\ell} \bar{u}_{\ell} - t_{i,0} \bar{w}_0 - t_{i,\ell} \bar{w}_{\ell} - m_{i,0} \bar{\varphi}_0 - m_{i,\ell} \bar{\varphi}_{\ell},$$

te su, uz vrijednosti reakcija sa slike 5.,

- za osnovni sistem sa slike 2.a.

$$\bar{\delta}_{1,0} = -(-(5 \cdot \bar{\varphi}_1)) = 0,0125 \quad \& \quad \bar{\delta}_{2,0} = -(-(1 \cdot \bar{\varphi}_1)) = 0,0025,$$

- za osnovni sistem sa slike 2.b.

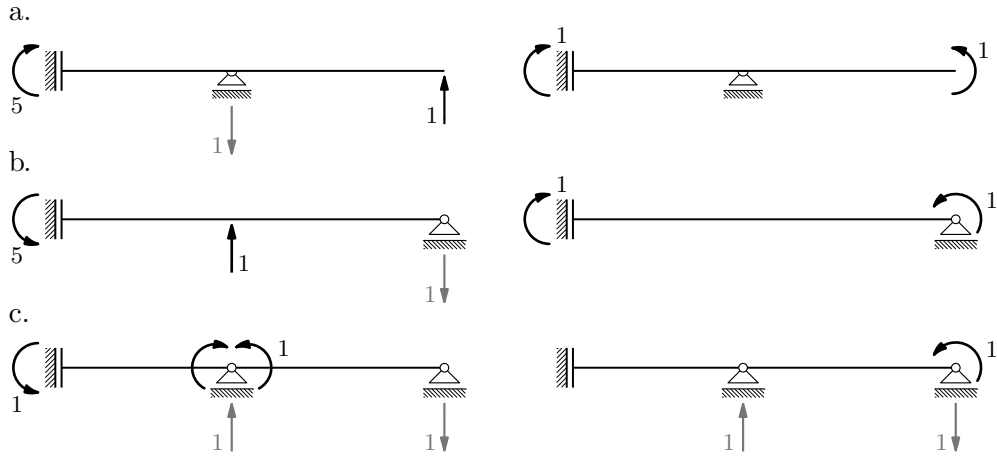
$$\bar{\delta}_{1,0} = -(5 \cdot \bar{\varphi}_1) = -0,0125 \quad \& \quad \bar{\delta}_{2,0} = -(-(1 \cdot \bar{\varphi}_1)) = 0,0025,$$

- i za osnovni sistem sa slike 2.c.

$$\bar{\delta}_{1,0} = -(1 \cdot \bar{\varphi}_1) = -0,0025 \quad \& \quad \bar{\delta}_{2,0} = 0 \cdot \bar{\varphi}_1 = 0.$$

Zadatak ćemo riješiti pomoću osnovnoga sistema sa slike 2.d. Koeficijenti su fleksibilnosti uz dijagrame m_1 i m_2 prikazane na slici 3.d.

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI_1} (1 \cdot 4) \cdot 1 + \frac{1}{EI_2} (1 \cdot 5) \cdot 1 = \frac{4}{EI_1} + \frac{5}{EI_2} = 0,000270690,$$



Slika 5.

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \frac{125}{3EI_2} = 0,000\,609\,663,$$

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{EI_2} (1 \cdot 5) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot (-1) = -\frac{25}{2EI_2} = -0,000\,182\,899,$$

jer su

$$EI_1 = E \cdot \frac{b_{1,2} h_{1,2}^3}{12} = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,3^4}{12} = 20\,250 \text{ kNm}^2,$$

$$EI_2 = E \cdot \frac{b_{2,3} h_{2,3}^3}{12} = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,45^3}{12} = 68\,343,75 \text{ kNm}^2.$$

Uvrštavanjem u (5.1) na stranici 1 dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 0,000\,270\,690 \cdot X_1 - 0,000\,182\,899 \cdot X_2 &= 0,002\,5 \\ -0,000\,182\,899 \cdot X_1 + 0,000\,609\,663 \cdot X_2 &= 0. \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje

$$X_1 = 11,583\,7 \quad \& \quad X_2 = 3,475\,12.$$

Konačne vrijednosti momenata računamo prema izrazu

$$M(x) = X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x).$$

Vrijednosti su momenata u lijevom ležaju i nad srednjim ležajem

$$M(0) = M(4) = X_1 m_1(0) = X_1 m_1(4) = 11,583\,7 \cdot (-1) = -11,583\,7 \text{ kNm},$$

a u desnom je ležaju vrijednost

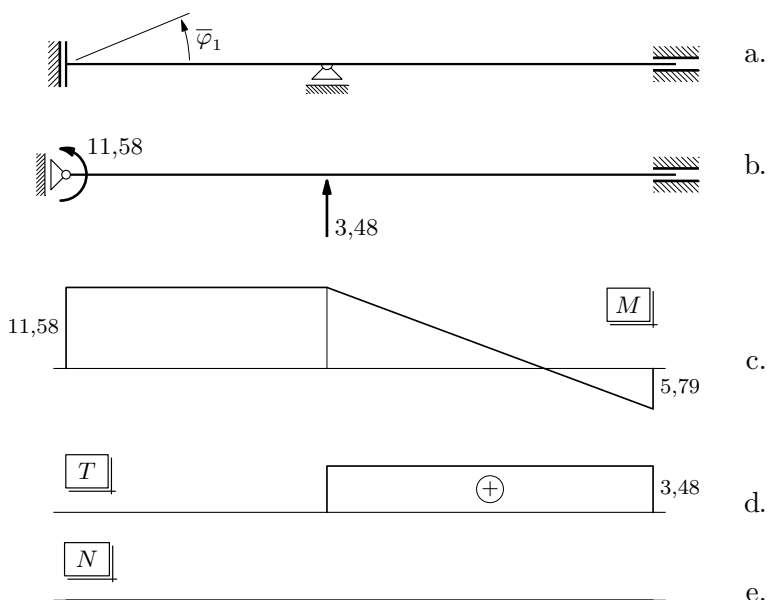
$$M(9) = X_1 m_1(9) + X_2 m_2(9) = -11,583\,7 + 3,475\,12 \cdot 5 = 5,791\,87 \text{ kNm};$$

između navedenih vrijednosti vrijednosti se mijenjaju linearno. Poprečne sile u lijevome

rasponu nema, a u desnome je njezina vrijednost

$$T(4^+) = T(4^-) = \frac{M(9) - M(4)}{\ell_{2,3}} = \frac{5,791\,87 - (-11,583\,7)}{5} = 3,475\,11 \text{ kN}.$$

Dijagram momenata savijanja prikazan je na slici 6.c., dijagram poprečnih sila na slici d., a dijagram uzdužnih na slici e.



Slika 6.

[Riješite zadatak pomoću jednoga od osnovnih sistema sa slika 2.a., b. ili c.!]

b. Za crtež progibne linije odabrano je mjerilo duljina 1 cm :: 100 cm (slika 7.).

