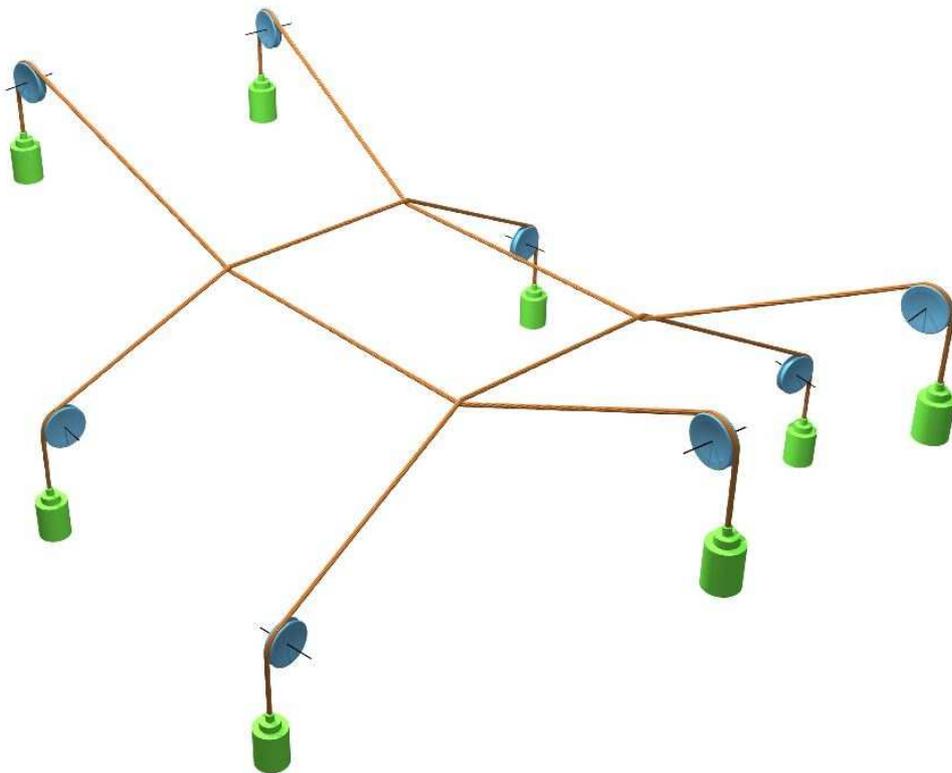


Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet

Krešimir Fresl

## Građevna statika 2.

Predavanja



Zagreb, 2017.

# Sadržaj

<b>1. Inženjerska metoda pomaka</b>	<b>3</b>
1.1. Nepoznanice inženjerske metode . . . . .	5
1.2. Nepomični sistemi . . . . .	6
1.3. Pomični sistemi . . . . .	11
1.4. Zglobovi i statička kondenzacija . . . . .	19
1.5. Prisilni pomaci ležajeva . . . . .	26
1.6. Formalizacija inženjerske metode pomakâ . . . . .	30
1.6.1. Kinematička ograničenja . . . . .	30
1.6.2. Jednadžbe kinematičkih ograničenja . . . . .	30
1.6.3. Sustavi jednadžbi ograničenjâ . . . . .	32
1.6.4. Kinematička kondenzacija . . . . .	39
<b>2. Relaksacijski postupci</b>	<b>43</b>
2.1. Postupak K. Čališeva za nepomične sisteme . . . . .	44
2.2. Crossov postupak . . . . .	48
2.2.1. Primjer . . . . .	50
2.3. Postupak O. Wernera i P. Csonke . . . . .	57
2.3.1. Simetričan višeetažni jednorasponski okvir . . . . .	58
2.3.2. Nesimetričan višeetažni jednorasponski okvir . . . . .	64
2.3.3. Okvir s više etaža i više raspona — nastavak primjera . . . . .	66
<b>3. Utjecajne funkcije i utjecajne linije — izračunavanje i crtanje</b>	<b>78</b>
3.1. Statički određeni nosači . . . . .	78
3.1.1. Jednostavno oslonjena greda . . . . .	78
3.1.2. Konzola . . . . .	81
3.1.3. Greda s prepustima . . . . .	82
3.2. Statički neodređeni nosači . . . . .	83
3.2.1. Statički postupak . . . . .	83
3.2.2. Kinematički postupak . . . . .	87
3.2.3. Primjeri . . . . .	93
<b>4. Zidovi s otvorima (koautorice SANJA HAK &amp; MARTA ŠAVOR NOVAK)</b>	<b>107</b>
4.1. Postupak Veselina Simovića . . . . .	109
4.1.1. Zid s jednim nizom otvora . . . . .	110
4.1.2. Zid s dva niza otvora . . . . .	128
4.1.3. Zid promjenjive visine . . . . .	132

4.2.	Metoda pomakâ . . . . .	136
4.2.1.	Matrica krutosti štapa . . . . .	137
4.2.2.	Usporedbe . . . . .	140
<b>5.</b>	<b>Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost</b> (koautorice PETRA GIDAK & ROMANA VRANČIĆ)	<b>145</b>
5.1.	O gipkim konstrukcijama . . . . .	145
5.1.1.	Povijesna slikovnica . . . . .	146
5.1.2.	Nalaženje oblika . . . . .	152
5.2.	Proračunski model mreže kabelâ . . . . .	152
5.3.	Ravnoteža slobodnoga čvora <i>i</i> . . . . .	155
5.4.	Minimalne mreže kabelâ . . . . .	156
5.5.	Steinerov problem (čin 1.) . . . . .	159
5.6.	Don Quijote, Sancho Panza, vjetrenjače i Newton–Raphsonov postupak (međuihra) . . . . .	164
5.7.	Steinerov problem (čin 2.) . . . . .	169
5.8.	Poopćene minimalne mreže kabelâ . . . . .	176
5.8.1.	Različite vrijednosti sila . . . . .	176
5.8.2.	Rubni kabeli . . . . .	177
5.9.	Steinerov problem (varijacija) . . . . .	181
5.10.	Metoda gustoća sila . . . . .	185
5.11.	Višekoračna metoda gustoća sila . . . . .	187
	<b>Literatura</b>	<b>190</b>

# 1. Inženjerska metoda pomaka

*Metode pomakâ* metode su proračuna štapnih sistema u kojima su nepoznanice *orijentirane duljine translacijskih pomaka* i *kutovi zaokreta* odabranih točaka sistema nazvanih čvorovima. U nastavku ćemo pod pojmom duljine pomaka uvijek podrazumijevati njegovu orijentiranu duljinu.

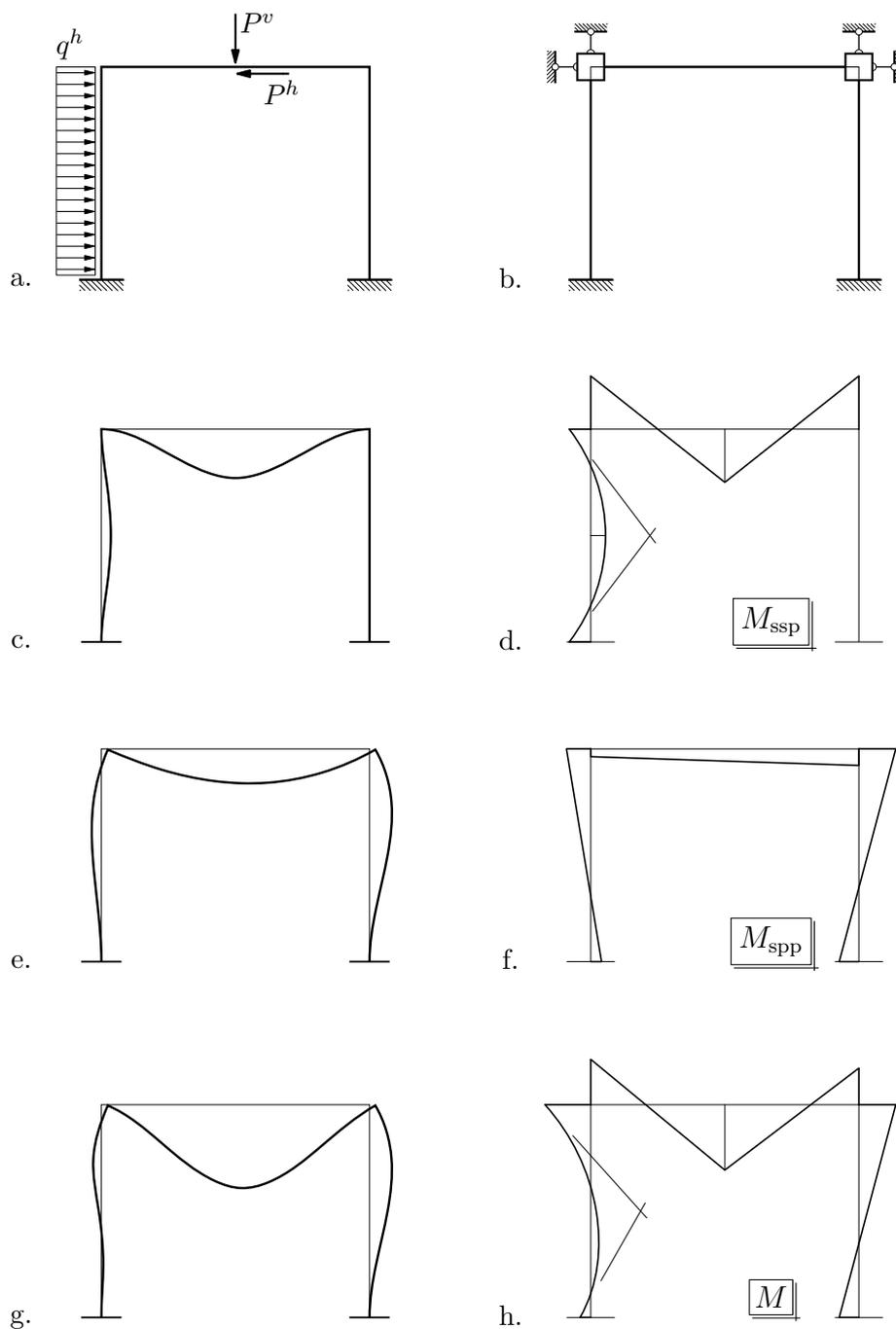
Proračun nekom od metoda pomakâ provodi se na *osnovnomu sistemu* koji oblikujemo dodavanjem zamišljenih veza koje sprečavaju translacijske pomake i zaokrete čvorova; za izvorni je sistem sa slike 1.a. osnovni sistem prikazan na slici b.

U prvome se koraku proračuna na osnovni sistem nanose zadane sile i sva ostala zadana djelovanja, poput slijeganja ležajeva i temperaturnih promjena. Polje pomakâ osnovnoga sistema u *stanju spriječenih pomaka čvorova* (slika 1.c.) odgovarat će tek jednome od mogućih stanja pomakâ izvornoga sistema. *Mogućim* ili *dopustivim stanjem pomakâ* nazivamo svako polje pomakâ koje zadovoljava uvjete neprekinutosti i stvarne ležajne uvjete. Primjerice, progibna linija grede u Bernoulli–Eulerovoj teoriji savijanja ne smije imati ni skokove ni lomove i mora proći ležajnim točkama — pomaknutima, ako su zadani pomaci ležajeva — uz zadane nagibe u upetim ležajevima; ili, matematičkim rječnikom: funkcija koja opisuje progibnu liniju mora na intervalu koji odgovara osi grede biti neprekinuta i imati neprekinutu prvu derivaciju<sup>1</sup> te mora zadovoljiti zadane, homogene ili nehomogene, geometrijske rubne uvjete koji propisuju vrijednosti funkcije ili njezine derivacije u ležajnim točkama. To stanje, u kojemu je osnovni sistem, nije, međutim, stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema — zamišljene veze prenose na podlogu dio sila koje djeluju na čvorove, pa bez njih čvorovi, izrežemo li ih sistema, neće biti u ravnoteži (momentni dijagram na slici 1.d.).

Osnovni ćemo sistem dovesti u stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema tako da stanju spriječenih pomaka čvorova pribrojimo *stanje prisilnih pomaka čvorova* (slika 1.e.), pri čemu ti pomaci i zaokreti moraju biti takvi da reakcije, koje se zbog njih razvijaju u zamišljenim vezama (momentni dijagram na slici f.), ponište reakcije izazvane zadanim djelovanjima. Kada reakcije iščeznu, na čvorove osnovnoga sistema djelovat će samo one sile koje djeluju na čvorove izvornog sistema. Budući da su u izvornomu sistemu te sile u ravnoteži, bit će u ravnoteži i u osnovnom sistemu (momentni dijagram na slici h.). Slijedi da uvjete iščezavanja reakcija u zamišljenim reakcijama možemo izraziti kao *uvjete ravnoteže* sila i momenata u čvorovima. Rješenje *sustava jednadžbi ravnoteže*

---

<sup>1</sup> Prema jednom teoremu matematičke analize sâmo postojanje prve derivacije osigurava neprekinutost funkcije [49].



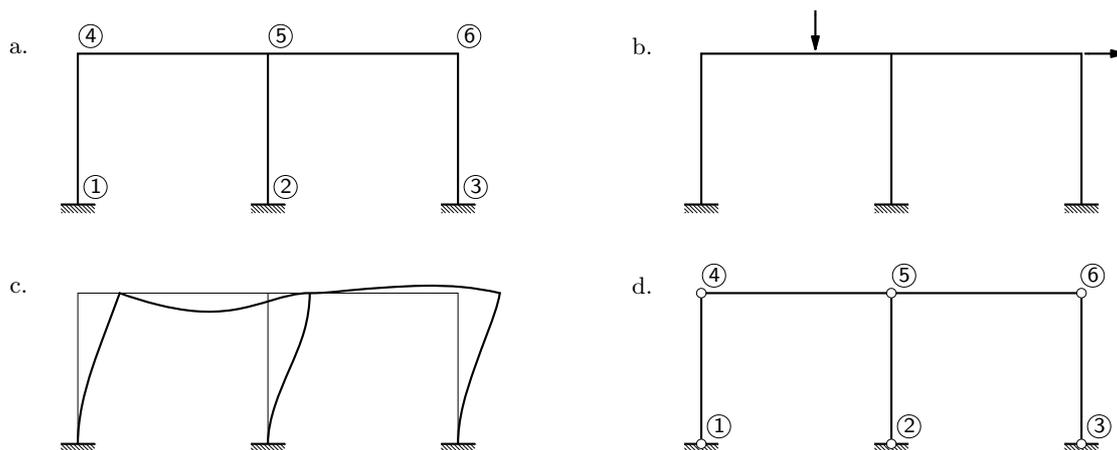
Slika 1.

čvorova tražene su, do tada nepoznate duljine pomakâ čvorova i kutovi njihovih zaokreta. Stvarno je stanje pomakâ sistema u našem primjeru skicirano na slici g.

U inženjerskoj metodi pomakâ nepoznanice nisu duljine svih translacijskih pomaka čvorova, nego samo *neovisnih translacijskih pomaka*. Stoga najčešće oblikujemo sàmo jednađžbe ravnoteže momenata u čvorovima te sustav nadopunjujemo *jednađžbama virtualnih radova na neovisnim translacijskim pomacima*.

## 1.1. Nepoznanice inženjerske metode

Svaki (kruti) čvor u ravnini ima tri stupnja slobode gibanja, pa je u općoj metodi pomakâ broj nepoznanica približno jednak trostrukom broju čvorova sistema (oduzeti treba broj komponentata pomaka po pravcima ležajnih veza). Uzmemo li da su štapovi u uzdužnome smjeru (apsolutno) kruti, što je temeljna pretpostavka *inženjerske metode pomakâ*, broj nepoznanica bitno se smanjuje.<sup>2</sup> Štoviše, za mnoge je sisteme, posebice okvirne, broj nepoznanica u inženjerskoj metodi pomakâ ponajčešće manji i od stupnja statičke neodređenosti — broja nepoznanica u metodi sila.



Slika 2.

Primjerice, na šest puta statički neodređenoj okvirnoj konstrukciji prikazanoj na slici 2.a. čvorovi 4, 5 i 6 su „slobodni”, te je u proračunu općom metodom pomakâ broj nepoznanica devet. Međutim, ako je uzdužna krutost štapova neizmjenjiva, uzdužne sile ne uzrokuju uzdužne deformacije, pa se proračunske duljine štapova ne mijenjaju.<sup>3</sup> To znači, prvo, da nema komponentata pomakâ čvorova po vertikalnim pravcima:  $w_4 = w_5 = w_6 = 0$  i, drugo, da su duljine horizontalnih komponentata njihovih pomaka međusobno jednake:  $u_4 = u_5 = u_6 = u_{\{4,5,6\}}$ , slika 2.c. Time smo broj nepoznanica sveli na četiri: kutove zaokretâ  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$  slobodnih čvorova i duljinu  $u_{\{4,5,6\}}$  njihova zajedničkog translacijskog pomaka. (Slika 2.c. skica je polja pomakâ za posebni slučaj opterećenja sa slike 2.b., ali zaključak o pomacima vrijedi općenito, za bilo koje opterećenje.)