Karakteristične su vrijednosti u dijagramu zakrivljenosti

$$|\kappa(0)| = \frac{|M(0)|}{EI_1} = \frac{11,583}{20\,250} = 0,000\,572\,0,$$

$$|\kappa(4^-)| = \frac{|M(4)|}{EI_1} = 0,000\,572\,0,$$

$$|\kappa(4^+)| = \frac{|M(4)|}{EI_2} = \frac{11,583}{68\,343,75} = 0,000\,169\,5,$$

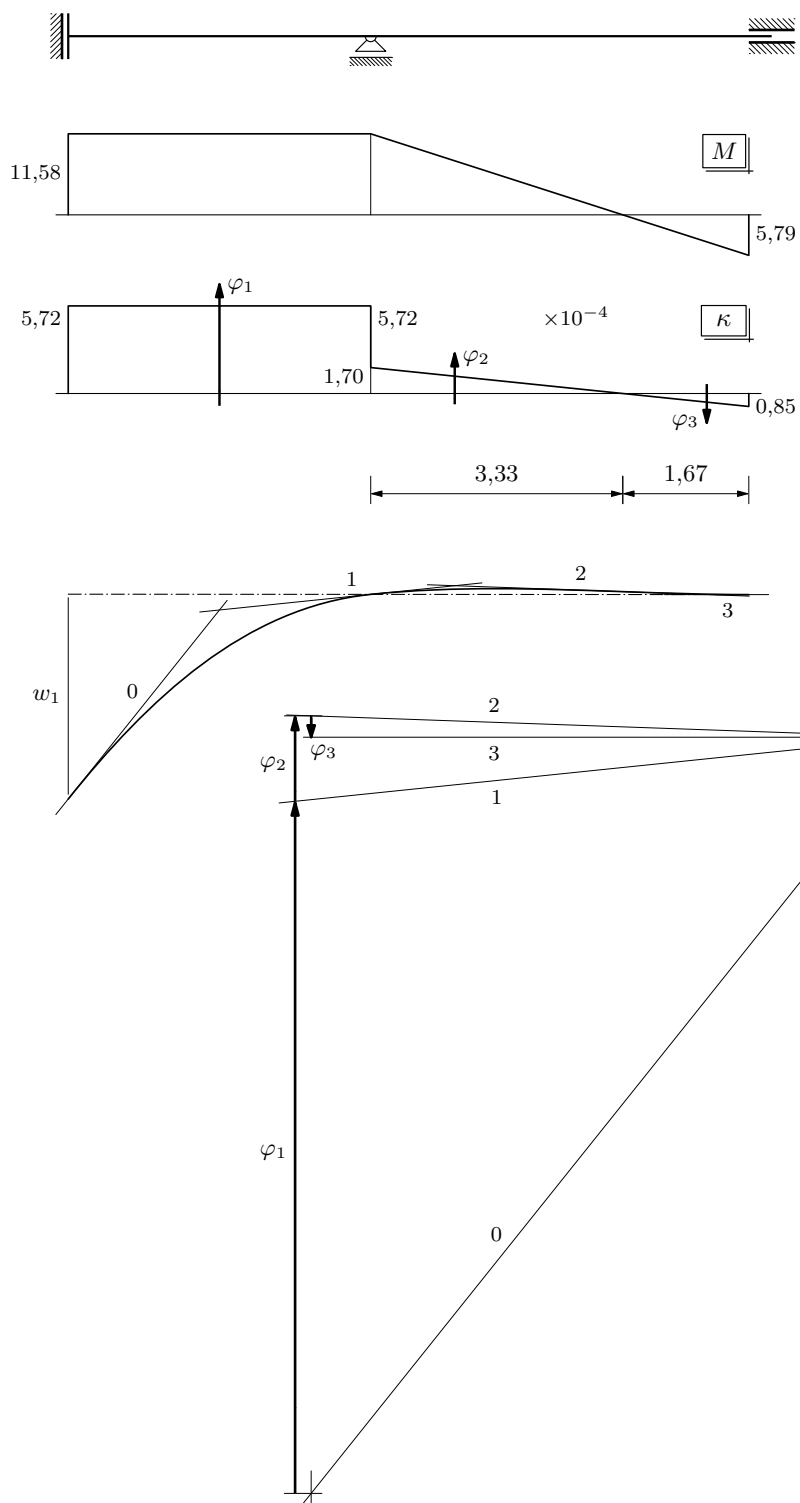
$$\kappa(9) = \frac{M(9)}{EI_2} = \frac{5,791\,87}{68\,343,75} = 0,000\,084\,75.$$

Nultočka desnoga dijela dijagrama udaljena je od srednjega ležaja za

$$x_1 = \frac{0,000\,169\,5 \cdot 5}{0,000\,254\,25} = 3,3 \text{ m} \quad \Leftarrow \quad \frac{x_1}{5} = \frac{0,000\,169\,5}{0,000\,169\,5 + 0,000\,084\,75},$$

a udaljenost je nultočke od desnoga ležaja

$$x_2 = 5 - x_1 = 1,6 \text{ m}.$$



Slika 7.

Duljine su vektora kutova

$$\varphi_1 = 5,72 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 0,002\,288,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,695 \cdot 10^{-4} \cdot 3,33 = 0,000\,282\,5,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot 0,8475 \cdot 10^{-4} \cdot 1,6 = 0,00007063.$$

Za mjerilo kutova ćemo uzeti 1 cm :: 0,00025, pa su duljine crteža vektora u poligonu kutova

$$\tilde{\varphi}_1 = 9,15 \text{ cm}, \quad \tilde{\varphi}_2 = 1,13 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \tilde{\varphi}_3 = 0,28 \text{ cm}.$$

Odaberemo li za polnu udaljenost $\chi = 0,002$, na crtežu će pol biti udaljen $\tilde{\chi} = 8 \text{ cm}$ od pravca na kojem će biti vektori kutova. Budući da desni ležaj ne dopušta zaokret osi, zaključna se linija verižnoga poligona poklapa s njegovom zadnjom stranicom. (Ni lijevi ležaj ne dopušta zaokret osi, ali je njemu zadan prisilni zaokret, pa se zaključna linija neće poklapati s prvom stranicom verižnoga poligona.) Stavimo li pol poligona kutova na horizontalni pravac kroz vršak vektora $\vec{\varphi}_3$, zadnja će stranica poligona kutova biti horizontalna, pa će horizontalna biti i zadnja stranica verižnoga poligona, pa će horizontalna biti i zaključna linija.

Kut zaokreta osi nad srednjim ležajem (u točki 2) kut je između zaključne linije verižnoga poligona i stranice 1 koja je tangenta na progibnu liniju nad tim ležajem, a to je i kut između zraka 3 i 1 u poligonu sila, koji je jednak duljini vektora $\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_3$:

$$\|\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_3\| = |\varphi_2| - \varphi_3 = 0,000212.$$

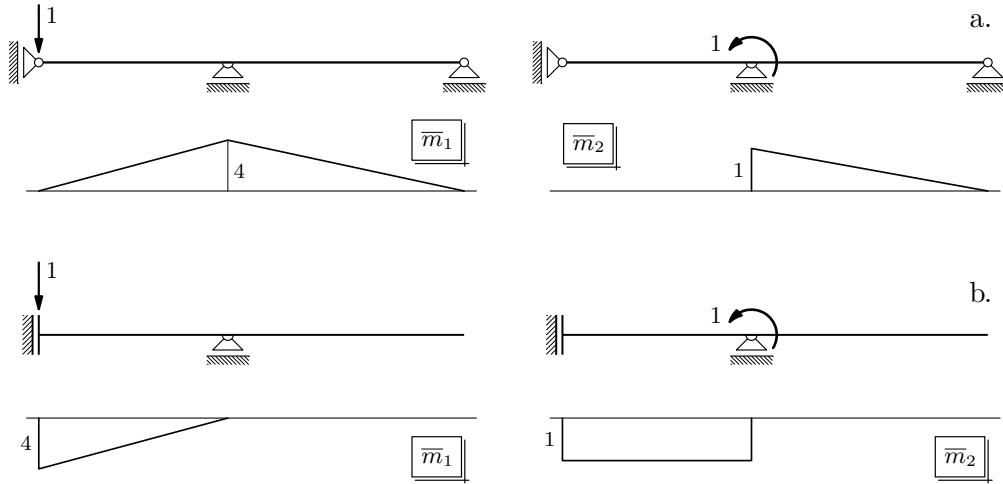
U verižnom poligonu možemo očitati $\tilde{w}_1 = 2,71 \text{ cm}$, pa je duljina vertikalnoga pomaka točke 1

$$w_1 = \tilde{w}_1 \frac{m}{n} = \tilde{w}_1 m \chi = 2,71 \cdot 100 \cdot 0,002 = 0,542 \text{ cm} = 5,42 \text{ mm}.$$

c. Točka 1 se može gibati samo po vertikalnom pravcu, pa ćemo za izračunavanje duljine njezina pomaka u nju staviti jediničnu virtualnu silu koja djeluje na vertikalnom pravcu. Za izračunavanje kuta zaokreta osi u točki 2 u nju stavljamo jedinični virtualni moment. Prema redukcijskom stavku, pri izračunavanju duljine pomaka neke točke ili kuta zaokreta osi u nekoj točki statički neodređenoga sistema jediničnu silu ili moment ne moramo staviti na izvorni, nego ih možemo staviti na bilo osnovni sistem.

Odabrat ćemo prvo osnovni sistem sa slike 2.e. na stranici 2. Dijagrami momenata zbog djelovanja jedinične virtualne sile i momenta prikazani su na slici 8.a., pa su, uz dijagram momenata prikazan na slici 6.c. na stranici 6,

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{EI_1} (11,58 \cdot 4) \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \right) \\ &\quad + \frac{1}{EI_2} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 11,58 \cdot 5 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 5,79 \cdot 5 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \right) (-1) \right] \\ &= 0,005422 \text{ m} = 5,422 \text{ mm}, \\ \varphi_2^* &= \frac{1}{EI_2} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 11,58 \cdot 5 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 5,79 \cdot 5 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \right) (-1) \right] \\ &= 0,0002118. \end{aligned}$$



Slika 8.

(Kut je označen s φ_2^* kako bi se razlikovao od kuta φ_2 u odjeljku b. Kut φ_2^* u tom je odjeljku $\|\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_3\|$.)

Jedinična je sila orijentirana prema dolje. Kako je izračunana vrijednost w_1 pozitivna, pomak je prema dolje. Zaokret osi za kut φ_2^* je u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu (kao smisao vrtnje jediničnoga momenta, jer je i vrijednost φ_2^* pozitivna).

Odaberemo li osnovni sistem sa slike 2.a., dobit ćemo

$$w_1^* = \frac{1}{EI_1} (11,58 \cdot 4) \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \right) (-1) = -0,004575 \text{ m},$$

$$\varphi_2^{**} = \frac{1}{EI_1} (11,58 \cdot 4) \cdot 1 \cdot (-1) = -0,0022874,$$

vrijednosti bitno različite od vrijednosti dobivanih s osnovnim sistemom sa slike e. Štoviše, obje su vrijednosti negativne — pomak je prema gore, a zaokret u smislu vrtnje kazaljke na satu?

No, „zaboravili” smo utjecaj prisilnoga zaokreta ležaja. Dok je u osnovnom sistemu sa slike 2.e. raskinut spoj s podlogom na mjestu prisilnoga zaokreta, tako da sistem zaokret ležaja, koji je u stvari zaokret podloge, „ne osjeća”. Na osnovnom sistemu sa slike a. taj spoj nije raskinut, pa će zaokret podloge/ležaja izazvati zaokret grede, kao što je prikazano na slici 4.a. na stranici 4. Uzmemo li taj zaokret u obzir, bit će

$$w_1 = w_1^* + \bar{\varphi}_1 \cdot 4 = -0,004575 + 0,0025 \cdot 4 = 0,005425 \text{ m} = 5,425 \text{ mm},$$

$$\varphi_2^* = \varphi_2^{**} + \bar{\varphi}_1 = -0,0022874 + 0,0025 = 0,0002126.$$

Zadatak 2. (s malo drukčijim opterećenjem)

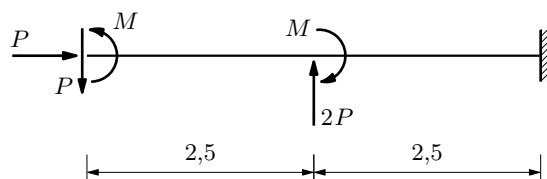
- a. Općom metodom pomakā izračunajte potrebne vrijednosti i nacrtajte dijagrame unutarnjih sila ako su

$$P = 50 \text{ kN},$$

$$M = 125 \text{ kNm},$$

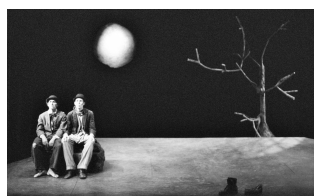
$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \text{ i}$$

$$b/h = 30/45 \text{ [cm]}!$$



Slika 9.

- b. Koliki je kut zaokreta osi na slobodnom kraju i kolika je duljina pomaka toga kraja?
c. Provjerite rezultate u a.!



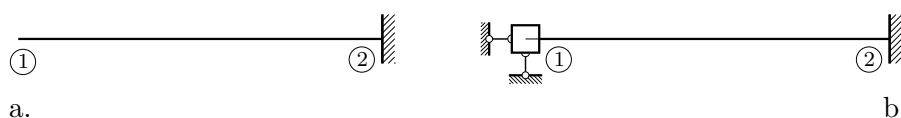
ESTRAGON: (*giving up again*). Nothing to be done.

VLADIMIR: I'm beginning to come round to that opinion. All my life I've tried to put it from me, saying, Vladimir be reasonable, you haven't yet tried everything. And I resumed the struggle. (*He broods, musing on the struggle. Turning to Estragon.*) So there you are again.

ESTRAGON: Am I?

Samuel Beckett: *Waiting for Godot*

- a. Najjednostavniji sistem za rješavanje metodom pomakā sistem je s elementom {1,2} između čvorova 1 i 2 na slobodnom i na upetom kraju (slika 10.a.). Nepoznanice su orijentirane duljine u_1 i w_1 horizontalne i vertikalne komponente translacijskoga pomaka čvora 1 i kut zaokreta φ_1 osi u njemu. U ležajnom su čvoru $u_2 = w_2 = \varphi_2 = 0$. Osnovni je sistem za opću metodu pomakā prikazan na slici b.



Slika 10.

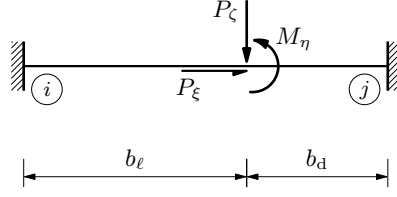
Na stranici 282 skriptata [<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/gs1.pdf>], u odjeljku 12.3.2. *Sile upetosti* poglavlja 12. *Opća metoda pomakā*, navedeni su opći izrazi (304) za vrijednosti sila upetosti pri djelovanju koncentriranih sila vrijednosti P_ξ i P_ζ u smjerovima lokalnih osi ξ i ζ i momenta vrijednosti M_η u točki koja je za b_ℓ udaljena od čvora i (i za $b_d = \ell_{\{i,j\}} - b_\ell$ od čvora j) (slika 11.)¹:

$$\bar{N}_{i,j} = -P_\xi \frac{b_d}{\ell_{\{i,j\}}},$$

$$\bar{N}_{j,i} = -P_\xi \frac{b_\ell}{\ell_{\{i,j\}}},$$

$$\bar{T}_{i,j} = -P_\zeta \frac{(3b_\ell + b_d)b_d^2}{\ell_{\{i,j\}}^3} - M_\eta \frac{6b_\ell b_d}{\ell_{\{i,j\}}^3}, \quad \bar{T}_{j,i} = -P_\zeta \frac{(b_\ell + 3b_d)b_\ell^2}{\ell_{\{i,j\}}^3} + M_\eta \frac{6b_\ell b_d}{\ell_{\{i,j\}}^3},$$

¹ U skriptama je vrijednost momenta označena s M . Ovdje smo uveli oznaku M_η kako bismo opću vrijednost u izrazima razlikovali od vrijednosti $M = 125 \text{ kNm}$ zadanih momenata.