U inženjerskoj su metodi pomakâ, prema tome, nepoznanice kutovi zaokretâ i duljine *neovisnih* translacijskih pomaka. Broj zaokretâ jednak je broju krutih i mješovitih kruto–zglobnih čvorova koji se mogu neovisno zaokretati,<sup>4</sup> ali broj neovisnih translacijskih pomaka nije jednak dvostrukom ukupnom broju slobodnih krutih, zglobnih i kruto–zglobnih

<sup>2</sup> I u općoj se metodi statičkom ili kinematičkom kondenzacijom neki zaokreti ili pomaci mogu ukloniti iz skupa nepoznanica. U odjeljku 1.6. pokazat ćemo da se inženjerska metoda može, uvođenjem kinematičkih ograničenja i njihovim uvažavanjem kinematičkom kondenzacijom, formalno izvesti kao poseban slučaj opće metode pomakâ.

<sup>3</sup> U linearnoj se teoriji uvijek zanemaruje i promjena razmaka krajeva grede pri njezinu savijanju.

<sup>4</sup> I ovdje se može postaviti dodatno ograničenje: katkada je pogodno čvorove povezati krutom gredom; svi će tako povezani čvorovi imati jednaki zaokret.

čvorova. Taj broj određujemo s pomoću *zglobne sheme sistema* koju oblikujemo pretvaranjem svih krutih i kruto–zglobnih čvornih veza, uključujući i ležajne, u zglobne. Štapne elemente u shemi smatramo apsolutno krutima. Tu shemu nazivamo i *pridruženom rešetkom*. Zglobna shema sistema sa slike 2.a. prikazana je na slici d.

Broj neovisnih translacijskih pomaka u sistemu jednak je broju stupnjeva slobode zglobne sheme. Analiza geometrijske promjenjivosti/nepromjenjivosti sistema sastavljenih od apsolutno krutih diskova i postupci određivanja broja stupnjeva slobode obrađeni su u *Mehanici 1.* i *Mehanici 2.*, a podsjetiti se možete u poglavljima *Geometrijska promjenljivost i nepromjenljivost sistema* i *Kinematička analiza konstruktivnih sistema* na stranicama 30.–47. udžbenika [65]. Primjenom opisanih postupaka lako je pokazati da „rešetka” sa slike 2.d. ima jedan stupanj slobode, te se tako i formalno dokazuje da je u sistemu prikazanu na slici a. moguć jedan (i samo jedan) neovisan translacijski pomak.

Sisteme ćemo razvrstati u *pomične* i *nepomične*, ovisno o tome jesu li translacijski pomaci mogući ili ne. Jedni i drugi mogu biti *potpuno* ili *djelomice rješivi*. U proračunu nepomičnih sistema nepoznanice su samo kutovi zaokretâ čvorova, dok su u proračunu pomičnih nepoznanice i kutovi zaokretâ i duljine neovisnih translacijskih pomaka. Potpuna rješivost sistema znači da se vrijednosti uzdužnih sila mogu izračunati u svim njegovim elementima. Slijedi da će sistem biti potpuno rješiv ako je njegova zglobna shema statički određena i geometrijski nepromjenjiva ili ako je ta shema mehanizam u užem smislu.

U prikazu inženjerske metode ograničit ćemo se u početku na analizu sistema u kojima su svi čvorovi kruti, a uzet ćemo i da su sve ležajne veze krute; proračun sistema u kojima postoje zglobovi odgodit ćemo do odjeljka 1.4.

## 1.2. Nepomični sistemi

Kao što s pomoću zglobne sheme (slika 3.b.) možemo potvrditi, sistem sa slike 3.a. jest nepomičan: čvor 4 spojen je s podlogom dvama štapovima koji ne leže na istom pravcu, dok je čvor 5 nekolinearnim štapovima spojen s tim nepomičnim čvorom i s podlogom. Nepoznanice su, prema tome, kutovi zaokretâ slobodnih čvorova 4 i 5:  $\varphi_4$  i  $\varphi_5$ . Kako je zglobna shema statički određena, sistem je potpuno rješiv.

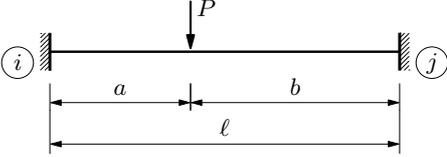
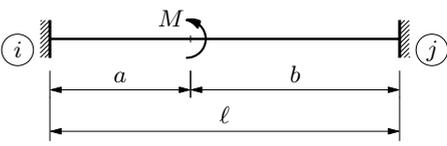
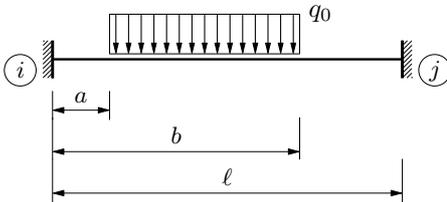
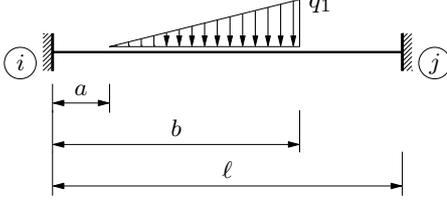
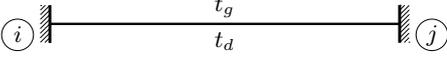
I u proračunu inženjerskom metodom u prvom koraku sprečavamo određene pomake; za nepomične sisteme to znači da dodavanjem momentnih spojeva s podlogom treba spriječiti zaokrete svih krutih čvorova: osnovni je sistem za inženjersku metodu prikazan na slici 3.c.

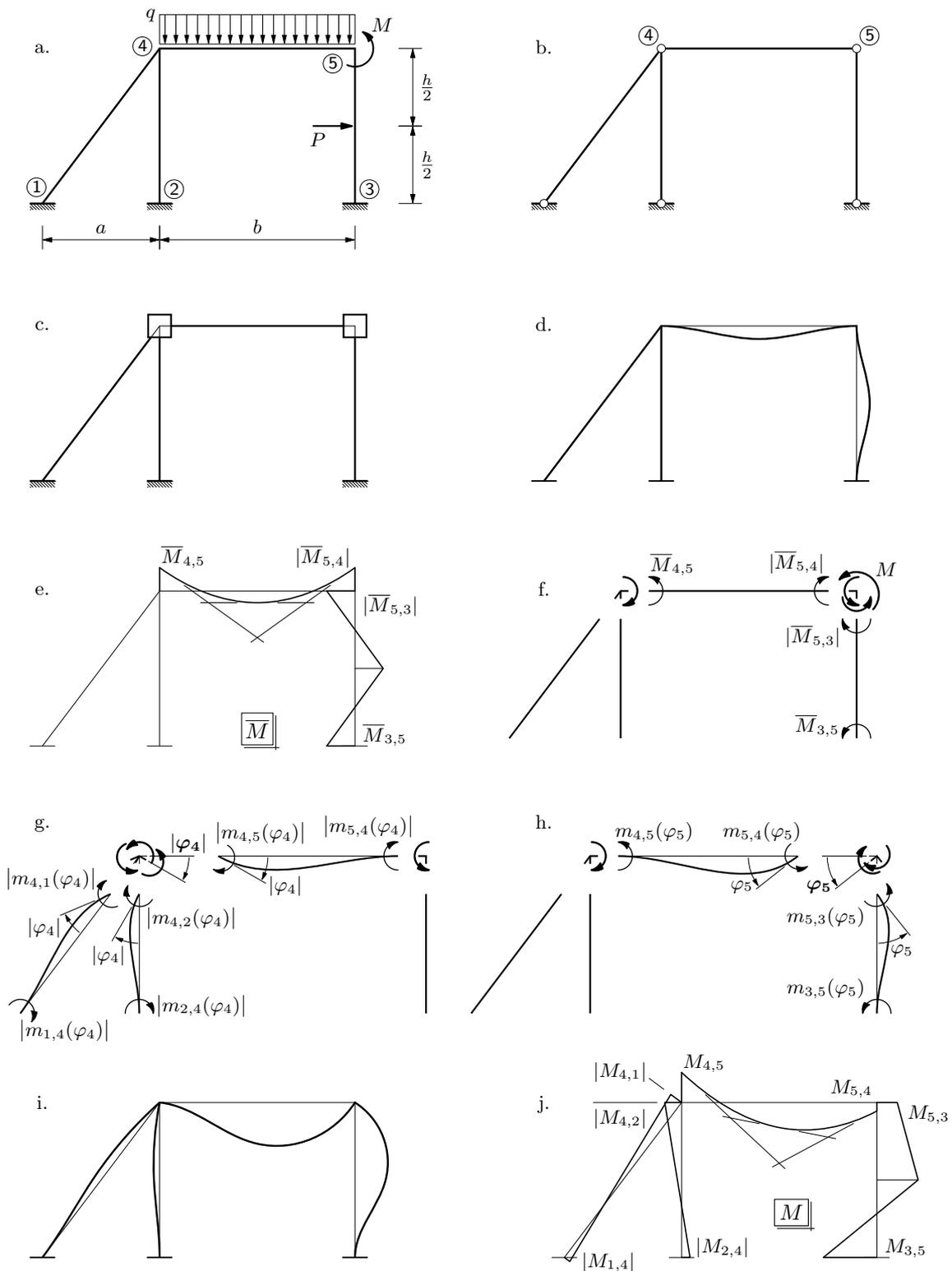
Vrijednosti momenata upetosti na krajevima „obostrano upetih greda”  $\{4,5\}$  i  $\{3,5\}$ , možemo izračunati zavirivanjem u tablicu 1. Neka su, primjerice,  $a = 3\text{ m}$ ,  $b = 5\text{ m}$  i  $h = 4\text{ m}$  te  $q = 20\text{ kN/m}'$ ,  $P = 100\text{ kN}$  i  $M = 50\text{ kNm}$ ; tada su

$$\begin{aligned}\overline{M}_{3,5} &= 50,0\text{ kNm}, & \overline{M}_{5,3} &= -50,0\text{ kNm}, \\ \overline{M}_{4,5} &= 41,7\text{ kNm}, & \overline{M}_{5,4} &= -41,7\text{ kNm}.\end{aligned}$$

Moment upetosti s vrijednošću  $\overline{M}_{4,5}$  reaktivni je moment kojim zamišljeni momentni spoj u čvoru 4 djeluje na gredu  $\{4,5\}$ , pa taj spoj preuzima i prenosi na podlogu moment

Tablica 1. Momenti upetosti

	$\bar{M}_{i,j} = \frac{P a b^2}{\ell^2} \quad \bar{M}_{j,i} = -\frac{P a^2 b}{\ell^2}$ $a = b = \frac{\ell}{2} : \quad \bar{M}_{i,j} = -\bar{M}_{j,i} = \frac{P \ell}{8}$
	$\bar{M}_{i,j} = \frac{M b (3 a - \ell)}{\ell^2}$ $\bar{M}_{j,i} = \frac{M a (3 b - \ell)}{\ell^2}$ $a = b = \frac{\ell}{2} : \quad \bar{M}_{i,j} = \bar{M}_{j,i} = \frac{M}{4}$
	$\bar{M}_{i,j} = q_0 \left[ \frac{b^2 - a^2}{2} - 2 \frac{b^3 - a^3}{3 \ell} + \frac{b^4 - a^4}{4 \ell^2} \right]$ $\bar{M}_{j,i} = q_0 \left[ -\frac{b^3 - a^3}{3 \ell} + \frac{b^4 - a^4}{4 \ell^2} \right]$ $a = 0, \quad b = \ell : \quad \bar{M}_{i,j} = -\bar{M}_{j,i} = \frac{q_0 \ell^2}{12}$ $a = 0, \quad b = \frac{\ell}{2} : \quad \bar{M}_{i,j} = \frac{11 q_0 \ell^2}{192}$ $\bar{M}_{j,i} = -\frac{5 q_0 \ell^2}{192}$
	$\bar{M}_{i,j} = q_1 \gamma [\alpha - 10 \ell \beta + 10 \ell^2 (a + 2 b)]$ $\bar{M}_{j,i} = q_1 \gamma [\alpha - 5 \ell \beta]$ $\alpha = 3 (a^3 + 2 a^2 b + 3 a b^2 + 4 b^3)$ $\beta = a^2 + 2 a b + 3 b^2$ $\gamma = \frac{b - a}{60 \ell^2}$ $a = 0, \quad b = \ell : \quad \bar{M}_{i,j} = \frac{q_1 \ell^2}{30}$ $\bar{M}_{j,i} = -\frac{q_1 \ell^2}{20}$
	$\bar{M}_{i,j} = -\bar{M}_{j,i} = E I \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$ $\Delta t = t_d - t_g$ <p><math>h</math> — visina poprečnoga presjeka</p>



Slika 3.

suprotnoga smisla vrtnje, s vrijednošću, dakle,  $-\overline{M}_{4,5}$ . Isto su tako momenti upetosti s vrijednostima  $\overline{M}_{5,4}$  i  $\overline{M}_{5,3}$  reaktivni momenti kojima momentni spoj u čvoru 5 djeluje na gredu {4,5} i stup {3,5}, tako da taj spoj preuzima momente suprotnih orijentacija,

s vrijednostima  $-\overline{M}_{5,4}$  i  $-\overline{M}_{5,3}$ . Uz to, taj spoj neposredno preuzima i zadani moment vrijednosti  $M$  koji djeluje u čvoru 5.

Dijagram momenata na osnovnom sistemu prikazan je na slici 3.e. Očito je, međutim, da to nije i ne može biti dijagram momenata na izvornom sistemu: u čvorovima 4 i 5 momenti nisu uravnoteženi. Neuravnoteženi momenti, s vrijednostima  $-\overline{M}_{4,5}$  u čvoru 4 i  $-\overline{M}_{5,3} - \overline{M}_{5,4} + M$  u čvoru 5 (slika 3.f.), jednaki su momentima koje zamišljeni momentni spojevi prenose na podlogu — zbrojevima momenata zadanih u čvorovima, ako postoje, i momenata kojima „obostrano upete grede” djeluju, zbog opterećenja na njima, na svoje „ležajeve”.

Kako tih ležajeva u izvornom sistemu nema, neuravnoteženi se momenti ne mogu prenijeti na podlogu. Želimo li da momenti u osnovnom sistemu budu jednaki momentima u izvornom, zamišljeni momentni spojevi ne smiju ništa preuzeti — reaktivne momente treba poništiti. To znači da dodavanje spojeva moramo kompenzirati dodatnim djelovanjima na osnovni sistem: prisilnim zaokretima zamišljenih momentnih spojeva. Naime, kako se u izvornom sistemu čvorovi 4 i 5 mogu slobodno zaokretati, stanje njegovih pomakâ neće biti jednako stanju pomakâ osnovnoga sistema u kojemu su  $\varphi_4 = 0$  i  $\varphi_5 = 0$  (slika 3.d.).

Prisilni zaokreti momentnih spojeva izazvat će u priključenim gredama unutarne sile i reakcije. Zanimat će nas reaktivni momenti (slike 3.g. i h.); njihove su vrijednosti

$$\begin{aligned}
m_{1,4} &= m_{1,4}(\varphi_{4,1}) = 2 k_{\{1,4\}}^f \varphi_{4,1}, \\
m_{4,1} &= m_{4,1}(\varphi_{4,1}) = 4 k_{\{1,4\}}^f \varphi_{4,1}, \\
m_{2,4} &= m_{2,4}(\varphi_{4,2}) = 2 k_{\{2,4\}}^f \varphi_{4,2}, \\
m_{4,2} &= m_{4,2}(\varphi_{4,2}) = 4 k_{\{2,4\}}^f \varphi_{4,2}, \\
m_{4,5} &= m_{4,5}(\varphi_{4,5}) + m_{4,5}(\varphi_{5,4}) = 4 k_{\{4,5\}}^f \varphi_{4,5} + 2 k_{\{4,5\}}^f \varphi_{5,4}, \\
m_{5,4} &= m_{4,5}(\varphi_{4,5}) + m_{4,5}(\varphi_{5,4}) = 2 k_{\{4,5\}}^f \varphi_{4,5} + 4 k_{\{4,5\}}^f \varphi_{5,4}, \\
m_{3,5} &= m_{3,5}(\varphi_{5,3}) = 2 k_{\{3,5\}}^f \varphi_{5,3}, \\
m_{5,3} &= m_{5,3}(\varphi_{5,3}) = 4 k_{\{3,5\}}^f \varphi_{5,3}.
\end{aligned}$$

Izraze smo izveli u [27, odjeljak 12.3.3.]. Budući da je aksijalna krutost  $k_{\{i,j\}}^a$  neizmijerna, u izrazima će ostati samo članovi s fleksijskom krutosti  $k_{\{i,j\}}^f$ , pa ćemo je označavati s  $k_{\{i,j\}}^f$ . Kako se uz to svi krajevi štapova priključenih u čvor  $i$  zaokreću za kut  $\varphi_i$ , umjesto  $\varphi_{i,j}$  pisat ćemo  $\varphi_i$ .