Slika 11.

$$\bar{M}_{i,j} = P_z \frac{b_l b_d^2}{\ell_{\{i,j\}}^2} + M_\eta \frac{b_d (3 b_l - \ell_{\{i,j\}})}{\ell_{\{i,j\}}^2}, \quad \bar{M}_{j,i} = -P_z \frac{b_l^2 b_d}{\ell_{\{i,j\}}^2} + M_\eta \frac{b_l (3 b_d - \ell_{\{i,j\}})}{\ell_{\{i,j\}}^2}.$$

Ako su $b_l = b_d = \ell_{\{i,j\}}/2$, izrazi se pojednostavnjuju:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i,j} &= -\frac{P_x}{2}, & \bar{N}_{j,i} &= -\frac{P_x}{2}, \\ \bar{T}_{i,j} &= -\frac{P_z}{2} - \frac{3M_\eta}{2\ell_{\{i,j\}}}, & \bar{T}_{j,i} &= -\frac{P_z}{2} + \frac{3M_\eta}{2\ell_{\{i,j\}}}, \\ \bar{M}_{i,j} &= \frac{P_z \ell_{\{i,j\}}}{8} + \frac{M_\eta}{4}, & \bar{M}_{j,i} &= -\frac{P_z \ell_{\{i,j\}}}{8} + \frac{M_\eta}{4}. \end{aligned}$$

Djeluju li sile i moment neposredno desno od lijevoga kraja štapa, u točki s koordinatom $0 + dx$, onda su $b_l = dx \simeq 0$ i $b_d = \ell_{\{i,j\}} - dx \simeq \ell_{\{i,j\}}$,

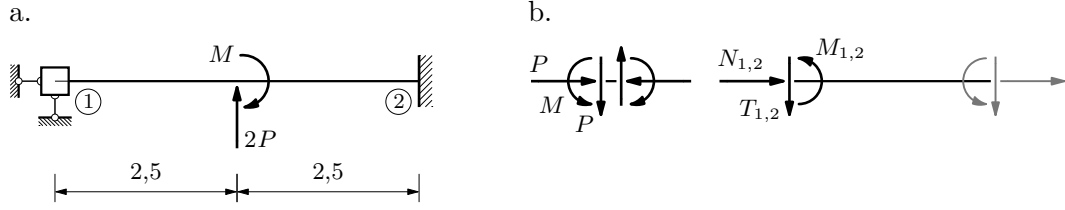
$$\begin{aligned} \bar{N}_{i,j} &= -P_x, & \bar{N}_{j,i} &= 0, \\ \bar{T}_{i,j} &= -P_z, & \bar{T}_{j,i} &= 0, \\ \bar{M}_{i,j} &= -M_\eta, & \bar{M}_{j,i} &= 0, \end{aligned}$$

jer u izraze, dakako, uvrštavamo $b_l = 0$ i $b_d = \ell_{\{i,j\}}$. Ako pak sile i moment djeluju neposredno lijevo od desnoga kraja štapa, u točki s koordinatom $\ell_{\{i,j\}} - dx$, onda su $b_l = \ell_{\{i,j\}} - dx \simeq \ell_{\{i,j\}}$ i $b_d = dx \simeq 0$, pa su, uvrstimo li $b_l = \ell_{\{i,j\}}$ i $b_d = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i,j} &= 0, & \bar{N}_{j,i} &= -P_x, \\ \bar{T}_{i,j} &= 0, & \bar{T}_{j,i} &= -P_z, \\ \bar{M}_{i,j} &= 0, & \bar{M}_{j,i} &= -M_\eta. \end{aligned}$$

Sile i moment koji djeluju na slobodnom kraju konzole možemo u proračun uvesti na dva načina, kao djelovanja u čvoru ili kao djelovanja na kraju štapa. U prvom slučaju sile i moment na slobodnom kraju neposredno ulaze u jednadžbe ravnoteže čvora 1 (slika 12.b.), a sile upetosti uzrokuju samo sila i moment koji djeluju u polovištu duljine konzole; za njih su $P_x(\ell_{\{i,j\}}/2) = 0$, $P_z(\ell_{\{i,j\}}/2) = -2P = -100 \text{ kN}$ i $M_\eta(\ell_{\{i,j\}}/2) = -M = -125 \text{ kNm}$ (slika a.), pa su, uz $\ell_{\{i,j\}} = 5 \text{ m}$,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1,2} &= \bar{N}_{2,1} = 0, \\ \bar{T}_{1,2} &= -\frac{-100}{2} - \frac{3 \cdot (-125)}{2 \cdot 5} = 87,5 \text{ kN}, \end{aligned}$$



Slika 12.

$$\bar{T}_{2,1} = -\frac{-100}{2} + \frac{3 \cdot (-125)}{2 \cdot 5} = 12,5 \text{ kN},$$

$$\bar{M}_{1,2} = \frac{-100 \cdot 5}{8} + \frac{-125}{4} = -93,75 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{2,1} = -\frac{-100 \cdot 5}{8} + \frac{-125}{4} = 31,25 \text{ kNm}.$$

Matrica krutosti štapa (u lokalnom koordinatnom sustavu) navedena je u izrazu (307) na stranici 285 skripata, u odjeljku 12.3.3. *Odnos između sila na krajevima i pomaka krajeva*. Izdvajanjem odgovarajućih komponenata, uz $k_{\{1,2\}}^a = k^a$, $k_{\{1,2\}}^f = k$ i $\ell_{\{1,2\}} = 5$, dobivamo izraze za vrijednosti sila na krajevima štapa zbog njihovih pomaka,

$$n_{1,2} = k^a u_1,$$

$$n_{2,1} = -k^a u_1,$$

$$t_{1,2} = \frac{12k}{5^2} w_1 - \frac{6k}{5} \varphi_1,$$

$$t_{2,1} = -\frac{12k}{5^2} w_1 + \frac{6k}{5} \varphi_1,$$

$$m_{1,2} = -\frac{6k}{5} w_1 + 4k \varphi_1,$$

$$m_{2,1} = -\frac{6k}{5} w_1 + 2k \varphi_1,$$

jer su (slika 13.)

$$u_{1,2} = u_1,$$

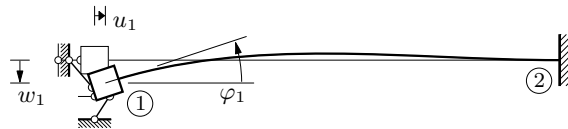
$$u_{2,1} = u_2 = 0,$$

$$w_{1,2} = w_1,$$

$$w_{2,1} = w_2 = 0,$$

$$\varphi_{1,2} = \varphi_1,$$

$$\varphi_{2,1} = \varphi_2 = 0.$$



Slika 13.

Orijentirane duljine u_1 i w_1 i kut φ_1 moraju biti takvi da vrijednosti ukupnih sila na kraju 1,

$$N_{1,2} = \bar{N}_{1,2} + n_{1,2} = k^a u_1,$$

$$T_{1,2} = \bar{T}_{1,2} + t_{1,2} = 87,5 + \frac{12k}{25} w_1 - \frac{6k}{5} \varphi_1,$$

$$M_{1,2} = \bar{M}_{1,2} + m_{1,2} = -93,75 - \frac{6k}{5} w_1 + 4k \varphi_1.$$

zadovolje jednadžbe ravnoteže sila i momenata u čvoru 1 (slika 12.b.),

$$\begin{aligned} P - N_{1,2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad n_{1,2} = P \quad \Rightarrow \quad k^a u_1 = 50, \\ P - T_{1,2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = P - \bar{T}_{1,2} \quad \Rightarrow \quad \frac{12k}{25} w_1 - \frac{6k}{5} \varphi_1 = -37,5, \\ M - M_{1,2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = M - \bar{M}_{1,2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{6k}{5} w_1 + 4k \varphi_1 = 218,75. \end{aligned}$$

Iz prve je jednadžbe neposredno

$$u_1 = \frac{50}{k^a},$$

a rješenje je sustava koji čine druga i treća jednadžba

$$w_1 = \frac{1875}{8k} \quad \& \quad \varphi_1 = \frac{125}{k}.$$

Uvrštavanjem rješenja u izraze za vrijednosti sila na krajevima dobivamo

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= k^a \cdot \frac{50}{k^a} = 50 \text{ kN}, \\ T_{1,2} &= 87,5 + \frac{12k}{25} \cdot \frac{234,375}{k} - \frac{6k}{5} \cdot \frac{125}{k} = 50 \text{ kN}, \\ M_{1,2} &= -93,75 - \frac{6k}{5} \cdot \frac{234,375}{k} + 4k \cdot \frac{125}{k} = 125 \text{ kNm}, \\ N_{2,1} &= \bar{N}_{2,1} + n_{2,1} = -k^a u_1 = -k^a \cdot \frac{50}{k^a} = -50 \text{ kN}, \\ T_{2,1} &= \bar{T}_{2,1} + t_{2,1} = 12,5 - \frac{12k}{25} w_1 + \frac{6k}{5} \varphi_1 \\ &= 12,5 - \frac{12k}{25} \cdot \frac{234,375}{k} + \frac{6k}{5} \cdot \frac{125}{k} = 50 \text{ kN}, \\ M_{2,1} &= \bar{M}_{2,1} + m_{2,1} = 31,25 - \frac{6k}{5} w_1 + 2k \varphi_1 \\ &= 31,25 - \frac{6k}{5} \cdot \frac{234,375}{k} + 2k \cdot \frac{125}{k} = 0. \end{aligned}$$

a.1. Proračun možemo provesti (ili barem zapisati) i u matričnom obliku.² Veza je vrijednosti sila na krajevima i sila upetosti te orijentiranih duljina komponenata pomaka kraja 1 (koje su jednake komponentama pomaka čvora 1) i kuta zaokreta osi na tom

² Uočite da su vektori (jednostupčane matrice), kao i matrica krutosti, pisani s uglatima ($[\]$), a ne s vitičastim ($\{\}$) zagradama, kao što je i uobičajeno u hrvatskoj matematičkoj, fizičkoj i tehničkoj literaturi. Kako ste vektore pisali u Matematici 1. i Matematici 2.? Ali da... tko bi se toga sjećao? A i kakve veze imaju Matematike s Građevinskim statistikama? Kad već plaćate instrukcije (umjesto da pročitate barem primjere objavljene na stranicama predmeta (većinom rješenja ispitnih zadataka), ako već ne i skripta), tražite od onih koji uzimaju vaš novac da vas poduče onome što vas i onako kako vas mi učimo.

kraju (koji je jednak zaokretu čvora) u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} N_{1,2} \\ T_{1,2} \\ M_{1,2} \\ N_{2,1} \\ T_{2,1} \\ M_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 87,5 \\ -93,75 \\ 0 \\ 12,5 \\ 31,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12k}{25} & -\frac{6k}{5} \\ 0 & -\frac{6k}{5} & 4k \\ -k^a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12k}{25} & \frac{6k}{5} \\ 0 & -\frac{6k}{5} & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

(budući da su $u_2 = w_2 = \varphi_2 = 0$, četvrti, peti i šesti stupac matrice krutosti nisu potrebni).

Prva tri retka ulaze u sustav jednadžbi ravnoteže:

$$\begin{bmatrix} P \\ P \\ M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{1,2} \\ T_{1,2} \\ M_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k^a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12k}{25} & -\frac{6k}{5} \\ 0 & -\frac{6k}{5} & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 125 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 87,5 \\ -93,75 \end{bmatrix}.$$

Struktura matrice sustava,

$$\left[\begin{array}{c|cc} k^a & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12k}{25} & -\frac{6k}{5} \\ 0 & -\frac{6k}{5} & 4k \end{array} \right],$$

pokazuje da se sustav može „razbiti” u dva (pod)sustava:

$$[k^a][u_1] = [50] \quad \& \quad \begin{bmatrix} \frac{12k}{25} & -\frac{6k}{5} \\ -\frac{6k}{5} & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37,5 \\ 218,75 \end{bmatrix} \quad (\&)$$

Uvrštavanjem rješenja

$$u_1 = \frac{50}{k^a}, \quad w_1 = \frac{1875}{8k} \quad \text{i} \quad \varphi_1 = \frac{125}{k}$$

u matrični izraz na vrhu ove stranice dobivamo vrijednosti sila na krajevima navedene u izrazu na vrhu sljedeće stranice.

Pri crtanju dijagrama unutarnjih sila (slika 16.) u obzir treba uzeti razliku u pozitivnim orijentacijama i, time, u predznacima sila na krajevima štapa (slika 14.a.) i unutarnjih sila (slika b.). Uz to, za crtanje dijagrama poprečnih sila i momenata treba izračunati



Slika 14.



Slika 15.

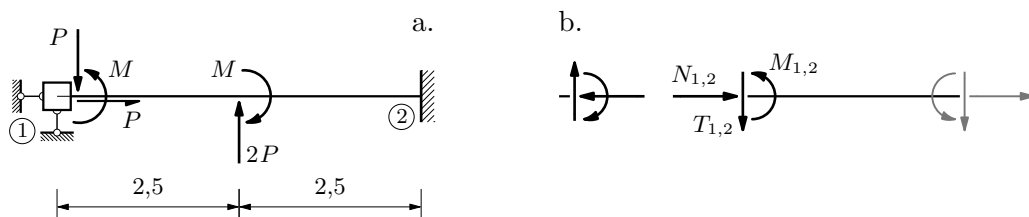


njihove vrijednosti neposredno lijevo, $T(\ell/2 - dx) = T_{\ell/2-}$ i $M(\ell/2 - dx) = M_{\ell/2-}$ (slika 15.a.), i neposredno desno, $T(\ell/2 + dx) = T_{\ell/2+}$ i $M(\ell/2 + dx) = M_{\ell/2+}$ (slika b.), od hvatišta sile i momenta koji djeluju u polovištu duljine konzole:

$$\begin{aligned}
 T_{1,2} + T_{\ell/2-} &= 0 & \Rightarrow & T_{\ell/2-} = -T_{1,2} = -50 \text{ kN}, \\
 T_{1,2} \cdot 2,5 + M_{1,2} + M_{\ell/2-} &= 0 & \Rightarrow & M_{\ell/2-} = -T_{1,2} \cdot 2,5 - M_{1,2} \\
 & & & = -50 \cdot 2,5 - 125 = -250 \text{ kNm}, \\
 -T_{\ell/2+} + T_{2,1} &= 0 & \Rightarrow & T_{\ell/2+} = T_{2,1} = 50 \text{ kN}, \\
 -M_{\ell/2+} - T_{2,1} \cdot 2,5 &= 0 & \Rightarrow & M_{\ell/2+} = -T_{2,1} \cdot 2,5 = -125 \text{ kNm}.
 \end{aligned}$$

a.2. Uzmemo li da su sile i moment koji djeluju na slobodnom kraju konzole djelovanja na kraju 1 štapa, u točki s koordinatom $0 + dx$, koju ćemo sažeto označiti s 0^+ , tako da su $P_\xi(0^+) = P = 50 \text{ kN}$, $P_\zeta(0^+) = P = 50 \text{ kN}$ i $M_\eta(0^+) = M = 125 \text{ kNm}$, uz, kao prije, $P_\xi(\ell_{\{i,j\}}/2) = 0$, $P_\zeta(\ell_{\{i,j\}}/2) = -2P = -100 \text{ kN}$ i $M_\eta(\ell_{\{i,j\}}/2) = -M = -125 \text{ kNm}$ (slika 17.a.), vrijednosti će sila upetosti biti

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{1,2} &= -50 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{2,1} &= 0, \\
 \bar{T}_{1,2} &= -50 - \frac{-100}{2} - \frac{3 \cdot (-125)}{2 \cdot 5} = 37,5 \text{ kN}, \\
 \bar{T}_{2,1} &= -\frac{-100}{2} + \frac{3 \cdot (-125)}{2 \cdot 5} = 12,5 \text{ kN}, \\
 \bar{M}_{1,2} &= -125 + \frac{-100 \cdot 5}{8} + \frac{-125}{4} = -218,75 \text{ kNm}, \\
 \bar{M}_{2,1} &= -\frac{-100 \cdot 5}{8} + \frac{-125}{4} = 31,25 \text{ kNm}.
 \end{aligned}$$



Slika 17.