Momenti na krajevima greda zbrojevi su momenata upetosti i momenata izazvanih prisilnim zaokretima čvorova, pa su njihove vrijednosti

$$\begin{aligned}
M_{1,4} &= m_{1,4} = 2 k_{\{1,4\}} \varphi_4, \\
M_{4,1} &= m_{4,1} = 4 k_{\{1,4\}} \varphi_4, \\
M_{2,4} &= m_{2,4} = 2 k_{\{2,4\}} \varphi_4, \\
M_{4,2} &= m_{4,2} = 4 k_{\{2,4\}} \varphi_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{4,5} &= m_{4,5} + \overline{M}_{4,5} = 4 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + 2 k_{\{4,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{4,5}, \\
M_{5,4} &= m_{5,4} + \overline{M}_{5,4} = 2 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + 4 k_{\{4,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{5,4}, \\
M_{3,5} &= m_{3,5} + \overline{M}_{3,5} = 2 k_{\{3,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{3,5}, \\
M_{5,3} &= m_{5,3} + \overline{M}_{5,3} = 4 k_{\{3,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{5,3}.
\end{aligned}$$

Općenito je

$$M_{i,j} = m_{i,j} + \overline{M}_{i,j} = 4 k_{\{i,j\}} \varphi_i + 2 k_{\{i,j\}} \varphi_j + \overline{M}_{i,j}, \quad (1)$$

a momentni spoj u čvoru  $i$  preuzima tada moment vrijednost kojeg je  $-M_{i,j}$ .

Ukupni moment koji zamišljeni spoj u čvoru  $i$  preuzima zbroj je momenata kojima  $i$ -ti krajevi svih priključenih greda djeluju na njega (i, možda, zadanoga momenta koji djeluje neposredno na čvor). No, taj ukupni moment mora, rekosmo, iščeznuti. U našem primjeru to znači

$$\begin{aligned}
-M_{4,1} - M_{4,2} - M_{4,5} &= 0, \\
-M_{5,3} - M_{5,4} + M &= 0,
\end{aligned}$$

odnosno, izrazimo li vrijednosti momenata na krajevima kao funkcije kutova zaokretâ i vrijednosti momenata upetosti,

$$\begin{aligned}
-4 k_{\{1,4\}} \varphi_4 - 4 k_{\{2,4\}} \varphi_4 - [4 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + 2 k_{\{4,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{4,5}] &= 0, \\
-[4 k_{\{3,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{5,3}] - [2 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + 4 k_{\{4,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{5,4}] + M &= 0,
\end{aligned}$$

i, nakon sređivanja, prebacivanja poznatih vrijednosti desno od znakova jednakosti i promjena predznaka,

$$\begin{aligned}
(4 k_{\{1,4\}} + 4 k_{\{2,4\}} + 4 k_{\{4,5\}}) \varphi_4 + 2 k_{\{4,5\}} \varphi_5 &= -\overline{M}_{4,5}, \\
2 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + (4 k_{\{3,5\}} + 4 k_{\{4,5\}}) \varphi_5 &= M - \overline{M}_{5,3} - \overline{M}_{5,4};
\end{aligned}$$

Riječ o sustavu dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, kutovima  $\varphi_4$  i  $\varphi_5$ . Uzmemo li da su  $E_{\{1,4\}} I_{\{1,4\}} = E_{\{2,4\}} I_{\{2,4\}} = E_{\{3,5\}} I_{\{3,5\}} = E_{\{4,5\}} I_{\{4,5\}} = EI$ , bit će

$$k_{\{1,4\}} = \frac{EI}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{EI}{5}, \quad k_{\{2,4\}} = \frac{EI}{4}, \quad k_{\{3,5\}} = \frac{EI}{4} \quad \text{i} \quad k_{\{4,5\}} = \frac{EI}{5}.$$

Uz uvrštavanje tih vrijednosti, vrijednosti momenata upetosti i vrijednosti momenta zadanog u čvoru 5 sustav jednadžbi postaje

$$\begin{aligned}
\frac{13 EI}{5} \varphi_4 + \frac{2 EI}{5} \varphi_5 &= -41,7 \\
\frac{2 EI}{5} \varphi_4 + \frac{9 EI}{5} \varphi_5 &= 141,7,
\end{aligned}$$

a njegova su rješenja

$$\varphi_4 = -\frac{29,15}{EI} \quad \text{i} \quad \varphi_5 = \frac{85,20}{EI}.$$

Dobivene vrijednosti možemo uvrstiti u izraze za vrijednosti momenata na krajevima greda:

$$M_{1,4} = m_{1,4} = 2 k_{\{1,4\}} \varphi_4 = -2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{29,15}{EI} = -11,7 \text{ kNm},$$

$$M_{4,1} = m_{4,1} = 4 k_{\{1,4\}} \varphi_4 = -4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{29,15}{EI} = -23,3 \text{ kNm},$$

$$M_{2,4} = m_{2,4} = 2 k_{\{2,4\}} \varphi_4 = -2 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \frac{29,15}{EI} = -14,6 \text{ kNm},$$

$$M_{4,2} = m_{4,2} = 4 k_{\{2,4\}} \varphi_4 = -4 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \frac{29,15}{EI} = -29,2 \text{ kNm},$$

$$\begin{aligned} M_{4,5} &= m_{4,5} + \overline{M}_{4,5} = 4 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + 2 k_{\{4,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{4,5} \\ &= -4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{29,15}{EI} + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{85,20}{EI} + 41,7 = 52,5 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{5,4} &= m_{5,4} + \overline{M}_{5,4} = 2 k_{\{4,5\}} \varphi_4 + 4 k_{\{4,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{5,4} \\ &= -2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{29,15}{EI} + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{85,20}{EI} - 41,7 = 14,8 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$M_{3,5} = m_{3,5} + \overline{M}_{3,5} = 2 k_{\{3,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{3,5} = 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{85,20}{EI} + 50,0 = 92,6 \text{ kNm},$$

$$M_{5,3} = m_{5,3} + \overline{M}_{5,3} = 4 k_{\{3,5\}} \varphi_5 + \overline{M}_{5,3} = 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{85,20}{EI} - 50,0 = 35,2 \text{ kNm}.$$

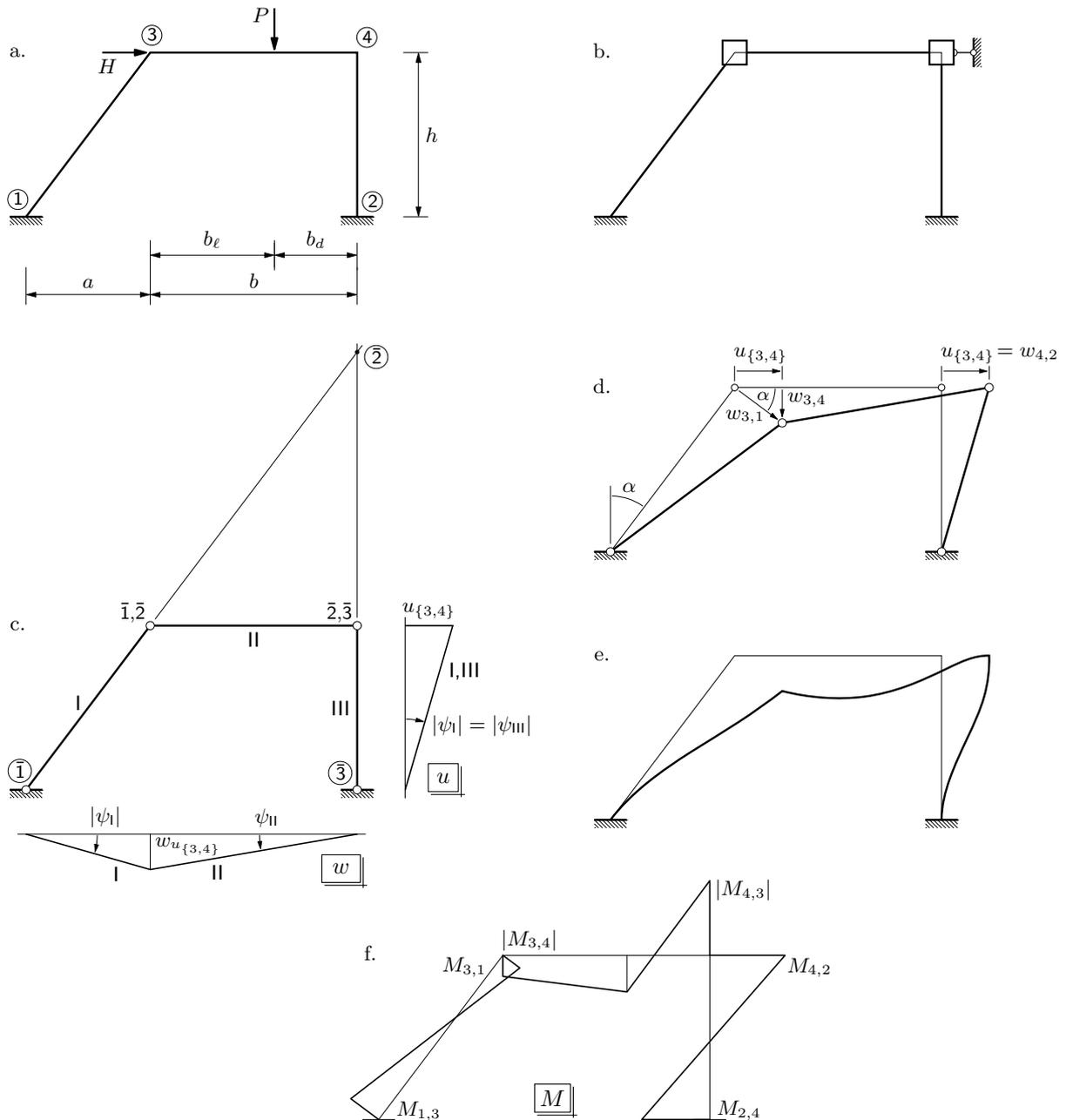
Konačni je momentni dijagram prikazan na slici 3.j. (str. 8.), dok je na slici i. skicirano stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema.

[Nacrtajte dijagrame poprečnih i uzdužnih sila! Riješite zadani sistem i nacrtajte dijagrame ako su  $q = 25 \text{ kN/m}'$ ,  $P = -100 \text{ kN}$ ,  $M = -75 \text{ kNm}$ ,  $E_{\{4,5\}}I_{\{4,5\}} = 8EI$  i  $E_{\{1,4\}}I_{\{1,4\}} = E_{\{2,4\}}I_{\{2,4\}} = E_{\{3,5\}}I_{\{3,5\}} = EI$  te, kao i ranije,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 5 \text{ m}$  i  $h = 4 \text{ m}$ !]

### 1.3. Pomični sistemi

U proračunu pomičnih sistema nepoznanice su osim kutova zaokretâ i orijentirane duljine neovisnih translacijskih pomaka čvorova.

Zglobna shema sistema sa slike 4.a. prikazana je na slici c. Riječ je o četverozglobnu okviru koji je, kao što je iz kinematike poznato, mehanizam s jednim stupnjem slobode — u zadanu je sistemu, prema tome, moguć jedan neovisan translacijski pomak. Na slici 4.c. određeni su i apsolutni polovi krutih tijela od kojih je zglobna shema sastavljena. Ako se tijelo III zarotira oko svoga apsolutnog pola  $\bar{3}$ , točka  $\bar{2}, \bar{3}$  „putovat” će (u okviru teorije malih pomaka) po pravcu okomitom na spojnicu te točke i apsolutnoga pola, u ovom slučaju po horizontalnom pravcu. To je vidljivo u dijagramu horizontalnih projekcija pomakâ na istoj slici i, možda zornije, na slici d. u skici pomakâ nacrtanoj neposredno na zglobnoj shemi. Taj ćemo pomak, čija je duljina označena s  $u_{\{3,4\}}$ , odabrati kao neovisan



Slika 4.

translacijski pomak. Pomaci svih ostalih točaka sada su jednoznačno određeni skicom pomakâ ili dijagramima projekcija pomakâ. Na dijagramu projekcija horizontalnih pomakâ (slika c.) vidimo da će i duljina projekcije pomaka točke  $\bar{1},\bar{2}$  na horizontalni pravac biti  $u_{\{3,4\}}$ , što izriče i *osnovni teorem kinematike krutoga tijela*<sup>5</sup>. Tu smo duljinu označili s  $u_{\{3,4\}}$  jer je to duljina projekcija pomaka točaka  $\bar{1},\bar{2}$  i  $\bar{2},\bar{3}$  koje u zglobojnoj shemi odgovaraju čvorovima 3 i 4 izvornog sistema. (Za neovisan bismo translacijski pomak mogli odabrati i pomak duljina kojega je na slici 4.d. označena s  $w_{3,1}$ . Naime, zarotiramo li

<sup>5</sup> Prisjetite se [78]: projekcije vektorâ brzina bilo kojih dviju točaka nedeformabilnoga tijela na os određenu njihovom spojnicom jednake su.

tijelo I oko apsolutnoga pola  $\bar{1}$ , točka  $\bar{1},\bar{2}$  će se gibati po pravcu okomitom na njegovu os, a to je upravo spomenuti pomak.)

Osim vrijednosti odabranoga neovisnog translacijskog pomaka nepoznanice su i kutovi zaokretâ  $\varphi_3$  i  $\varphi_4$  čvorova 3 i 4. Prema tome, osnovni sistem nastaje dodavanjem veza koje sprečavaju zaokrete čvorova i translacijski pomak (slika 4.b.).

Ako su u sistemu mogući translacijski pomaci, krajevi štapova, nekih ili svih, pomicat će se po pravcima okomitima na njihove osi (skica polja pomaka na slici 4.e.). Na momente na krajevima štapova utjecat će stoga uz zaokrete i ti poprečni translacijski pomaci krajeva [27, odjeljak 12.3.3.]:

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= -6 \frac{k_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} w_{i,j} + 4 k_{\{i,j\}} \varphi_i + 6 \frac{k_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} w_{j,i} + 2 k_{\{i,j\}} \varphi_j, \\ m_{j,i} &= -6 \frac{k_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} w_{i,j} + 2 k_{\{i,j\}} \varphi_i + 6 \frac{k_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} w_{j,i} + 4 k_{\{i,j\}} \varphi_j, \end{aligned}$$

koje i sada možemo sažeti u matični zapis (uz promjenu poretka pribrojnika):

$$\begin{bmatrix} m_{i,j} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = k_{\{i,j\}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6/\ell_{\{i,j\}} & 6/\ell_{\{i,j\}} \\ 2 & 4 & -6/\ell_{\{i,j\}} & 6/\ell_{\{i,j\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ w_{i,j} \\ w_{j,i} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

U inženjerskoj se metodi pomakâ vrijednosti poprečnih pomaka krajeva štapova izražavaju kao funkcije vrijednosti mogućih neovisnih translacijskih pomaka u sistemu.

Predznaci vrijednosti pomaka krajeva ovisit će o izboru lokalnih koordinatnih sustava pojedinih štapova. U indeksnoj oznaci  $(i,j)$  prvi indeks označava kraj štapa u kojemu je ishodište lokalnoga sustava  $\xi\zeta$  te je os  $\xi$  orijentirana od kraja  $i$  prema kraju  $j$ .

Štapove sistema sa slike 4.a. označit ćemo sa  $(1,3)$ ,  $(3,4)$  i  $(2,4)$ . Os  $\xi$  prvoga štapa orijentirana je, dakle, od čvora 1 prema čvoru 3, drugog od 3 prema 4, a trećeg od 2 prema 4. Veze poprečnih pomaka krajeva i neovisnih pomaka nalazimo s pomoću dijagramâ projekcija pomakâ ili skice pomakâ zglobne sheme (slike 4.c. ili d.; prikaz neposredno na shemi, slika d., za tu je zadaću obično pogodniji):

$$\begin{aligned} w_{2,4} &= 0, & w_{4,2} &= u_{\{3,4\}}; \\ w_{3,4} &= \operatorname{tg} \alpha \cdot u_{\{3,4\}} = \frac{a}{h} u_{\{3,4\}}, & w_{4,3} &= 0; \\ w_{1,3} &= 0, & w_{3,1} &= \frac{1}{\cos \alpha} u_{\{3,4\}} = \frac{\ell_{\{1,3\}}}{h} u_{\{3,4\}}. \end{aligned}$$

Momenti na krajevima štapa zbog prisilnih pomaka krajeva sada su:

$$\begin{aligned} m_{1,3} &= k_{\{1,3\}} \left( 2 \varphi_3 - \frac{6}{\ell_{\{1,3\}}} w_{1,3} + \frac{6}{\ell_{\{1,3\}}} w_{3,1} \right) = k_{\{1,3\}} \left( 2 \varphi_3 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right), \\ m_{3,1} &= k_{\{1,3\}} \left( 4 \varphi_3 - \frac{6}{\ell_{\{1,3\}}} w_{1,3} + \frac{6}{\ell_{\{1,3\}}} w_{3,1} \right) = k_{\{1,3\}} \left( 4 \varphi_3 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,4} &= k_{\{3,4\}} \left( 4\varphi_3 + 2\varphi_4 - \frac{6}{\ell_{\{3,4\}}} w_{3,4} + \frac{6}{\ell_{\{3,4\}}} w_{4,3} \right) = k_{\{3,4\}} \left( 4\varphi_3 + 2\varphi_4 - \frac{6a}{bh} u_{\{3,4\}} \right), \\
m_{4,3} &= k_{\{3,4\}} \left( 2\varphi_3 + 4\varphi_4 - \frac{6}{\ell_{\{3,4\}}} w_{3,4} + \frac{6}{\ell_{\{3,4\}}} w_{4,3} \right) = k_{\{3,4\}} \left( 2\varphi_3 + 4\varphi_4 - \frac{6a}{bh} u_{\{3,4\}} \right), \\
m_{2,4} &= k_{\{2,4\}} \left( 2\varphi_4 - \frac{6}{\ell_{\{2,4\}}} w_{2,4} + \frac{6}{\ell_{\{2,4\}}} w_{4,2} \right) = k_{\{2,4\}} \left( 2\varphi_4 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right), \\
m_{4,2} &= k_{\{2,4\}} \left( 4\varphi_4 - \frac{6}{\ell_{\{2,4\}}} w_{2,4} + \frac{6}{\ell_{\{2,4\}}} w_{4,2} \right) = k_{\{2,4\}} \left( 4\varphi_4 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right).
\end{aligned}$$

[Izvedite izraze za momente na krajevima štapova ako ih označimo s (3,1), (4,3) i (4,2)! Za oznake štapova po vašem izboru izvedite izraze za momente na krajevima ako je sistem opisan u globalnom koordinatnom sustavu  $xy$  i ako su lokalni sustavi  $\xi\eta$ ! (Vrijednosti poprečnih pomaka krajeva označavamo tada s  $u_{i,j}$  i  $v_{j,i}$ .)]