Na čvor 1 sada djeluju samo sile s kraja štapa (slika 17.b.), pa uvjeti ravnoteže čvora nalažu njihovo iščezavanje:

$$\begin{aligned}
 -N_{1,2} &= 0 & \Rightarrow & n_{1,2} = -\bar{N}_{1,2} & \Rightarrow & k^a u_1 = 50, \\
 -T_{1,2} &= 0 & \Rightarrow & t_{1,2} = -\bar{T}_{1,2} & \Rightarrow & \frac{12k}{25} w_1 - \frac{6k}{5} \varphi_1 = -37,5,
 \end{aligned}$$

$$-M_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = -\bar{M}_{1,2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{6k}{5} w_1 + 4k \varphi_1 = 218,75.$$

Dobiven je isti sustav jednađbi kao u prvom slučaju, pa je i rješenje isto:

$$u_1 = \frac{50}{k^a}, \quad w_1 = \frac{1875}{8k} \quad \& \quad \varphi_1 = \frac{125}{k}.$$

Uvrštavanje rješenja u izraze za vrijednosti sila na krajevima daje sada

$$N_{1,2} = \bar{N}_{1,2} + k^a u_1 = -50 + k^a \cdot \frac{50}{k^a} = 0,$$

$$T_{1,2} = \bar{T}_{1,2} + \frac{12k}{25} w_1 - \frac{6k}{5} \varphi_1 = 37,5 + \frac{12k}{25} \cdot \frac{234,375}{k} - \frac{6k}{5} \cdot \frac{125}{k} = 0,$$

$$M_{1,2} = \bar{M}_{1,2} - \frac{6k}{5} w_1 + 4k \varphi_1 = -218,75 - \frac{6k}{5} \cdot \frac{234,375}{k} + 4k \cdot \frac{125}{k} = 0,$$

$$N_{2,1} = \bar{N}_{2,1} - k^a u_1 = -k^a \cdot \frac{50}{k^a} = -50 \text{ kN},$$

$$T_{2,1} = \bar{T}_{2,1} - \frac{12k}{25} w_1 + \frac{6k}{5} \varphi_1 = 12,5 - \frac{12k}{25} \cdot \frac{234,375}{k} + \frac{6k}{5} \cdot \frac{125}{k} = 50 \text{ kN},$$

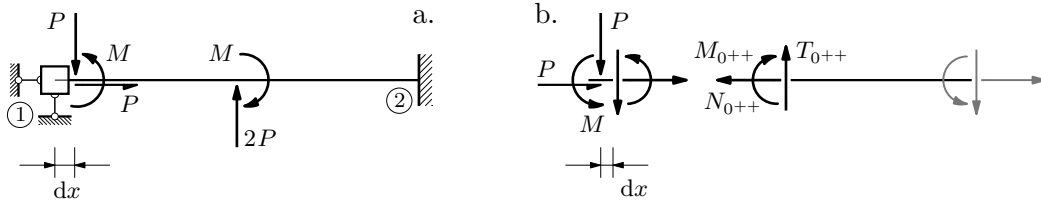
$$M_{2,1} = \bar{M}_{2,1} - \frac{6k}{5} w_1 + 2k \varphi_1 = 31,25 - \frac{6k}{5} \cdot \frac{234,375}{k} + 2k \cdot \frac{125}{k} = 0.$$

Vrijednosti sila na kraju 1 bitno se razlikuju od vrijednosti dobivenih u prvom slučaju — kao što uvjeti ravnoteže čvora 1 traže, te su vrijednosti sada nula. Sile i moment koje na konzolu djeluju na njezinu slobodnom kraju, na štapni element metode pomaka djeluju neposredno desno od lijevoga kraja, u točki s koordinatom $0 + dx = 0^+$ (slika 18.a.). Naravno, u proračunima ćemo uvrštavati 0. Pomaknemo li se od hvatišta sila i momenta još malo, neizmjereno malo udesno, u točku s koordinatom $0 + 2dx$, za koju ćemo također u proračunima uvrštavati 0, a sažeto je označavati s 0^{++} (slika b.), unutar nje će sile u presjeku kroz nju biti

$$P + N_{0^{++}} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{0^{++}} = -P = -50 \text{ kN},$$

$$P + T_{0^{++}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{0^{++}} = -P = -50 \text{ kN},$$

$$M + M_{0^{++}} + \underbrace{P dx}_{\simeq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{0^{++}} = -M = -125 \text{ kN}.$$

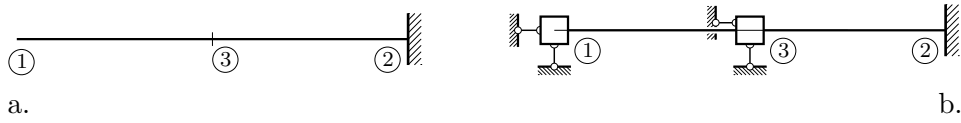


Slika 18.

Uzmemo li obzir predznake i orijentacije (slika 14.a.), te su vrijednosti jednake vrijednostima sila na kraju 1, pa će uz $0^{++} = 0$ dijagrami unutarnjih sila biti jednaki dijagramima prikazanim na slici 16.

a.3. Zadatak ćemo riješiti još jednom, s dodatnim čvorom 3 u hvatištu sile i momenta u polovištu duljine konzola (slika 19.a. i osnovni sistem na slici b.); umjesto štapa {1, 2} sistem je sada sklop štapa {1, 3} i {3, 2} (spojenih čvorom 3), a nepoznanice su, uz u_1, w_1 i φ_1 , i orijentirane duljine u_3 i w_3 komponenta pomaka dodanoga čvora i kut zaokreta φ_3 osi grede u njemu, dok je veza između duljina pomaka i kutova zaokreta krajeva štapa i nepoznanica, uz uvrštene rubne uvjete,

$$\begin{aligned} u_{1,3} &= u_1, & u_{3,1} &= u_3, & u_{3,2} &= u_3, & u_{2,3} &= u_2 = 0, \\ w_{1,3} &= w_1, & w_{3,1} &= w_3, & w_{3,2} &= w_3, & w_{2,3} &= w_2 = 0, \\ \varphi_{1,3} &= \varphi_1, & \varphi_{3,1} &= \varphi_3, & \varphi_{3,2} &= \varphi_3, & \varphi_{2,3} &= \varphi_3 = 0. \end{aligned}$$



Slika 19.

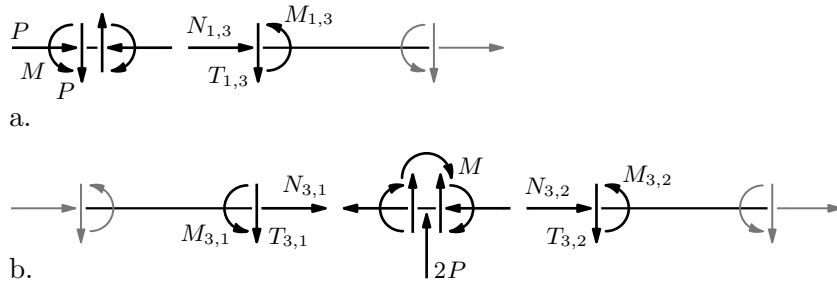
Možemo uzeti da su sada sva opterećenja u čvorovima, pa sila i momenata upetosti nema.

Nepoznanice moraju zadovoljiti jednadžbe ravnoteže sila i momenata u čvoru 1 (slika 20.a.),

$$\begin{aligned} P - N_{1,3} &= 0 & \Rightarrow & n_{1,3} = P & (\text{jer je } \bar{N}_{1,3} = 0), \\ P - T_{1,3} &= 0, & \Rightarrow & t_{1,3} = P & (\text{jer je } \bar{T}_{1,3} = 0), \\ M - M_{1,3} &= 0, & \Rightarrow & m_{1,3} = M & (\text{jer je } \bar{M}_{1,3} = 0), \end{aligned}$$

i u čvoru 3 (slika b.),

$$\begin{aligned} -N_{3,1} - N_{3,2} &= 0 & \Rightarrow & n_{3,1} + n_{3,2} = 0 & (\text{jer su } \dots), \\ -T_{3,1} - 2P - T_{3,2} &= 0 & \Rightarrow & t_{3,1} + t_{3,2} = -2P, \\ -M_{3,1} - M - M_{3,2} &= 0, & \Rightarrow & m_{3,1} + m_{3,2} = -M. \end{aligned}$$



Slika 20.

Veze su između vrijednosti sila i momenata na krajevima štapova i orijentiranih duljina komponenata pomaka čvorova i kutova zaokretā osi u njima, uz $k_{\{1,3\}}^a = k_{\{2,3\}}^a = \underline{k}^a$, $k_{\{1,3\}}^f = k_{\{2,3\}}^f = \underline{k}$ i $\ell_{\{1,3\}} = \ell_{\{2,3\}} = 2,5$,

$$\begin{aligned}
n_{1,3} &= \underline{k}^a u_1 - \underline{k}^a u_3, \\
t_{1,3} &= \frac{12 \underline{k}}{2,5^2} w_1 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_1 - \frac{12 \underline{k}}{2,5^2} w_3 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3, \\
m_{1,3} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_1 + 4 \underline{k} \varphi_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} w_3 + 2 \underline{k} \varphi_3, \\
n_{3,1} &= -\underline{k}^a u_1 + \underline{k}^a u_3, \\
t_{3,1} &= -\frac{12 \underline{k}}{2,5^2} w_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_1 + \frac{12 \underline{k}}{2,5^2} w_3 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3, \\
m_{3,1} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_1 + 2 \underline{k} \varphi_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} w_3 + 4 \underline{k} \varphi_3, \\
n_{3,2} &= \underline{k}^a u_3, \\
t_{3,2} &= \frac{12 \underline{k}}{2,5^2} w_3 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3, \\
m_{3,2} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_3 + 4 \underline{k} \varphi_3, \\
n_{2,3} &= -\underline{k}^a u_3, \\
t_{2,3} &= -\frac{12 \underline{k}}{2,5^2} w_3 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3, \\
m_{2,3} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_3 + 2 \underline{k} \varphi_3,
\end{aligned}$$

pa dobivamo sustav

$$\begin{aligned}
\underline{k}^a u_1 - \underline{k}^a u_3 &= 50, \\
\frac{12 \underline{k}}{6,25} w_1 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_1 - \frac{12 \underline{k}}{6,25} w_3 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3 &= 50, \\
-\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_1 + 4 \underline{k} \varphi_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} w_3 + 2 \underline{k} \varphi_3 &= 125, \\
-\underline{k}^a u_1 + (\underline{k}^a + \underline{k}^a) u_3 &= 0 \\
-\frac{12 \underline{k}}{6,25} w_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_1 + \left(\frac{12 \underline{k}}{6,25} + \frac{12 \underline{k}}{6,25} \right) w_3 + \left(\frac{6 \underline{k}}{2,5} - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \right) \varphi_3 &= -100, \\
-\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_1 + 2 \underline{k} \varphi_1 + \left(\frac{6 \underline{k}}{2,5} - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \right) w_3 + (4 \underline{k} + 4 \underline{k}) \varphi_3 &= -125,
\end{aligned}$$

koji se zbog neovisnosti uzdužnoga i poprečnoga smjera kod greda ravnih osi „raspada” u dva (pod)sustava,

$$\begin{aligned}\underline{k}^a u_1 - \underline{k}^a u_3 &= 50, \\ -\underline{k}^a u_1 + 2 \underline{k}^a u_3 &= 0\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{12 \underline{k}}{6,25} w_1 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_1 - \frac{12 \underline{k}}{6,25} w_3 - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3 &= 50, \\ -\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_1 + 4 \underline{k} \varphi_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} w_3 + 2 \underline{k} \varphi_3 &= 125, \\ -\frac{12 \underline{k}}{6,25} w_1 + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_1 + \frac{24 \underline{k}}{6,25} w_3 &= -100, \\ -\frac{6 \underline{k}}{2,5} w_1 + 2 \underline{k} \varphi_1 + 8 \underline{k} \varphi_3 &= -125.\end{aligned}$$

Rješenja su prvoga sustava

$$u_1 = \frac{100}{\underline{k}^a} \quad \& \quad u_3 = \frac{50}{\underline{k}^a},$$

a drugoga

$$w_1 = \frac{1875}{4 \underline{k}}, \quad \varphi_1 = \frac{250}{\underline{k}}, \quad w_3 = \frac{625}{12 \underline{k}} \quad \& \quad \varphi_3 = \frac{125}{2 \underline{k}}.$$

Uvrštavanjem u izraze za vrijednosti sila na krajevima štapova dobivamo

$$\begin{aligned}N_{1,3} &= \underline{k}^a \cdot \frac{100}{\underline{k}^a} - \underline{k}^a \cdot \frac{50}{\underline{k}^a} = 50 \text{ kN}, \\ T_{1,3} &= \frac{12 \underline{k}}{6,25} \cdot \frac{1875}{4 \underline{k}} - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{250}{\underline{k}} - \frac{12 \underline{k}}{6,25} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = 50 \text{ kN}, \\ M_{1,3} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{1875}{4 \underline{k}} + 4 \underline{k} \cdot \frac{250}{\underline{k}} + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} + 2 \underline{k} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = 125 \text{ kNm}, \\ N_{3,1} &= -\underline{k}^a \cdot \frac{100}{\underline{k}^a} + \underline{k}^a \cdot \frac{50}{\underline{k}^a} = -50 \text{ kN}, \\ T_{3,1} &= -\frac{12 \underline{k}}{6,25} \cdot \frac{1875}{4 \underline{k}} + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{250}{\underline{k}} + \frac{12 \underline{k}}{6,25} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \varphi_3 = -50 \text{ kN}, \\ M_{3,1} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{1875}{4 \underline{k}} + 2 \underline{k} \cdot \frac{250}{\underline{k}} + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} + 4 \underline{k} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = -250 \text{ kNm}, \\ N_{3,2} &= \underline{k}^a \cdot \frac{50}{\underline{k}^a} = 50 \text{ kN}, \\ T_{3,2} &= \frac{12 \underline{k}}{6,25} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} - \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = -50 \text{ kN}, \\ M_{3,2} &= -\frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} + 4 \underline{k} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = 125 \text{ kNm},\end{aligned}$$

$$N_{2,3} = -\underline{k}^a \cdot \frac{50}{\underline{k}^a} = -50 \text{ kN},$$

$$T_{2,3} = -\frac{12 \underline{k}}{6,25} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} + \frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = 50 \text{ kN},$$

$$M_{2,3} = -\frac{6 \underline{k}}{2,5} \cdot \frac{625}{12 \underline{k}} + 2 \underline{k} \cdot \frac{125}{2 \underline{k}} = 0.$$

Dijagrami unutarnjih sila se, naravno, nisu promijenili: ponovno slika 16. „Prednost” je dodavanja čvora 3 u hvatištu vanjske sile i momenta u tome da za crtanje dijagrama ne treba u toj točki (odnosno neposredno lijevo i neposredno desno od nje) naknadno računati vrijednosti unutarnjih sila; „mana” je u povećanom broju nepoznanica i, stoga, većem sustavu jednadžbi.

b. U općoj su metodi pomaka temeljne nepoznanice orijentirane duljine komponenata pomaka čvorova i kutovi zaokretā osi u njima. Slobodni je kraj konzole čvor 1. To znači da je izračunavanje duljina u_1 i w_1 i kuta φ_1 neizbježan korak u izračunavanju vrijednosti unutarnjih sila (moglo bi se reći da su u_1, w_1 i φ_1 izračunani usput). Prema tome, ne treba ih nakon crtanja dijagrama unutarnjih sila (ponovno) računati metodom jedinične sile. Ponavljam: već su izračunani. Izgovor da su ponovno računani „osiguranja radi” pogrešan je, kao što će se u sljedećem odjeljku pokazati.