Uvođenjem pojma zaokreta štapa kao krutoga tijela izrazi za momente na krajevima i postupak proračuna postaju, po našem mišljenju, preglednijima i jednostavnijima. Po-najprije, predznak kuta zaokreta štapa ne ovisi o izboru početnoga i krajnjeg čvora štapa, to jest o izboru ishodišta lokalnoga koordinatnog sustava.<sup>6</sup>

Lako je vidjeti da vrijednosti  $m_{i,j}$  i  $m_{j,i}$  ne ovise o vrijednostima  $w_{i,j}$  i  $w_{j,i}$  apsolutnih translacijskih pomaka krajeva, već samo o njihovoj razlici  $\Delta w_{i,j} = w_{i,j} - w_{j,i}$ :

$$-6 k_{\{i,j\}} \frac{w_{i,j}}{\ell_{\{i,j\}}} + 6 k_{\{i,j\}} \frac{w_{j,i}}{\ell_{\{i,j\}}} = -6 k_{\{i,j\}} \frac{w_{i,j} - w_{j,i}}{\ell_{\{i,j\}}} = -6 k_{\{i,j\}} \frac{\Delta w_{i,j}}{\ell_{\{i,j\}}}.$$

Kut zaokreta štapa ( $i,j$ ) kao krutoga tijela definiramo izrazom

$$\psi_{(i,j)} = \frac{\Delta w_{i,j}}{\ell_{\{i,j\}}}. \quad (3)$$

Omjerom je, naravno, definiran tangents kuta, ali kako je  $\Delta w_{i,j} \ll \ell_{\{i,j\}}$ , možemo uzeti  $\psi_{(i,j)} \approx \text{tg } \psi_{(i,j)}$ .

Smisao vrtnje ne mijenja se odaberemo li za ishodište lokalnoga koordinatnog sistema umjesto  $i$ -toga kraja kraj  $j$  (slike 5.a. i c. odnosno b. i d.), pa je stoga  $\psi_{(i,j)} = \psi_{(j,i)} = \psi_{\{i,j\}}$ .

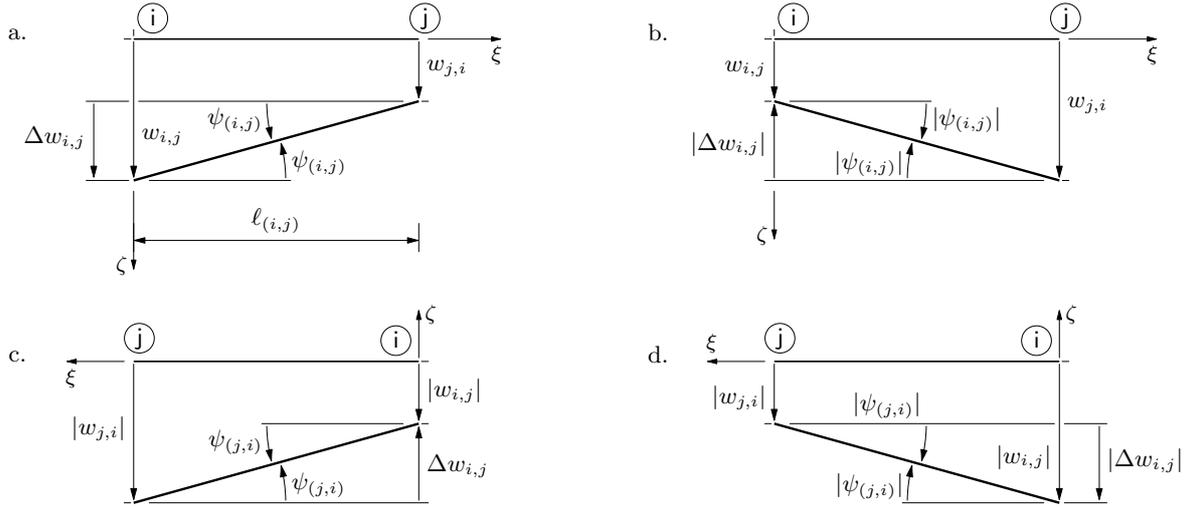
Vrijednosti momenata na krajevima štapa mogu se sada izraziti kao funkcije kutova zaokretâ krajeva i kuta zaokreta štapa kao krutoga tijela:

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= 4 k_{\{i,j\}} \varphi_i + 2 k_{\{i,j\}} \varphi_j - 6 k_{\{i,j\}} \psi_{\{i,j\}}, \\
m_{j,i} &= 2 k_{\{i,j\}} \varphi_i + 4 k_{\{i,j\}} \varphi_j - 6 k_{\{i,j\}} \psi_{\{i,j\}},
\end{aligned}$$

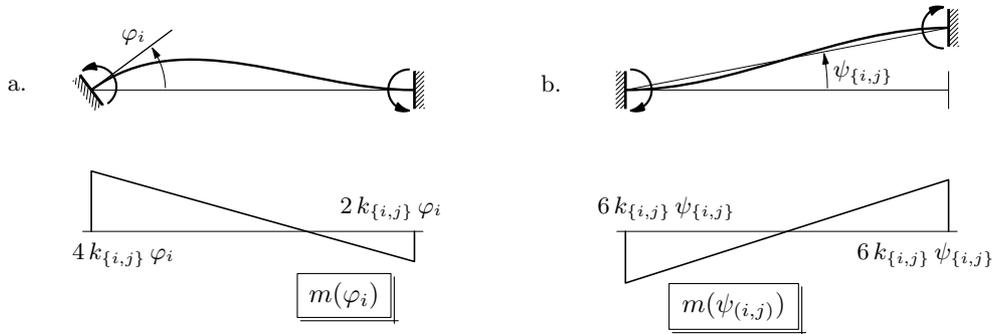
ili, u matričnom zapisu,

$$\begin{bmatrix} m_{i,j} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = k_{\{i,j\}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \psi_{\{i,j\}} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Na slikama 6.a. i b. skicirane su progibne linije i nacrtani dijagrami momenata zbog zaokreta čvora  $i$  i zaokreta štapa kao krutoga tijela.



Slika 5.



Slika 6.

I kutovi zaokretâ štapova kao krutih tijela funkcije su vrijednosti neovisnih translacijskih pomaka. Na dijagramima projekcija pomakâ zglobne sheme (slika 4.c.) možemo očitati:

$$\begin{aligned}\psi_{\{1,3\}} &= \psi_{\text{I}} = -\frac{u_{\{3,4\}}}{h}, \\ \psi_{\{2,4\}} &= \psi_{\text{III}} = -\frac{u_{\{3,4\}}}{h}, \\ \psi_{\{3,4\}} &= \psi_{\text{II}} = \frac{w_{u_{\{3,4\}}}}{b} = -\frac{\psi_{\text{I}} a}{b} = \frac{a u_{\{3,4\}}}{b h}\end{aligned}$$

(dijagrami projekcija pomakâ sada su pogodniji od skice pomakâ).

Vrijednosti ukupnih momenata na krajevima štapova zbrojevi su vrijednosti momenata upetosti i vrijednosti momenata izazvanih zaokretima čvorova i zaokretima štapova,

$$\begin{bmatrix} M_{i,j} \\ M_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{i,j} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{M}_{i,j} \\ \overline{M}_{j,i} \end{bmatrix} = k_{\{i,j\}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \psi_{\{i,j\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{M}_{i,j} \\ \overline{M}_{j,i} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

<sup>6</sup> Može se, štoviše, pokazati da se izrazi ne mijenjaju ni pri promjeni koordinatnoga sustava iz  $\xi\zeta$  u  $\xi\eta$ . [Domaća zadaća!]

pa su u našem primjeru:

$$\begin{aligned}
M_{1,3} &= m_{1,3} = k_{\{1,3\}} (2\varphi_3 - 6\psi_{\{1,3\}}) = k_{\{1,3\}} \left( 2\varphi_3 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right), \\
M_{3,1} &= m_{3,1} = k_{\{1,3\}} (4\varphi_3 - 6\psi_{\{1,3\}}) = k_{\{1,3\}} \left( 4\varphi_3 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right), \\
M_{3,4} &= m_{3,4} + \overline{M}_{3,4} = k_{\{3,4\}} (4\varphi_3 + 2\varphi_4 - 6\psi_{\{3,4\}}) + \overline{M}_{\{3,4\}} \\
&= k_{\{3,4\}} \left( 4\varphi_3 + 2\varphi_4 - \frac{6a}{bh} u_{\{3,4\}} \right) + \overline{M}_{3,4}, \\
M_{4,3} &= m_{4,3} + \overline{M}_{4,3} = k_{\{3,4\}} (2\varphi_3 + 4\varphi_4 - 6\psi_{\{3,4\}}) + \overline{M}_{\{4,3\}} \\
&= k_{\{3,4\}} \left( 2\varphi_3 + 4\varphi_4 - \frac{6a}{bh} u_{\{3,4\}} \right) + \overline{M}_{4,3}, \\
M_{2,4} &= m_{2,4} = k_{\{2,4\}} (2\varphi_4 - 6\psi_{\{2,4\}}) = k_{\{2,4\}} \left( 2\varphi_4 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right), \\
M_{4,2} &= m_{4,2} = k_{\{2,4\}} (4\varphi_4 - 6\psi_{\{2,4\}}) = k_{\{2,4\}} \left( 4\varphi_4 + \frac{6}{h} u_{\{3,4\}} \right).
\end{aligned}$$

Momenti na krajevima štapova izraženi su sada kao funkcije nepoznanica  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  i  $u_{\{3,4\}}$ .  
Jednadžbe ravnoteže čvorova 3 i 4,

$$-M_{3,1} - M_{3,4} = 0 \quad \text{i} \quad -M_{4,2} - M_{4,3} = 0,$$

nakon uvrštavanja tih izraza, promjene predznakâ i sređivanja postaju

$$\begin{aligned}
(4k_{\{1,3\}} + 4k_{\{3,4\}})\varphi_3 + 2k_{\{3,4\}}\varphi_4 + \left( \frac{6k_{\{1,3\}}}{h} - \frac{6ak_{\{3,4\}}}{bh} \right) u_{\{3,4\}} &= -\overline{M}_{3,4}, \\
2k_{\{3,4\}}\varphi_3 + (4k_{\{2,4\}} + 4k_{\{3,4\}})\varphi_4 + \left( \frac{6k_{\{2,4\}}}{h} - \frac{6ak_{\{3,4\}}}{bh} \right) u_{\{3,4\}} &= -\overline{M}_{4,3}.
\end{aligned}$$

Riječ je o sustavu dviju jednadžbi s tri nepoznanice, pa za nalažanje jedinstvenoga rješenja nedostaje jedna jednadžba.

U prethodnom smo odjeljku pokazali da su jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima skriveni izraz zahtjeva za iščezavanjem reaktivnih momenata u zamišljenim momentnim spojevima s podlogom. Za tvorbu osnovnoga sistema za proračun pomičnih sistema uz momentne spojeve dodati treba i veze koje sprečavaju neovisne translacijske pomake (slika 4.b.). Treća će jednadžba proizaći stoga iz zahtjeva za iščezavanjem reaktivne sile u toj vezi, a taj se zahtjev može iskazati i kao neki uvjet ravnoteže pogodno odabranoga dijela sistema.

Često je, međutim, dodatnu jednadžbu (ili dodatne jednadžbe, ima li više neovisnih pomaka) lakše izvesti primjenom *teorema o virtualnim pomacima u mehanici krutih tijela* koji je, znamo, tek alternativni iskaz uvjeta ravnoteže. Podsjećamo: nalaze li se materijalna točka, kruto tijelo ili sistem krutih tijela u ravnotežnu stanju, zbroj radova

aktivnih sila na bilo kojim virtualnim pomacima jednak je nuli, i obratno, i za nas korisnije, ako je ukupni rad aktivnih sila na bilo kojim virtualnim pomacima jednak nuli, tada su točka, kruto tijelo ili sistem u ravnoteži. U mehanici krutih tijela virtualnim se pomacima nazivaju zamišljeni „dovoljno mali” pomaci omogućeni vezama u sistemu.

Pri primjeni teorema o virtualnim pomacima raskidanjem veza geometrijski nepromjenjivi sistem pretvaramo u mehanizam, a sile što su ih te veze prenosile nanosimo kao aktivne sile koje rade na omogućenim pomacima svojih hvatišta. Zglobna je shema mehanizam s jednim stupnjem slobode. Na njega uz zadane sile djeluju i momenti na krajevima štapova — umetanjem zglobova raskinuli smo veze koje prenose te momente, pa ih treba kao opterećenje nanijeti na nastali mehanizam. Sistem je u ravnoteži ako (i samo ako) je ukupni rad tih momenata i zadanih sila na bilo kojemu skupu virtualnih zaokreta i virtualnih pomaka jednak nuli.

Neovisni translacijski pomak, duljinu kojega ćemo sada označiti s  $\delta u_{\{3,4\}}$ , odredbeni je pomak polja virtualnih pomaka, pa su, prema dijagramu projekcija pomaka sa slike 4.c. (stranica 12.), dodamo li oznakama svih kutova i duljina oznaku virtualnosti  $\delta$ ,

$$\begin{aligned}\delta\psi_{\{1,3\}} &= \delta\psi_I = -\frac{\delta u_{\{3,4\}}}{h}, \\ \delta\psi_{\{2,4\}} &= \delta\psi_{III} = -\frac{\delta u_{\{3,4\}}}{h}, \\ \delta\psi_{\{3,4\}} &= \delta\psi_{II} = \frac{a \delta u_{\{3,4\}}}{b h}.\end{aligned}$$

Vrijednosti su virtualnih pomaka hvatištâ sila  $\vec{H}$  i  $\vec{P}$  po pravcima njihova djelovanja:

$$\begin{aligned}\delta u_H &= \delta u_{\{3,4\}}, \\ \delta w_P &= \frac{b_d}{b} \delta w_{\delta u_{\{3,4\}}}^{\{1\}} = \frac{a b_d \delta u_{\{3,4\}}}{b h}.\end{aligned}$$

Ukupni je rad svih momenata i svih sila na tim virtualnim zaokretima i pomacima

$$\begin{aligned}(M_{1,3} + M_{3,1}) \delta\psi_{\{1,3\}} + (M_{2,4} + M_{4,2}) \delta\psi_{\{2,4\}} + (M_{3,4} + M_{4,3}) \delta\psi_{\{3,4\}} \\ + P \delta w_P + H \delta u_H = 0.\end{aligned}$$

Uvrstimo li izvedene izraze za vrijednosti momenata na krajevima štapova, za vrijednosti virtualnih pomaka i za kutove virtualnih zaokreta, dobit ćemo

$$\begin{aligned}k_{\{1,3\}} \left[ 6 \varphi_3 + \frac{12}{h} u_{\{3,4\}} \right] \left( -\frac{1}{h} \delta u_{\{3,4\}} \right) + k_{\{2,4\}} \left[ 6 \varphi_4 + \frac{12}{h} u_{\{3,4\}} \right] \left( -\frac{1}{h} \delta u_{\{3,4\}} \right) \\ + \left[ k_{\{3,4\}} \left[ 6 \varphi_3 + 6 \varphi_4 - \frac{12 a}{b h} u_{\{3,4\}} \right] + (\bar{M}_{3,4} + \bar{M}_{4,3}) \right] \left( \frac{a}{b h} \delta u_{\{3,4\}} \right) \\ + P \frac{a b_d}{b h} \delta u_{\{3,4\}} + H \delta u_{\{3,4\}} = 0,\end{aligned}$$

odnosno

$$\left[ -\frac{k_{\{1,3\}}}{h} \left( 6\varphi_3 + \frac{12}{h} u_{\{3,4\}} \right) - \frac{k_{\{2,4\}}}{h} \left( 6\varphi_4 + \frac{12}{h} u_{\{3,4\}} \right) + \frac{a k_{\{3,4\}}}{b h} \left( 6\varphi_3 + 6\varphi_4 - \frac{12 a}{b h} u_{\{3,4\}} \right) + \frac{a}{b h} (\overline{M}_{3,4} + \overline{M}_{4,3}) + \frac{a b_d}{b h} P + H \right] \delta u_{\{3,4\}} = 0.$$

Jednakost mora vrijediti za bilo koji  $\delta u_{\{3,4\}}$ , što je moguće samo ako je podizraz u uglatim zagradama jednak nuli. Nakon izdvajanja nepoznanica, prebacivanja poznatih vrijednosti iza znaka jednakosti i množenja cijeloga izraza s  $-1$  dobit ćemo

$$\begin{aligned} & \left( \frac{6 k_{\{1,3\}}}{h} - \frac{6 a k_{\{3,4\}}}{b h} \right) \varphi_3 + \left( \frac{6 k_{\{2,4\}}}{h} - \frac{6 a k_{\{3,4\}}}{b h} \right) \varphi_4 \\ & + \left( \frac{12 k_{\{1,3\}}}{h^2} + \frac{12 k_{\{2,4\}}}{h^2} + \frac{12 a^2 k_{\{3,4\}}}{b^2 h^2} \right) u_{\{3,4\}} \\ & = \frac{a}{b h} (\overline{M}_{3,4} + \overline{M}_{4,3}) + P \frac{a b_d}{b h} + H. \end{aligned}$$

Napišemo li cijeli sustav jednadžbi u matricnom obliku,

$$\begin{bmatrix} 4 k_{\{1,3\}} + 4 k_{\{3,4\}} & 2 k_{\{3,4\}} & \frac{6 k_{\{1,3\}}}{h} - \frac{6 a k_{\{3,4\}}}{b h} \\ 2 k_{\{3,4\}} & 4 k_{\{2,4\}} + 4 k_{\{3,4\}} & \frac{6 k_{\{2,4\}}}{h} - \frac{6 a k_{\{3,4\}}}{b h} \\ \frac{6 k_{\{1,3\}}}{h} - \frac{6 a k_{\{3,4\}}}{b h} & \frac{6 k_{\{2,4\}}}{h} - \frac{6 a k_{\{3,4\}}}{b h} & \frac{12 k_{\{1,3\}}}{h^2} + \frac{12 k_{\{2,4\}}}{h^2} + \frac{12 a^2 k_{\{3,4\}}}{b^2 h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ u_{\{3,4\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{M}_{3,4} \\ -\overline{M}_{4,3} \\ \frac{a}{b h} (\overline{M}_{3,4} + \overline{M}_{4,3}) + P \frac{a b_d}{b h} + H \end{bmatrix},$$

vidjet ćemo da je matrica sustava simetrična, a može se pokazati i da je pozitivno definitna.

Rješavanje sustava daje vrijednosti nepoznanica  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  i  $u_{\{3,4\}}$ . Uvrstimo li te vrijednosti i vrijednosti momenata upetosti u izraze za ukupne vrijednosti momenata na krajevima štapova, dobit ćemo i vrijednosti tih momenata.

Primjerice, neka su  $a = 3\text{ m}$ ,  $b_\ell = 3\text{ m}$ ,  $b_d = 2\text{ m}$ ,  $h = 4\text{ m}$  i  $EI = 156\,250\text{ kNm}^2$ ; fleksijske krutosti štapova tada su:

$$k_{\{1,3\}} = 31\,250,0\text{ kNm}, \quad k_{\{2,4\}} = 39\,062,5\text{ kNm}, \quad k_{\{3,4\}} = 31\,250,0\text{ kNm}.$$

Ako je, nadalje,  $P = 100$  kN, vrijednosti su momenata upetosti (tablica 1., stranica 7.)

$$\bar{M}_{3,4} = \frac{P b_\ell b_d^2}{b^2} = 48,0 \text{ kNm} \quad \text{i} \quad \bar{M}_{4,3} = -\frac{P b_\ell^2 b_d}{b^2} = -72,0 \text{ kNm}.$$

Vrijednost sile  $\vec{H}$ ,  $H = 75$  kN, ulazi samo u jednadžbu virtualnoga rada.

Za navedene je vrijednosti sustav jednadžbi, matrično,

$$\begin{bmatrix} 250\,000,00 & 62\,500,00 & 18\,750,00 \\ 62\,500,00 & 281\,250,00 & 30\,468,75 \\ 18\,750,00 & 30\,468,75 & 61\,171,875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ u_{\{3,4\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48,0 \\ 72,0 \\ 101,4 \end{bmatrix}.$$

Njegovo je rješenje

$$\varphi_3 = -3,569 \cdot 10^{-4}, \quad \varphi_4 = 1,521 \cdot 10^{-4} \quad \text{i} \quad u_{\{3,4\}} = 0,00169 \text{ m},$$

pa su konačne vrijednosti momenata na krajevima štapova:

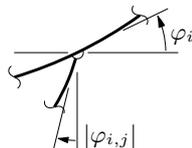
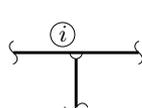
$$\begin{aligned} M_{1,3} &= 56,97 \text{ kNm}, \\ M_{3,1} &= 34,67 \text{ kNm}, \\ M_{3,4} &= -34,67 \text{ kNm}, \\ M_{4,3} &= -122,86 \text{ kNm}, \\ M_{2,4} &= 110,98 \text{ kNm}, \\ M_{4,2} &= 122,86 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Sada možemo nacrtati i konačni momentni dijagram: slika 4.f. na stranici 12.

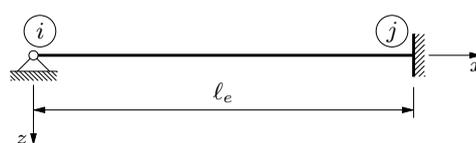
## 1.4. Zglobovi i statička kondenzacija

U dosadašnjemu izlaganju metode pomakâ ograničili smo se na sisteme u kojima su sve veze između štapova i sve vanjske veze krute. Elementi od kojih je sastavljen osnovni sistem tada su obostrano upete grede, a pomaci i zaokreti krajeva štapova jednaki su pomacima i zaokretima čvorova u koje su priključeni.

Ako je štap  $\{i, j\}$  sa čvorom  $i$  spojen zglibno,  $i$ -ti kraj štapa i čvor  $i$  mogu se neovisno zaokretati (slika 7.), pa zaokret kraja neće biti jednak zaokretu čvora:  $\varphi_{i,j} \neq \varphi_i$ .



Slika 7.



Slika 8.

Ako je drugi kraj štapa krutom vezom priključen u čvor  $j$ , odgovarajući će element osnovnoga sistema biti jednostrano upeta greda (slika 8.). Izrazi za vrijednosti momenata

upetosti i za vrijednosti momenata od prisilnih pomaka „ležajeva” na upetom kraju mogu se i sada izvesti metodom sila [domaća zadaća!] ili rješavanjem diferencijalne jednadžbe progibne linije uz odgovarajuće rubne uvjete [navedite ih!].

No, za izvod se mogu iskoristiti i već poznati izrazi (5) na stranici 15. za vrijednosti momenata na krajevima obostrano upete grede. Kako  $\varphi_{i,j} \neq \varphi_i$ , u te izraze treba umjesto  $\varphi_i$  uvrstiti  $\varphi_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= k_{\{i,j\}} (4\varphi_{i,j} + 2\varphi_j - 6\psi_{\{i,j\}}) + \overline{M}_{i,j}, \\ M_{j,i} &= k_{\{i,j\}} (2\varphi_{i,j} + 4\varphi_j - 6\psi_{\{i,j\}}) + \overline{M}_{j,i}. \end{aligned}$$

Ali kut  $\varphi_{i,j}$  neće biti nepoznanica u sustavu jednadžbi ravnoteže — nepoznanice su samo kutovi zaokretâ čvorova, jer je riječ o ravnoteži čvorova. Treba ga stoga ukloniti iz izrazâ. Budući da je na  $i$ -tomu kraju štapa zglob, znamo da je  $M_{i,j} = 0$ . Iz prvoga izraza možemo stoga „izvući”  $\varphi_{i,j}$ :

$$\varphi_{i,j} = -\frac{1}{2}\varphi_j + \frac{3}{2}\psi_{\{i,j\}} - \frac{\overline{M}_{i,j}}{4k_{\{i,j\}}}.$$

Uvrštavanje u drugi izraz daje

$$M_{j,i} = k_{\{i,j\}} (3\varphi_j - 3\psi_{\{i,j\}}) + \overline{M}_{j,i} - \frac{1}{2}\overline{M}_{i,j}. \quad (6)$$

Uvest ćemo oznake

$$m_{j,i}^c = k_{\{i,j\}} (3\varphi_j - 3\psi_{\{i,j\}}), \quad (7)$$

$$\overline{M}_{j,i}^c = \overline{M}_{j,i} - \frac{1}{2}\overline{M}_{i,j}. \quad (8)$$

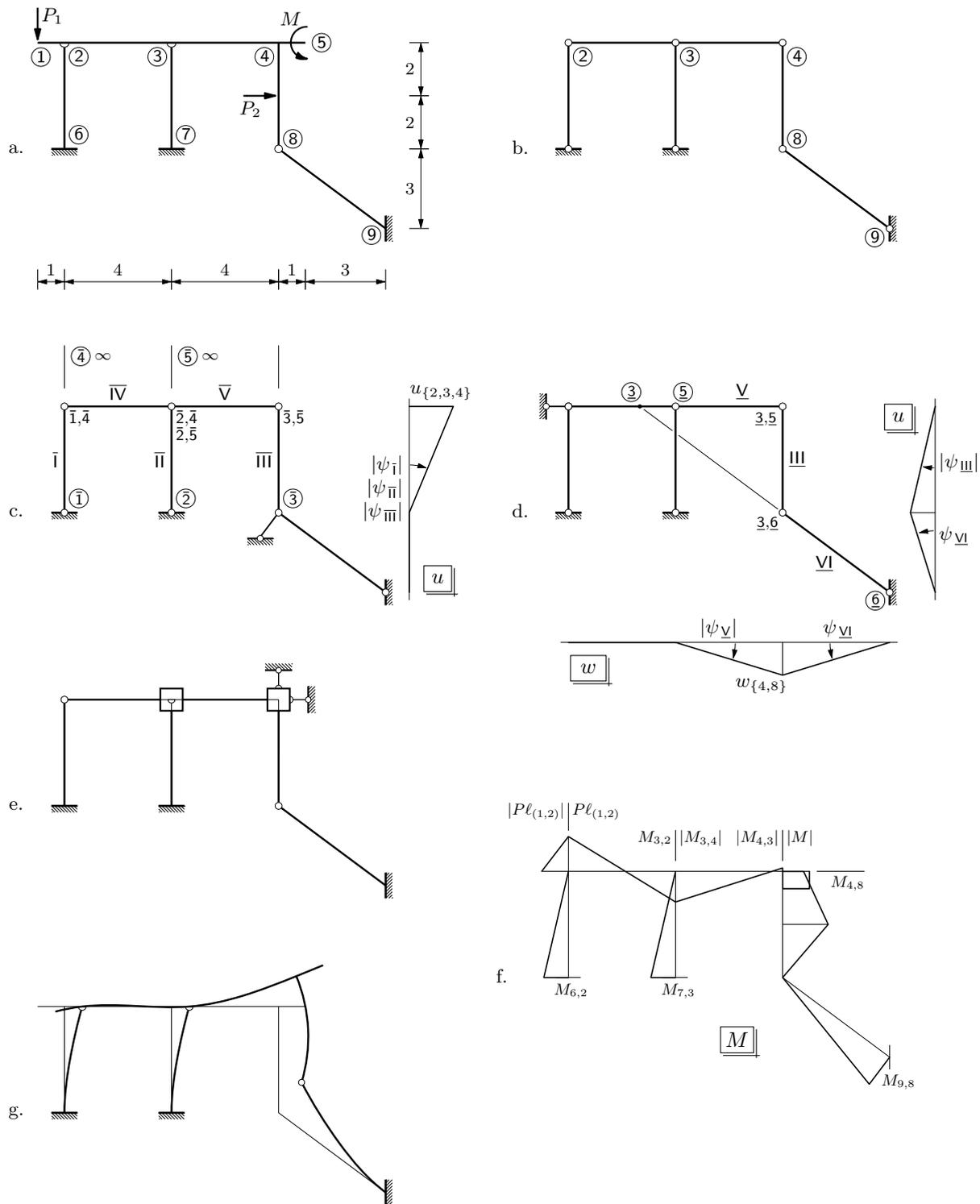
Opisani postupak nazivamo *statičkom kondenzacijom*: izraze za vrijednosti momenata na krajevima štapa saželi<sup>7</sup> smo primjenjujući statički uvjet — poznatu vrijednost momenta na jednome kraju. [Statičkom kondenzacijom izvedite izraz za  $m_{j,i}^c$  ako su  $m_{i,j}$  i  $m_{j,i}$  dani izrazom (2) na stranici 13!]

Uz potanji opis načina uvođenja zglobnih veza u proračun, u sljedećem, ponešto opsežnijem primjeru osvrnut ćemo se usput na još neke proračunske pojedinosti. Na slici 9.a. prikazan je zadani sistem. [Koliko je puta statički neodređen?]

Prvi je korak u rješavanju utvrđivanje nepoznanica. Započnimo s kutovima zaokretâ. Čvorovi 6, 7 i 9 upeti su ležajevi, pa su njihovi zaokreti i pomaci poznati. Budući da su u čvor 8 oba štapa priključena zglobno, riječ je o zglobnom čvoru; kutovi zaokretâ  $\varphi_{8,4}$  i  $\varphi_{8,9}$  priključenih krajeva štapova su, doduše, nepoznati, ali znamo da su  $M_{8,4} = M_{8,9} = 0$ . Čvorovi 1 i 5 na krajevima su prepustâ; kutovi  $\varphi_{1,2}$  i  $\varphi_{5,4}$  zaokretâ tih krajeva nepoznati su, ali su i na njima vrijednosti momenata poznate:  $M_{1,2} = 0$  i  $M_{5,4} = M$ .

Štapovi {1,2} i {2,3} priključeni su u čvor 2 krutim vezama, dok je štap {2,6} priključen zglobno. Taj je čvor mješoviti kruto–zglobni čvor, no vrijednosti su momenata na svim priključenim krajevima štapova poznati: na kraju zglobno priključena štapa {2,6} mora biti  $M_{2,6} = 0$ , na „upetu” kraju prepusta {1,2} vrijednost momenta je  $M_{2,1} = -P_1 \ell_{(1,2)}$ , a iz uvjeta ravnoteže momenata u čvoru neposredno slijedi da je na kraju 2 štapa {2,3} vri-

<sup>7</sup> Kondenzacija je, prema ANIĆEVU *Velikom rječniku hrvatskoga jezika*, zgušnjavanje, sabijanje, sažimanje.



Slika 9.

jednost momenta  $M_{2,3} = -M_{2,1} = P_1 \ell_{(1,2)}$ . Čvor 2 možemo stoga smatrati zglobnim čvorom u kojemu se sastaju samo štapovi  $\{2,6\}$  i  $\{2,3\}$ , pri čemu je štap  $\{2,3\}$  na „zglobnom” kraju opterećen koncentriranim momentom čija je vrijednost  $M_{2,3} = P_1 \ell_{(1,2)}$ . Kako bi „novo” djelovanje bilo statički ekvivalentno „starome”, silu  $\vec{P}_1$  treba još prenijeti u čvor 2.

I u čvor 3 dva su štapa,  $\{2,3\}$  i  $\{3,4\}$ , spojena krutim vezama, a jedan,  $\{3,7\}$ , zgloбно. Kako je  $M_{3,7} = 0$ , znamo da mora biti  $M_{3,2} + M_{3,4} = 0$  odnosno  $M_{3,2} = -M_{3,4}$ , ali nam vrijednosti tih momenata nisu poznate, pa će kut zaokreta  $\varphi_3$  biti nepoznanica; pritom su  $\varphi_{3,2} = \varphi_{3,4} = \varphi_3$ , ali je  $\varphi_{3,7} \neq \varphi_3$ .

Ostaje čvor 4. U njega su sva tri štapa priključena krutim vezama; vrijednost  $M_{4,5}$  je, doduše, poznata, ali  $M_{4,3}$  i  $M_{4,8}$  nisu, te je očito riječ o krutom čvoru. Kut zaokreta  $\varphi_4$  bit će stoga druga nepoznanica. Moment  $\vec{M}$  koji djeluje na slobodnom kraju prepusta  $\{4,5\}$  možemo prenijeti neposredno u čvor 4 i njegovu vrijednost uvesti u jednadžbu ravnoteže momenata umjesto vrijednosti  $M_{4,5}$ .