Rješavajući sistem s jednim elementom izračunali smo da su orijentirane duljine komponenata pomaka čvora 1 i kut zaokreta osi u njemu

$$u_1 = \frac{50}{k^a}, \quad w_1 = \frac{1875}{8k} \quad \& \quad \varphi_1 = \frac{125}{k}.$$

Za zadani su poprečni presjek

$$A = bh = 0,3 \cdot 0,45 = 0,135 \text{ m}^2 \quad \& \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,45^3}{12} = 0,002\,278\,125 \text{ m}^4,$$

pa su

$$k^a = \frac{EA}{5} = 810\,000 \text{ kN/m} \quad \& \quad k = \frac{EI}{5} = 13\,668,75 \text{ kN/m}.$$

Duljine su komponenata pomaka

$$u_1 = \frac{50}{810\,000} = 0,000\,06 \text{ m} = 0,06 \text{ mm} \quad \text{i}$$

$$w_1 = \frac{1875}{8 \cdot 13\,668,75} = 0,017\,15 = 17,15 \text{ mm},$$

pa je duljina pomaka čvora 1

$$\delta_1 = \sqrt{u^2 + w^2} = 0,017\,15 = 17,15 \text{ mm}.$$

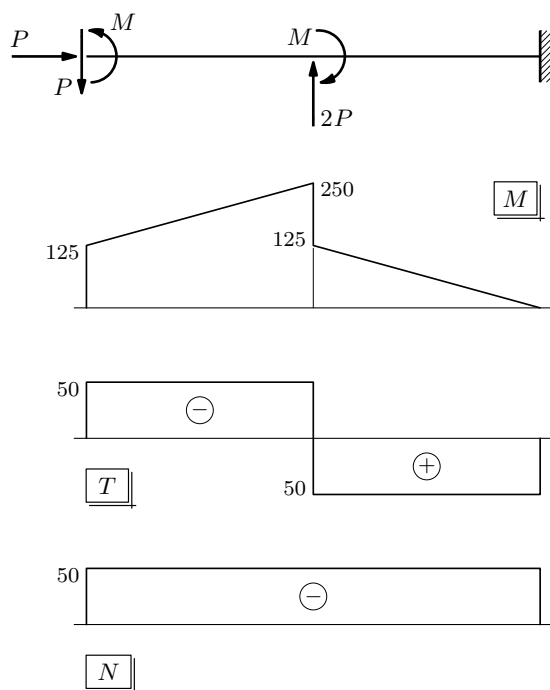
U odnosu na duljinu vertikalne/poprečne komponente duljina je horizontalne/uzdužne komponente u okviru točnosti proračuna zanemariva (omjer je duljina poprečne i uzdužne komponente pomaka $w_1/u_1 = 278 \approx 300$ i $\delta_1 = w_1$). Vrijednosti u_1 i w_1 su pozitivne, što znači da je komponenta $\vec{u}_1$ orijentirana slijeva nadesno, a komponenta $\vec{w}_1$ prema dolje.

Kut je zaokreta osi

$$\varphi_1 = \frac{125}{13\,668,75} = 0,009\,145;$$

kako je kut pozitivan, smisao je vrtnje suprotan od smisla vrtnje kazaljke na satu.

c. Konzola je statički određeni sistem, pa se vrijednosti unutarnjih sila i momenata mogu izračunati neposredno iz jednadžbi ravnoteže u kojima su nepoznanice vrijednosti sila (gradivo predmeta *Mehanika 1.*), bez zaobilaznoga puta kroz mračnu šumu nepoznatih duljina pomaka i kutova zaokreta. I, dakako, slika 21. na kojoj su dijagrami unutarnjih sila nacrtani s tako izračunanim vrijednostima ponovljena je slika 16.



Slika 21.

VLADIMIR: Charming evening we're having.

ESTRAGON: Unforgettable.

VLADIMIR: And it's not over.

ESTRAGON: Apparently not.

VLADIMIR: It's only beginning.

ESTRAGON: It's awful.

VLADIMIR: Worse than pantomime.

ESTRAGON: The circus.

VLADIMIR: The music-hall.

ESTRAGON: The circus.

Samuel Beckett: *Waiting for Godot*

Pokušaj provjere primjenom metode jedinične sile, koji bi vjerojatno trebao glumiti neshvaćenu deformacijsku kontrolu iz metode sila prenesenu u metodu pomaka, vrtnja je krugu koja će dobro završiti samo ako je počela dobro:

U toj bi tragikomediji poznata vrijednost trebala biti, recimo, duljina w_1 ili kut φ_1 koji su izračunani rješavanjem sustava temeljnih jednadžbi metode pomaka — sustava jednadžbi ravnoteže. Zamislimo da smo rješavajući drugi sustav u izrazu (~~3~~) na stranici 14 „izračunali” $\varphi_1 = \cancel{135/k} = \cancel{0,009877}$ umjesto $\varphi_1 = 125/k = 0,009145$. Uvrštavanjem u izraze za vrijednosti poprečnih sila i momenata na krajevima (navedene na istoj stranici) dobit ćemo

$$T_{1,2} = 87,5 + \frac{12k}{25} \cdot \frac{234,375}{k} - \frac{6k}{5} \cdot \frac{\cancel{135}}{k} = \cancel{38} \text{ kN},$$

$$T_{2,1} = 12,5 - \frac{12k}{25} \cdot \frac{234,375}{k} + \frac{6k}{5} \cdot \frac{\cancel{135}}{k} = \cancel{62} \text{ kN},$$

$$M_{1,2} = -93,75 - \frac{6k}{5} \cdot \frac{234,375}{k} + 4k \cdot \frac{\cancel{135}}{k} = \cancel{165} \text{ kNm},$$

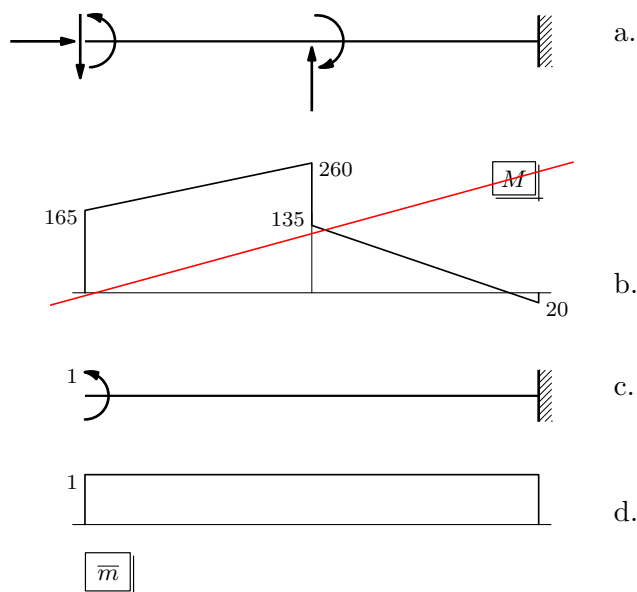
$$M_{2,1} = 31,25 - \frac{6k}{5} \cdot \frac{234,375}{k} + 2k \cdot \frac{\cancel{135}}{k} = \cancel{20} \text{ kNm},$$

pa će uz

$$M_{\ell/2-} = -T_{1,2} \cdot 2,5 - M_{1,2} = \cancel{-38} \cdot 2,5 - \cancel{165} = \cancel{-260} \text{ kNm},$$

$$M_{\ell/2+} = -T_{2,1} \cdot 2,5 + M_{2,1} = \cancel{-62} \cdot 2,5 + \cancel{20} = \cancel{-135} \text{ kNm}$$

momentni dijagram biti kao na slici 22.b.



Slika 22.

Kut je zaokreta osi na slobodnom kraju, uz dijagram $\bar{m}$ na slici 22.d.,

$$\begin{aligned} \varphi_1^* = \frac{1}{EI} & \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 165 \cdot 5 \right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 260 \cdot 5 \right) \cdot 1 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \cdot 135 \cdot 5 \right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 \right) \cdot 1 \cdot (-1) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{675}{68\,343,75} = 0,009\,877 = \frac{135 \cdot 5}{68\,343,75} = \frac{135}{13\,668,75} = \frac{135}{k}.$$

Náša „provjera” pokazuje/dokazuje da je φ_1^* jednak onom φ_1 koji smo „izračunali” i pogreška ostaje neotkrivenom.