Primjer pokazuje da se utvrđivanje kutova zaokretâ koje treba proglasiti nepoznaticama ne svodi na puko prebrojavanje krutih i kruto-zglobnih čvorova, no taj je zadatak ipak razmjerno lako rješiv. Utvrđivanje neovisnih translacijskih pomaka katkada je nešto složenije. Zglobna shema zadanoga sistema prikazana je na slici 9.b. Zglobni štapovi koji odgovaraju štapovima  $\{1,2\}$  i  $\{4,5\}$  nisu nacrtani—prepusti su statički određene podkonstrukcije čija su djelovanja na ostatak sistema poznata, pa ćemo u nastavku proračuna prepuste zamijeniti tim djelovanjima. Zglobna shema sadrži četiri čvora i šest štapova, te je

$$S_{\min} = n \cdot 2 - b = 4 \cdot 2 - 6 = 2;$$

zglobna shema, dakle, ima barem dva stupnja slobode.

Svi su čvorovi samo s po jednim zglobnim štapom spojeni s podlogom. Čvor 8, primjerice, može se zbog toga početi gibati po pravcu okomitom na štap  $\{8,9\}$ . Spojimo li ga s podlogom još jednim štapom koji ne leži na pravcu štapa  $\{8,9\}$ , postat će nepomičnim (slika 9.c.), a za dobivenu će shemu biti  $S = 4 \cdot 2 - 7 = 1$ . Lako je vidjeti da je u toj shemi moguć jedino zajednički horizontalni pomak čvorova 2, 3 i 4, pa je zaista riječ o mehanizmu s jednim stupnjem slobode. Na slici c. pronađeni su trenutni apsolutni polovi svih tijela od kojih je taj mehanizam sastavljen i nacrtan je dijagram horizontalnih projekcija pomakâ. Duljinu zajedničkoga pomaka čvorova označili smo s  $u_{\{2,3,4\}}$ . Taj je pomak jedan od neovisnih translacijskih pomaka u sistemu, pa je njegova duljina nepoznanica u proračunu inženjerskom metodom pomakâ.

Drugi neovisni pomak odredit ćemo tako da uklonimo prethodno dodani štap i novim štapom spriječimo prvi pomak—na primjer, čvor 2 možemo horizontalnim štapom spojiti s podlogom. Time čvorovi 2 i 3 postaju nepomičnima. [Zašto i čvor 3?] Preostali je dio sheme mehanizam s jednim stupnjem slobode—četverozglobni okvir, pa možemo naći trenutne apsolutne polove svih tijela i nacrtati dijagrame projekcija pomakâ (slika 9.d.). Za drugi neovisni translacijski pomak odabrat ćemo zajednički vertikalni pomak čvorova 4 i 8 čija je duljina na slici označena s  $w_{\{4,8\}}$ . Ta će duljina biti četvrta nepoznanica u proračunu.

Da zaključimo: nepoznanice su kutovi zaokreta  $\varphi_3$  i  $\varphi_4$  te duljine  $u_{\{2,3,4\}}$  i  $w_{\{4,8\}}$  neovisnih translacijskih pomaka. Osnovni sistem za proračun inženjerskom metodom pomaka prikazan je na slici 9.e. Obje veze koje sprečavaju neovisne translacijske pomake premjestili smo u čvor 4. [Zašto to smijemo uraditi? I zašto kosi štap sa slike c. smijemo zamijeniti vertikalnim?]

Uvjeti ravnoteže momenata u čvorovima 3 i 4 daju dvije jednadžbe za izračunavanje vrijednosti nepoznanica:

$$\begin{aligned} -M_{3,2} - M_{3,4} &= 0, \\ -M_{4,3} - M_{4,8} + M &= 0. \end{aligned}$$

Druge su dvije jednadžbe jednadžbe radova na poljima virtualnih pomaka sa slika 9.c. i d.:

$$\begin{aligned} M_{6,2} \delta\psi_{\text{I}} + M_{7,3} \delta\psi_{\text{II}} + M_{4,8} \delta\psi_{\text{III}} + P_2 \delta\bar{u}_2 &= 0, \\ (M_{3,4} + M_{4,3}) \psi_{\text{V}} + M_{4,8} \delta\psi_{\text{III}} + M_{9,8} \delta\psi_{\text{VI}} + P_2 \delta\bar{u}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Određbeni su pomaci poljâ virtualnih pomaka neovisni translacijski pomaci. Označimo li njihove duljine s  $\delta u_{\{2,3,4\}}$  i  $\delta w_{\{4,8\}}$ , bit će, prema slici 9.c., uz dodane oznake virtualnosti,

$$\delta\psi_{\text{I}} = \delta\psi_{\text{II}} = \delta\psi_{\text{III}} = -\frac{1}{4} \delta u_{\{2,3,4\}},$$

te, prema slici 9.d.,

$$\delta\psi_{\text{VI}} = -\delta\psi_{\text{V}} = \frac{1}{4} \delta w_{\{4,8\}} \quad \text{i} \quad \delta\psi_{\text{III}} = -\frac{3}{4} \delta\psi_{\text{VI}} = -\frac{3}{16} \delta w_{\{4,8\}}.$$

Sila  $\vec{P}_2$  radi na pomacima čije su duljine

$$\delta\bar{u}_2 = -\delta\psi_{\text{III}} \cdot 2 = \frac{1}{2} \delta u_{\{2,3,4\}} \quad \text{i} \quad \delta\bar{u}_2 = \delta\psi_{\text{III}} \cdot 2 = -\frac{3}{8} \delta w_{\{4,8\}}.$$

U drugomu je mehanizmu zglob što odgovara čvoru 2, u koji smo premjestili silu  $\vec{P}_1$ , nepomičan, a u prvome se pak mehanizmu odgovarajući zglob može gibati samo po horizontalnom pravcu, dakle, po pravcu okomitu na pravac djelovanja te sile, pa ona ne radi. Moment  $\vec{M}$  smo s kraja prepusta prenijeli u čvor 4. U tvorbi mehanizama čvorovi se pretvaraju u zglobove koji se ne zaokreću (zaokreću se štapovi priključeni u njih), te ni moment  $\vec{M}$  ne radi.

U jednadžbama ravnoteže i jednadžbama rada vrijednosti momenata na krajevima štapova treba izraziti kao funkcije nepoznanica —kutova zaokretâ čvorova i duljina neovisnih translacijskih pomaka — dodajući, postoje li, i vrijednosti momenata upetosti. Prvo ćemo vrijednosti momenata na krajevima izraziti kao funkcije kutova zaokretâ krajeva — koji su, kao što znamo, jednaki kutovima zaokretâ krutih čvorova i krutih spojeva u kruto-zglobnim čvorovima — i kutova zaokretâ štapova kao krutih tijela:

$$\begin{aligned} M_{3,2} &= m_{3,2}^c + \bar{M}_{3,2}^c = 3k_{\{2,3\}} \varphi_3 + \bar{M}_{3,2}^c, \\ M_{3,4} &= m_{3,4} = 4k_{\{3,4\}} \varphi_3 + 2k_{\{3,4\}} \varphi_4 - 6k_{\{3,4\}} \psi_{\{3,4\}}, \\ M_{4,3} &= m_{4,3} = 2k_{\{3,4\}} \varphi_3 + 4k_{\{3,4\}} \varphi_4 - 6k_{\{3,4\}} \psi_{\{3,4\}}, \\ M_{6,2} &= m_{6,2}^c = -3k_{\{2,6\}} \psi_{\{2,6\}}, \\ M_{7,3} &= m_{7,3}^c = -3k_{\{3,7\}} \psi_{\{3,7\}}, \end{aligned}$$

$$M_{4,8} = m_{4,8}^c + \overline{M}_{4,8}^c = 3 k_{\{4,8\}} \varphi_4 - 3 k_{\{4,8\}} \psi_{\{4,8\}} + \overline{M}_{4,8}^c,$$

$$M_{9,8} = m_{9,8}^c = -3 k_{\{8,9\}} \psi_{\{8,9\}}.$$

Kutovi zaokreta štapova funkcije su vrijednosti translacijskih pomaka čvorova (slike 9.c. i d.):

$$\psi_{\{3,4\}} = \psi_{\underline{\text{V}}} = -\frac{1}{4} w_{\{4,8\}},$$

$$\psi_{\{2,6\}} = \psi_{\underline{\text{I}}} = -\frac{1}{4} u_{\{2,3,4\}},$$

$$\psi_{\{3,7\}} = \psi_{\underline{\text{II}}} = -\frac{1}{4} u_{\{2,3,4\}},$$

$$\psi_{\{4,8\}} = \psi_{\underline{\text{III}}} + \psi_{\underline{\text{III}}} = -\frac{1}{4} u_{\{2,3,4\}} - \frac{3}{16} w_{\{4,8\}},$$

$$\psi_{\{8,9\}} = \psi_{\underline{\text{VI}}} = \frac{1}{4} w_{\{4,8\}},$$

pa uvrštavanje u izraze za vrijednosti momenata daje:

$$M_{3,2} = 3 k_{\{2,3\}} \varphi_3 + \overline{M}_{3,2}^c,$$

$$M_{3,4} = 4 k_{\{3,4\}} \varphi_3 + 2 k_{\{3,4\}} \varphi_4 + \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} w_{\{4,8\}},$$

$$M_{4,3} = 2 k_{\{3,4\}} \varphi_3 + 4 k_{\{3,4\}} \varphi_4 + \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} w_{\{4,8\}},$$

$$M_{6,2} = \frac{3}{4} k_{\{2,6\}} u_{\{2,3,4\}},$$

$$M_{7,3} = \frac{3}{4} k_{\{3,7\}} u_{\{2,3,4\}},$$

$$M_{4,8} = 3 k_{\{4,8\}} \varphi_4 + \frac{3}{4} k_{\{4,8\}} u_{\{2,3,4\}} + \frac{9}{16} k_{\{4,8\}} w_{\{4,8\}} + \overline{M}_{4,8}^c,$$

$$M_{9,8} = -\frac{3}{4} k_{\{8,9\}} w_{\{4,8\}}.$$

Uvrstimo li te izraze u jednadžbe ravnoteže i jednadžbe rada, nakon sređivanja dobivamo sustav:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ u_{\{2,3,4\}} \\ w_{\{4,8\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

u kojemu su:

$$a_{1,1} = 3 k_{\{2,3\}} + 4 k_{\{3,4\}},$$

$$a_{1,2} = a_{2,1} = 2 k_{\{3,4\}},$$

$$a_{1,3} = a_{3,1} = 0,$$

$$a_{1,4} = a_{4,1} = \frac{3}{2} k_{\{3,4\}},$$

$$\begin{aligned}
a_{2,2} &= 4 k_{\{3,4\}} + 3 k_{\{4,8\}}, \\
a_{2,3} &= a_{3,2} = \frac{3}{4} k_{\{4,8\}}, \\
a_{2,4} &= a_{4,2} = \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} + \frac{9}{16} k_{\{4,8\}}, \\
a_{3,3} &= \frac{3}{16} k_{\{2,6\}} + \frac{3}{16} k_{\{3,7\}} + \frac{3}{16} k_{\{4,8\}}, \\
a_{3,4} &= a_{4,3} = \frac{9}{64} k_{\{4,8\}}, \\
a_{4,4} &= \frac{3}{4} k_{\{3,4\}} + \frac{27}{256} k_{\{4,8\}} + \frac{3}{16} k_{\{8,9\}}
\end{aligned}$$

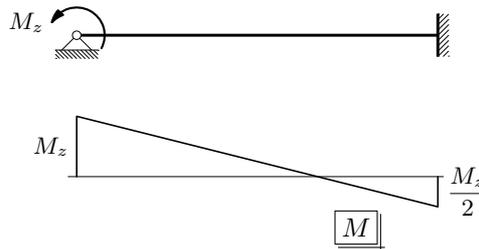
te:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\overline{M}_{3,2}^c, \\
b_2 &= M - \overline{M}_{4,8}^c, \\
b_3 &= \frac{1}{2} P_2 - \frac{1}{4} \overline{M}_{4,8}^c, \\
b_4 &= -\frac{3}{8} P_2 - \frac{3}{16} \overline{M}_{4,8}^c.
\end{aligned}$$

Uzet ćemo, jednostavnosti radi, da je  $EI = \text{const}$  na cijelomu sistemu. Tada su

$$k_{\{2,3\}} = k_{\{3,4\}} = k_{\{2,6\}} = k_{\{3,7\}} = k_{\{4,8\}} = k \quad \text{i} \quad k_{\{8,9\}} = \frac{4}{5} k.$$

Djeluje li na zglobnome kraju jednostrano upete grede moment vrijednosti  $M_z$ , tada je vrijednost momenta upetosti na drugomu kraju  $M_z/2$  (slika 10.) [dokažite!]. Stoga je  $\overline{M}_{3,2}^c = \frac{1}{2} P_1 \ell_{\{1,2\}} = P_1/2$ .



Slika 10.

Vrijednost momenta upetosti  $\overline{M}_{4,8}^c$  izračunat ćemo prema izrazu (8) na stranici 20., uz pomoć tablice 1. na stranici 7.:

$$\overline{M}_{4,8}^c = \overline{M}_{4,8} - \frac{1}{2} \overline{M}_{8,4} = \left( -\frac{1}{8} P_2 \ell_{\{4,8\}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8} P_2 \ell_{\{4,8\}} \right) = -\frac{3}{16} P_2 \ell_{\{4,8\}} = -\frac{3}{4} P_2.$$

Neka su  $P_1 = P_2 = 100 \text{ kN}$ ; tada su  $\overline{M}_{3,2}^c = 50 \text{ kNm}$  i  $\overline{M}_{4,8}^c = -75 \text{ kNm}$ . Neka je, nadalje,  $M = 50 \text{ kNm}$ .

Sustav jednadžbi sada je

$$\begin{bmatrix} 7k & 2k & 0 & \frac{3}{2}k \\ 2k & 7k & \frac{3}{4}k & \frac{33}{16}k \\ 0 & \frac{3}{4}k & \frac{9}{16}k & \frac{9}{64}k \\ \frac{3}{2}k & \frac{33}{16}k & \frac{9}{64}k & \frac{1287}{1280}k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ u_{\{2,3,4\}} \\ w_{\{4,8\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50,0 \\ 125,0 \\ 68,75 \\ -23,44 \end{bmatrix}.$$

Njegovo je rješenje:

$$\varphi_3 = \frac{12,69}{k}, \quad \varphi_4 = \frac{51,85}{k}, \quad u_{\{2,3,4\}} = \frac{93,51}{k} \quad \text{i} \quad w_{\{4,8\}} = -\frac{161,68}{k},$$

a konačne su vrijednosti momenata na krajevima štapova tada:

$$\begin{aligned} M_{3,2} &= 88,06 \text{ kNm}, \\ M_{3,4} &= -88,06 \text{ kNm}, \\ M_{4,3} &= -9,74 \text{ kNm}, \\ M_{6,2} &= 70,13 \text{ kNm}, \\ M_{7,3} &= 70,13 \text{ kNm}, \\ M_{4,8} &= 59,74 \text{ kNm}, \\ M_{9,8} &= 97,01 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Momentni dijagram i skica polja pomaka zadanoga sistema dani su na slikama 9.f. i g. na stranici 21.

[U sistemu prikazanu na slici 4.a. na stranici 12. krute veze u čvorovima 1 i 4 zamijenite zglobnima. Što su sada nepoznanice? Napišite izraze za vrijednosti momenata na krajevima štapova! Sastavite i riješite sustav jednadžbi ravnoteže i virtualnoga rada! Nacrtajte konačni momentni dijagram!]

## 1.5. Prisilni pomaci ležajeva

Kao što znamo, prisilni pomaci ležajeva mogu u statički neodređenim sistemima izazvati pojavu unutarnjih sila i reakcija.

Utjecaj zaokreta upetog ležaja lako je uključiti u proračun momentima upetosti štapova čiji su krajevi priključeni u taj ležaj: ako je  $\bar{\varphi}_i$  kut zadanoga zaokreta ležaja na  $i$ -tom kraju obostrano upetoga štapa  $\{i, j\}$ , vrijednosti su momenata upetosti

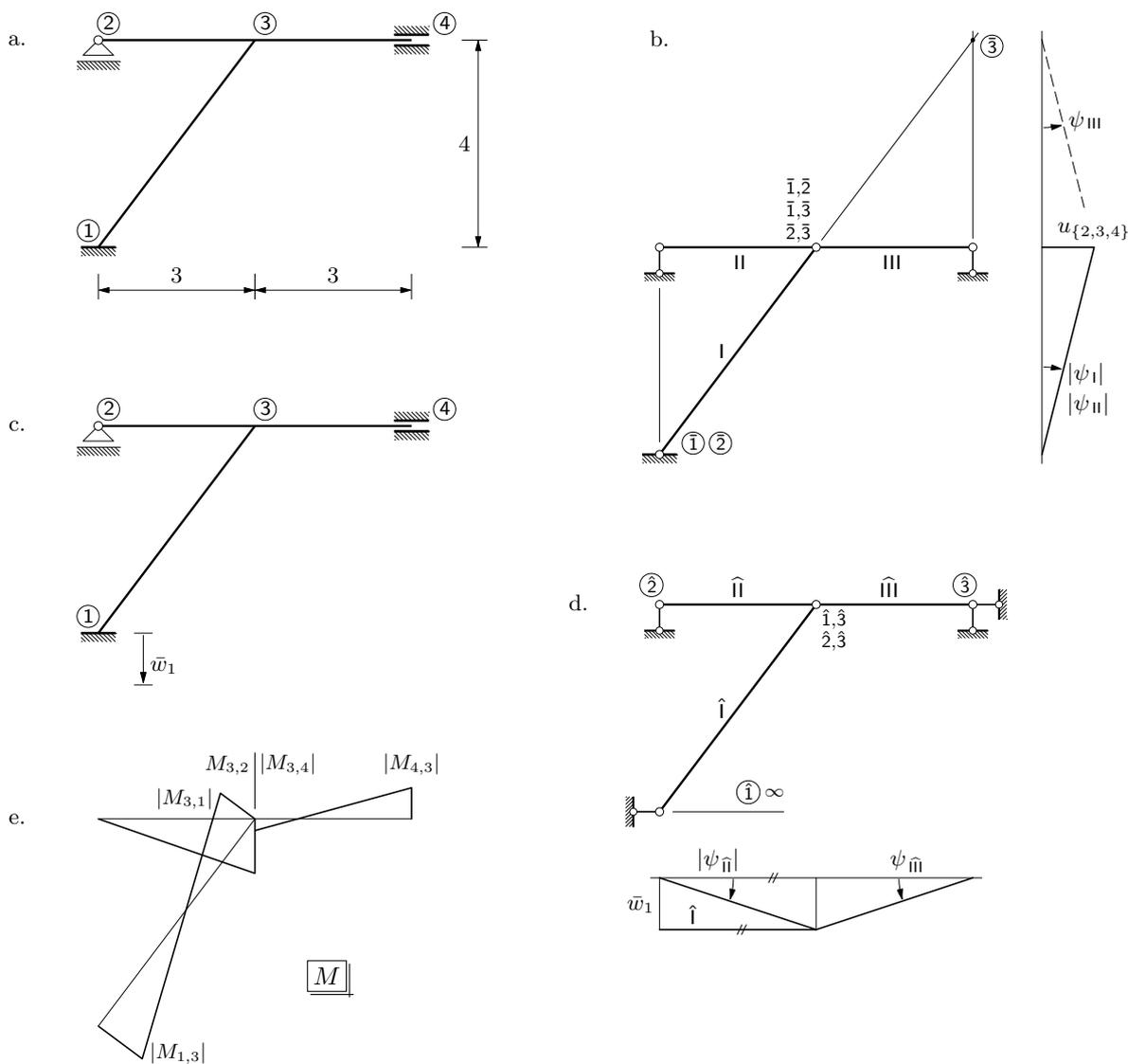
$$\overline{M}_{i,j} = 4k_{\{i,j\}}\bar{\varphi}_i \quad \text{i} \quad \overline{M}_{j,i} = 2k_{\{i,j\}}\bar{\varphi}_i; \quad (9)$$

ako je pak štap jednostrano upet (sa zglobom na kraju  $j$ ), tada je

$$\overline{M}_{i,j}^c = 3 k_{\{i,j\}} \bar{\varphi}_i. \quad (10)$$

Uvođenje utjecaja translacijskih pomaka u proračun često je nešto složenije. Treba, naime, uočiti da je translacijski pomak ležaja novi neovisni translacijski pomak omogućen u sistemu, te se njegov utjecaj može rasprostrijeti na dio sistema, pa i na cijeli sistem. Taj utjecaj stoga određujemo s pomoću pomakâ zglobne sheme; treba ga pritom odvojiti od utjecaja ostalih neovisnih translacijskih pomaka.

Primjerice, na temelju zglobne sheme prikazane na slici 11.b. zaključujemo da je u sistemu sa slike a. moguć jedan neovisni translacijski pomak; njegovu ćemo duljinu označiti sa  $u_{\{2,3,4\}}$ . U proračunu inženjerskom metodom pomaka nepoznanica je i kut zaokreta  $\varphi_3$  čvora 3. [Nacrtajte osnovni sistem!]



Slika 11.

Neka je  $\bar{w}_1$  duljina zadanoga vertikalnog pomaka ležaja 1, slika 11.c. (To je jedino djelovanje na sistem.) Spriječimo li neovisni pomak, zglobna shema postaje geometrijski nepromjenjivom. Raskidanjem veze koja sprečava pomak po pravcu prisilnoga pomaka nastaje novi mehanizam za koji možemo nacrtati dijagrame projekcija pomakâ uz inicijalni pomak jednak zadanu pomaku (slika 11.d.) te izračunati kutove zaokreta štapova kao krutih tijela:

$$\bar{\psi}_{\{2,3\}} = \psi_{\hat{\text{II}}} = -\frac{\bar{w}_1}{\ell_{\{2,3\}}} = -\frac{\bar{w}_1}{3} \quad \text{i} \quad \bar{\psi}_{\{3,4\}} = \psi_{\hat{\text{III}}} = \frac{\bar{w}_1}{\ell_{\{3,4\}}} = \frac{\bar{w}_1}{3}.$$

Zaokret štapa kao krutoga tijela uzrokuje pojavu momenata upetosti; ako je štap obosstrano upet,

$$\bar{M}_{i,j} = \bar{M}_{j,i} = -6 k_{\{i,j\}} \bar{\psi}_{\{i,j\}}, \quad (11)$$

ako je pak upet jednostrano, na kraju  $i$ ,

$$\bar{M}_{i,j}^c = -3 k_{\{i,j\}} \bar{\psi}_{\{i,j\}}. \quad (12)$$

U našem su primjeru prema tome

$$\begin{aligned} \bar{M}_{3,2}^c &= -3 k_{\{2,3\}} \bar{\psi}_{\{2,3\}} = k_{\{2,3\}} \bar{w}_1, \\ \bar{M}_{3,4} &= \bar{M}_{4,3} = -6 k_{\{3,4\}} \bar{\psi}_{\{3,4\}} = -2 k_{\{3,4\}} \bar{w}_1. \end{aligned}$$

Ukupne su vrijednosti momenata na krajevima štapova:

$$\begin{aligned} M_{1,3} &= 2 k_{\{1,3\}} \varphi_3 - 6 k_{\{1,3\}} \psi_{\{1,3\}} = 2 k_{\{1,3\}} \varphi_3 + \frac{3}{2} k_{\{1,3\}} u_{\{2,3,4\}}, \\ M_{3,1} &= 4 k_{\{1,3\}} \varphi_3 - 6 k_{\{1,3\}} \psi_{\{1,3\}} = 4 k_{\{1,3\}} \varphi_3 + \frac{3}{2} k_{\{1,3\}} u_{\{2,3,4\}}, \\ M_{3,2} &= 3 k_{\{2,3\}} \varphi_3 - 3 k_{\{2,3\}} \psi_{\{2,3\}} + \bar{M}_{3,2}^c = 3 k_{\{2,3\}} \varphi_3 + \frac{3}{4} k_{\{2,3\}} u_{\{2,3,4\}} + \bar{M}_{3,2}^c, \\ M_{3,4} &= 4 k_{\{3,4\}} \varphi_3 - 6 k_{\{3,4\}} \psi_{\{3,4\}} + \bar{M}_{3,4} = 4 k_{\{3,4\}} \varphi_3 - \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} u_{\{2,3,4\}} + \bar{M}_{3,4}, \\ M_{4,3} &= 2 k_{\{3,4\}} \varphi_3 - 6 k_{\{3,4\}} \psi_{\{3,4\}} + \bar{M}_{3,4} = 2 k_{\{3,4\}} \varphi_3 - \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} u_{\{2,3,4\}} + \bar{M}_{4,3}, \end{aligned}$$

jer su, prema slici 11.b.,

$$\psi_{\{3,4\}} = -\psi_{\{1,3\}} = -\psi_{\{2,3\}} = \frac{1}{4} u_{\{2,3,4\}}.$$

Uvrstimo li te izraze i izraze za vrijednosti momenata upetosti u jednadžbu ravnoteže momenata u čvoru 3,

$$-M_{3,1} - M_{3,2} - M_{3,4} = 0,$$

dobit ćemo nakon sređivanja

$$\begin{aligned} (4 k_{\{1,3\}} + 3 k_{\{2,3\}} + 4 k_{\{3,4\}}) \varphi_3 + \left( \frac{3}{2} k_{\{1,3\}} + \frac{3}{4} k_{\{2,3\}} - \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} \right) u_{\{2,3,4\}} \\ = (-k_{\{2,3\}} + 2 k_{\{3,4\}}) \bar{w}_1. \end{aligned}$$

Polje virtualnih pomaka kvalitativno je jednako polju pomaka za koje je nepoznati neovisni translacijski pomak inicijalan pomak (slika 11.b.). Ako je  $\delta u_{\{2,3,4\}}$  njegova duljina toga pomaka, onda su kutovi virtualnih zaokreta štapova

$$\delta\psi_{\text{III}} = -\delta\psi_{\text{I}} = -\delta\psi_{\text{II}} = \frac{1}{4} \delta u_{\{2,3,4\}}.$$

Uvrštavanje tih izraza i izraza za vrijednosti momenata na krajevima štapova u jednadžbu virtualnoga rada,

$$(M_{1,3} + M_{3,1}) \psi_{\text{I}}^{\{1\}} + M_{3,2} \psi_{\text{II}}^{\{1\}} + (M_{3,4} + M_{4,3}) \psi_{\text{III}}^{\{1\}} = 0,$$

nakon sređivanja daje

$$\begin{aligned} \left( \frac{3}{2} k_{\{1,3\}} + \frac{3}{4} k_{\{2,3\}} - \frac{3}{2} k_{\{3,4\}} \right) \varphi_3 + \left( \frac{3}{4} k_{\{1,3\}} + \frac{3}{16} k_{\{2,3\}} + \frac{3}{4} k_{\{3,4\}} \right) u_{\{2,3,4\}} \\ = - \left( \frac{1}{4} k_{\{2,3\}} + k_{\{3,4\}} \right) \bar{w}_1. \end{aligned}$$

Za  $EI = \text{const}$  dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} \frac{47}{15} EI & \frac{1}{20} EI \\ \frac{1}{2} EI & \frac{37}{80} EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ u_{\{2,3,4\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} EI \bar{w}_1 \\ -\frac{5}{12} EI \bar{w}_1 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \frac{47}{15} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{2} & \frac{37}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ u_{\{2,3,4\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \bar{w}_1 \\ -\frac{5}{12} \bar{w}_1 \end{bmatrix},$$

rješenje kojega je

$$\varphi_3 = \frac{15}{124} \bar{w}_1 \quad \text{i} \quad u_{\{2,3,4\}} = -\frac{85}{93} \bar{w}_1,$$

pa su vrijednosti konačnih momenata na krajevima štapova

$$M_{1,3} = -\frac{7}{31} EI \bar{w}_1,$$

$$M_{3,1} = -\frac{11}{62} EI \bar{w}_1,$$

$$M_{3,2} = \frac{7}{31} EI \bar{w}_1,$$

$$M_{3,4} = -\frac{3}{62} EI \bar{w}_1,$$

$$M_{4,3} = -\frac{4}{31} EI \bar{w}_1.$$

Ako su  $EI = 150\,000 \text{ kNm}^2$  i  $\bar{w}_1 = 1 \text{ mm}$ , tada su

$$\varphi_3 = 1,2097 \cdot 10^{-4} \quad \text{i} \quad u_{\{2,3,4\}} = -9,1398 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

te

$$M_{1,3} = -33,87 \text{ kNm},$$

$$M_{3,1} = -26,61 \text{ kNm},$$

$$M_{3,2} = 33,87 \text{ kNm},$$

$$M_{3,4} = -7,26 \text{ kNm},$$

$$M_{4,3} = -19,35 \text{ kNm}.$$

Momentni je dijagram prikazan na slici 11.e.

## 1.6. Formalizacija inženjerske metode pomakâ

### 1.6.1. Kinematička ograničenja

Kinematičkim ograničenjima nazivamo geometrijske uvjete koje poopćeni pomaci, kao osnovne nepoznanice u metodama pomakâ, moraju zadovoljiti. To mogu biti zadane duljine translacijskih komponentata pomakâ ili zadani kutovi zaokreta, ali i pròpisâni međusobni odnosi nekih pomakâ i zaokreta.

Trivijalan su primjer kinematičkih ograničenja ležajni uvjeti: spriječene ili zadane komponente prisilnih pomaka po pravcima ležajnih veza. U formalnom smo izvodu činjenicu da vrijednosti tih komponentata nisu nepoznanice uvažili rastavljanjem vektora vrijednosti pomakâ  $\mathbf{u}$  na podvektore  $\mathbf{u}_s$ , s vrijednostima slobodnih, i  $\mathbf{u}_\ell$ , s vrijednostima zadanih komponentata pomakâ. Odgovarajuće rastavljanje vektora vrijednosti sila  $\mathbf{q}$  na dva podvektora i matrice krutosti  $\mathbf{K}$  na četiri podmatrice,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{s,s} & \mathbf{K}_{s,\ell} \\ \mathbf{K}_{\ell,s} & \mathbf{K}_{\ell,\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_\ell \end{bmatrix},$$

omogućilo je izdvajanje podsustava jednadžbi ravnoteže čvorova,

$$\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_s - \mathbf{K}_{s,\ell} \mathbf{u}_\ell,$$

na čijoj su lijevoj strani ostale samo nepoznate vrijednosti slobodnih komponentata pomakâ.

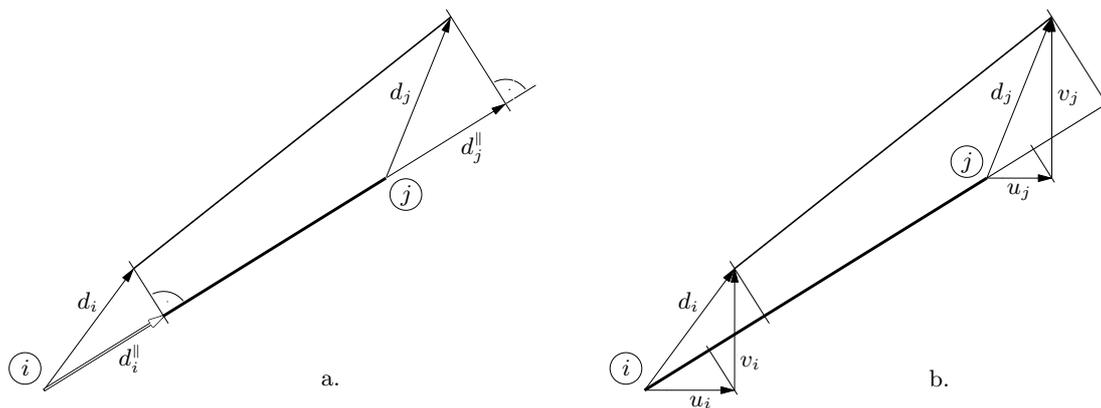
### 1.6.2. Jednadžbe kinematičkih ograničenja

U proračunu inženjerskom metodom pomakâ zanemaruju se promjene duljina štapnih elemenata zbog utjecaja uzdužnih sila. (Uz to se, kao i inače u okviru teorije malih pomaka, uzima da se pri savijanju štapova razmaci čvorova ne mijenjaju.) Drugim riječima, pretpostavlja se da je uzdužna krutost štapova neizmijerna. Iz osnovnoga teorema kinematike krutoga tijela (bilješka 5. na dnu stranice 12.) tada slijedi da su ortogonalne projekcije pomakâ krajeva štapa na njegovu os međusobno jednake (slika 12.a.):

$$\vec{d}_i^{\parallel} = \vec{d}_j^{\parallel}. \quad (13)$$

Budući da su

$$\vec{d}_i^{\parallel} = d_i^{\parallel} \vec{e}_{i,j} \quad \text{i} \quad \vec{d}_j^{\parallel} = d_j^{\parallel} \vec{e}_{i,j},$$



Slika 12.

mora biti

$$d_i^{\parallel} = d_j^{\parallel}, \quad (14)$$

pri čemu je (slika 13.)

$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} \vec{j} = \frac{\Delta x_{i,j}}{l_{i,j}} \vec{i} + \frac{\Delta y_{i,j}}{l_{i,j}} \vec{j}$$

jedinični vektor na osi štapa, orijentiran od čvora  $i$  prema čvoru  $j$ . Uz oznake

$$c_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} = \frac{\Delta x_{i,j}}{l_{i,j}} \quad \text{i} \quad s_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} = \frac{\Delta y_{i,j}}{l_{i,j}}, \quad (15)$$

možemo pisati

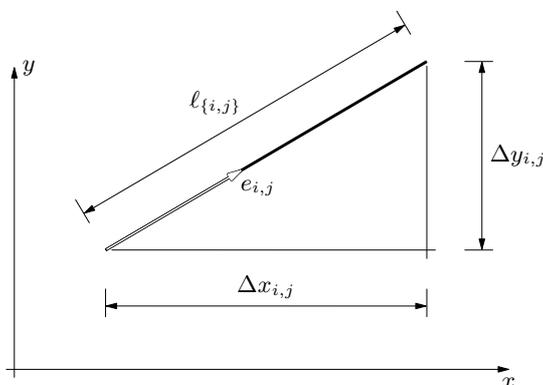
$$\vec{e}_{i,j} = c_{i,j} \vec{i} + s_{i,j} \vec{j}. \quad (16)$$

Prikažemo li pomake krajeva u komponentnom obliku (slika 12.b.),

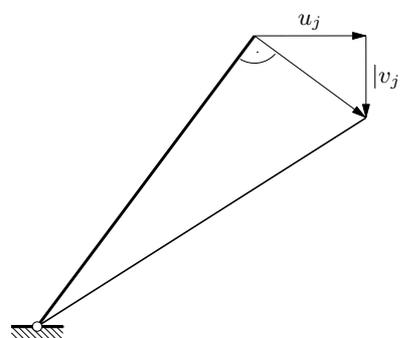
$$\vec{d}_i = \vec{u}_i + \vec{v}_i = u_i \vec{i} + v_i \vec{j} \quad \text{i} \quad \vec{d}_j = \vec{u}_j + \vec{v}_j = u_j \vec{i} + v_j \vec{j},$$

za orijentirane duljine njihovih projekcija na os štapa dobivamo

$$d_i^{\parallel} = \vec{d}_i \cdot \vec{e}_{i,j} = u_i c_{i,j} + v_i s_{i,j} \quad \text{i} \quad d_j^{\parallel} = \vec{d}_j \cdot \vec{e}_{i,j} = u_j c_{i,j} + v_j s_{i,j},$$



Slika 13.



Slika 14.

pa uvjet jednakosti orijentiranih duljina projekcija (14) daje

$$u_i c_{i,j} + v_i s_{i,j} = u_j c_{i,j} + v_j s_{i,j}$$

ili, u obliku pogodnijemu za nastavak priče,

$$u_i c_{i,j} + v_i s_{i,j} - u_j c_{i,j} - v_j s_{i,j} = 0. \quad (17)$$

Tu ćemo jednadžbu nazvati *jednadžbom (kinematičkoga) ograničenja*.

U posebnome slučaju, ako je čvor  $i$  nepomični ležaj (prisilni translacijski pomak kojega nije zadan, tako da su  $u_i = 0$  i  $v_i = 0$ ), bit će  $u_j c_{i,j} + v_j s_{i,j} = 0$ , što znači da su vektori  $\vec{d}_j$  i  $\vec{e}_{i,j}$  međusobno okomiti, odnosno da čvor  $j$  „putuje” po okomici na os štapa (slika 14.).

### 1.6.3. Sustavi jednadžbi ograničenjâ

Okvirna konstrukcija skicirana na slici 15. sastavljena je od pet štapnih elemenata, pa možemo napisati pet jednadžbi kinematičkih ograničenja:

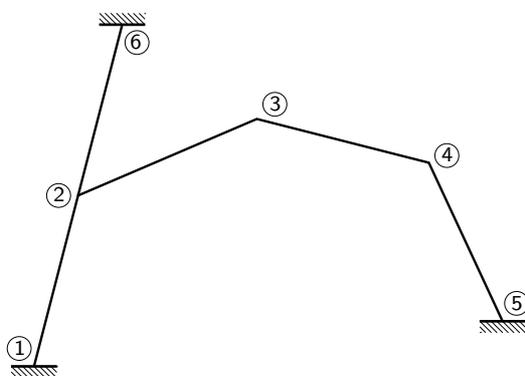
$$\begin{aligned} c_{1,2} u_2 + s_{1,2} v_2 &= 0, \\ c_{2,3} u_2 + s_{2,3} v_2 - c_{2,3} u_3 - s_{2,3} v_3 &= 0, \\ c_{2,6} u_2 + s_{2,6} v_2 &= 0, \\ c_{3,4} u_3 + s_{3,4} v_3 - c_{3,4} u_4 - s_{3,4} v_4 &= 0, \\ c_{4,5} u_4 - s_{4,5} v_4 &= 0, \end{aligned}$$

odnosno, budući da su  $c_{2,6} = c_{1,2}$  i  $s_{2,6} = s_{1,2}$ ,

$$\begin{aligned} c_{1,2} u_2 + s_{1,2} v_2 &= 0, \\ c_{2,3} u_2 + s_{2,3} v_2 - c_{2,3} u_3 - s_{2,3} v_3 &= 0, \\ c_{1,2} u_2 + s_{1,2} v_2 &= 0, \\ c_{3,4} u_3 + s_{3,4} v_3 - c_{3,4} u_4 - s_{3,4} v_4 &= 0, \\ c_{4,5} u_4 - s_{4,5} v_4 &= 0. \end{aligned}$$

Riječ je o homogenu sustavu pet jednadžbi sa šest nepoznanica. U matričnom je zapisu:

$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} & 0 & 0 \\ c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} & -c_{3,4} & -s_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{4,5} & s_{4,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$



Slika 15.

Taj ćemo sustav Gauss–Jordanovim eliminacijskim postupkom [24, 53] (uz odabire uporišnih elemenata pretraživanjem po stupcima) prevesti u sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{s_{1,2}(c_{2,3}s_{3,4} - c_{3,4}s_{2,3})}{c_{3,4}(c_{1,2}s_{2,3} - c_{2,3}s_{1,2})} & 0 & -\frac{c_{2,3}s_{1,2}(c_{3,4}s_{4,5} - c_{4,5}s_{3,4})}{c_{3,4}c_{4,5}(c_{1,2}s_{2,3} - c_{2,3}s_{1,2})} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{c_{1,2}(c_{2,3}s_{3,4} - c_{3,4}s_{2,3})}{c_{3,4}(c_{1,2}s_{2,3} - c_{2,3}s_{1,2})} & 0 & \frac{c_{1,2}c_{2,3}(c_{3,4}s_{4,5} - c_{4,5}s_{3,4})}{c_{3,4}c_{4,5}(c_{1,2}s_{2,3} - c_{2,3}s_{1,2})} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{s_{3,4}}{c_{3,4}} & 0 & \frac{c_{3,4}s_{4,5} - c_{4,5}s_{3,4}}{c_{3,4}c_{4,5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{s_{4,5}}{c_{4,5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

koji ima isti skup rješenja. (U linearnoj se algebri sustavi jednadžbi s istim skupom rješenja nazivaju ekvivalentnima.)

Kako će nas za sada ponajviše zanimati struktura matrice toga ekvivalentnog sustava, zapisat ćemo je sažetije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{h}_{1,4} & 0 & \bar{h}_{1,6} \\ 0 & 1 & 0 & \bar{h}_{2,4} & 0 & \bar{h}_{2,6} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{h}_{3,4} & 0 & \bar{h}_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{h}_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (19)$$

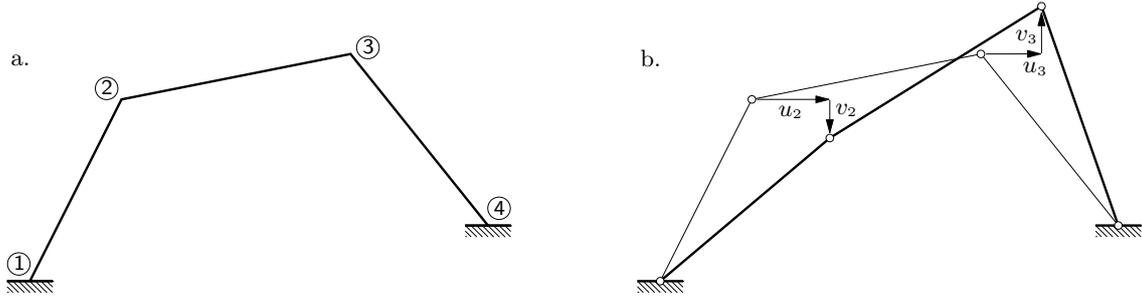
ta je matrica u Hermiteovu normalnom obliku. Za neku matricu kažemo da je u reduciranome ili u Hermiteovu normalnom obliku zadovoljava li sljedeće uvjete [24, 53]:

1. svi reci, sve komponente kojih su jednake nuli (nul–reci), ako takvih redaka ima, nalaze se ispod redaka koji sadrže barem po jednu od nule različitu komponentu;
2. u svakome retku, koji nije nul–redak, prva komponenta različita od nule — uporišna komponenta — ima vrijednost 1;
3. u stupcu koji sadrži uporišnu komponentu sve su ostale komponente jednake nuli;
4. nalaze li se uporišne komponente  $i$ -toga i  $(i+1)$ -og retka u stupcima  $j_i$  i  $j_{i+1}$ , onda je  $j_{i+1} > j_i$ .

Stupci s uporišnim komponentama nazivaju se baznim stupcima; u našem primjeru to su prvi, drugi, treći i peti stupac.<sup>8</sup>

Matrica sustava u Hermiteovu normalnom obliku omogućava „automatsko” određivanje broja neovisnih translacijskih komponenata pomakâ pa  $i$ , u stanovitu smislu, njihovo „prepoznavanje”, odnosno, njihov „automatski” odabir. Započet ćemo s nešto jednostavnijim primjerom.

<sup>8</sup> Napomenut ćemo usput da je lako vidjeti da su preostali stupci linearne kombinacije baznih stupaca, pri čemu su komponente tih preostalih stupaca koeficijenti kojima se množe bazni stupci, a u linearnu kombinaciju koja prikazuje neki stupac ulaze samo bazni stupci lijevo od njega. U stvari, isti odnosi postoje i između stupaca matrice sustava u izvornom obliku; to, međutim, nije lako vidjeti.



Slika 16.

Za okvirni nosač sa slike 16.a. sustav je jednadžbi kinematičkih ograničenja

$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

(uzet ćemo zasad da su  $c_{1,2} \neq 0$  i  $c_{3,4} \neq 0$ ; o geometrijskoj interpretaciji i razlogu te pretpostavke bit će riječi kasnije). Gauss–Jordanov postupak daje ekvivalentni sustav čija je struktura

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_{1,4} \\ 0 & 1 & 0 & h_{2,4} \\ 0 & 0 & 1 & h_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

tako da neposredno slijedi

$$\begin{aligned} u_2 &= -h_{1,4} v_3, \\ v_2 &= -h_{2,4} v_3, \\ u_3 &= -h_{3,4} v_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Kao što vidimo, orijentirane duljine  $u_2$  i  $v_2$  komponenta pomaka čvora 2 i orijentirana duljina  $u_3$  horizontalne komponente pomaka čvora 3 izražene su kao linearne funkcije orijentirane duljine  $v_3$  vertikalne komponente pomaka tog čvora, a to znači da u analiziranoj konstrukciji postoji jedna neovisna translacijska komponenta pomaka. Na slici 16.b. prikazana je skica pomakâ pripadne zglobne sheme. Neovisna može biti bilo koja translacijska komponenta. Gauss–Jordanova eliminacija, koja se odvija slijêva nâdesno, „odabrala” je posljednju „ponuđenu” komponentu.

Budući da duljina  $v_3$  odabrane neovisne komponente  $\vec{v}_3$  izrazima (22) određuje duljine komponentata  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{v}_2$  i  $\vec{u}_3$ , neovisna se komponenta naziva i *vodećom komponentom pomakâ* ili, češće, *vodećim pomakom*, dok su ostale tri komponente *prateće* ili *vođene* (engleski su nazivi slikovitiji: *master* i *slave*).

Zapišemo li prethodne funkcijske veze u vektorskom obliku,

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -h_{1,4} \\ -h_{2,4} \\ -h_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{1,4} \\ -h_{2,4} \\ -h_{3,4} \end{bmatrix} [v_3] = -\mathbf{h}_{\cdot,4} [v_3], \quad (23)$$

odnosi duljina komponentata pomakâ postaju jasnije vidljivima, pa možemo naslutiti i opća pravila: broj neovisnih translacijskih komponentata pomakâ jednak je broju stupaca reducirane matrice koji nisu bazni, neovisne komponente „odgovaraju” tim stupcima, a komponente pak

tih stupaca koeficijenti su uz duljine tako odabranih vodećih komponentata pomakâ u izrazima za linearne funkcije kojima su propisane duljine pratećih komponentata.

Primijenimo li ta pravila na matricu (19), zaključit ćemo da okvirni sistem sa slike 15. ima dvije neovisne translacijske komponente pomakâ: četvrti i šesti stupac nisu bazni. Nadalje, tim stupcima odgovaraju četvrta i šesta nepoznanica — orijentirane duljine  $v_3$  i  $v_4$  vertikalnih komponentata pomakâ čvorova 3 i 4. I na kraju, duljine ostalih komponentata pomakâ povezane su s duljinama prethodno odabranih neovisnih komponentata izrazima

$$\begin{aligned} u_2 &= -\bar{h}_{1,4} v_3 - \bar{h}_{1,6} v_4, \\ v_2 &= -\bar{h}_{2,4} v_3 - \bar{h}_{2,6} v_4, \\ u_3 &= -\bar{h}_{3,4} v_3 - \bar{h}_{3,6} v_4, \\ u_4 &= -\bar{h}_{4,6} v_4, \end{aligned} \quad (24)$$

ili, u preglednijemu matričnu zapisu:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -\bar{h}_{1,4} \\ -\bar{h}_{2,4} \\ -\bar{h}_{3,4} \\ 0 \end{bmatrix} + v_4 \begin{bmatrix} -\bar{h}_{1,6} \\ -\bar{h}_{2,6} \\ -\bar{h}_{3,6} \\ -\bar{h}_{4,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{h}_{1,4} & -\bar{h}_{1,6} \\ -\bar{h}_{2,4} & -\bar{h}_{2,6} \\ -\bar{h}_{3,4} & -\bar{h}_{3,6} \\ 0 & -\bar{h}_{4,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,4} & -\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

(Za oblikovanje prethodnoga izraza posljednji smo redak reducirane matrice (19), nul-redak, morali „odrezati” kako bi stupci/vектори  $\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,4}$  i  $\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,6}$  imali po četiri komponente, isti broj kao i vektor duljina pratećih komponentata pomakâ na lijevoj strani znaka jednakosti.)

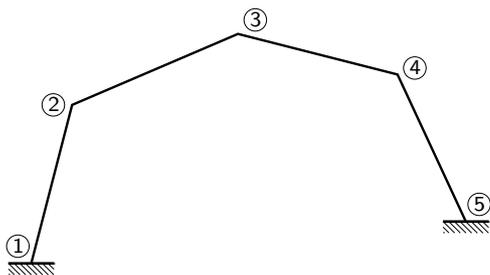
Matrica u Hermiteovu normalnom obliku sadrži nul-retke ako su, algebarskim rječnikom, neki reci izvorne matrice linearne kombinacije drugih nekih redaka. Za okvir sa slike 15. prva i treća jednadžba u sustavu jednadžbi kinematičkih ograničenja (18) međusobno su jednake. Prva jednadžba, naime, izražava ograničenje koje pripisuje štapni element  $\{1, 2\}$  (čvor 2 može se gibati samo po okomici na njegovu os), a treća jednadžba analogno ograničenje koje propisuje štap  $\{2, 6\}$ . Budući da osi štapova  $\{1, 2\}$  i  $\{2, 6\}$  leže na istomu pravcu, oba ograničenja propisuju isti mogući pravac gibanja čvora 2 — okomicu na taj pravac, pa su stoga i jednadžbe jednake.

„Uklonimo” li štap  $\{2, 6\}$  (slika 17.), iz sustava jednadžbi kinematičkih ograničenja (18) ispada treća jednadžba, pa sustav prelazi u

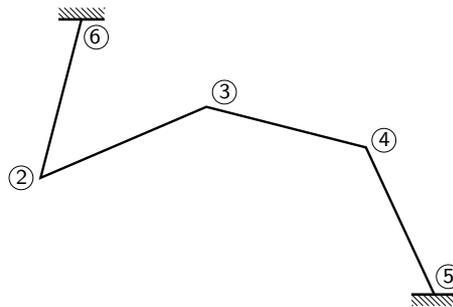
$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} & -c_{3,4} & -s_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{4,5} & s_{4,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Reducirana je matrica sustava sada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{h}_{1,4} & 0 & \bar{h}_{1,6} \\ 0 & 1 & 0 & \bar{h}_{2,4} & 0 & \bar{h}_{2,6} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{h}_{3,4} & 0 & \bar{h}_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{h}_{4,6} \end{bmatrix}; \quad (27)$$



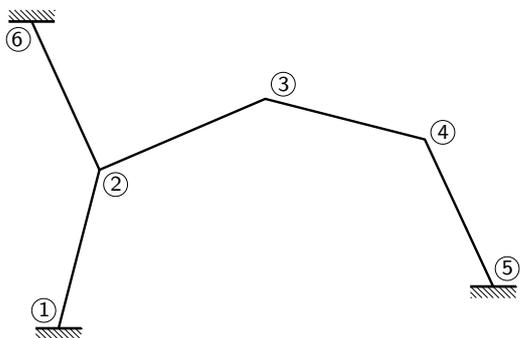
Slika 17.



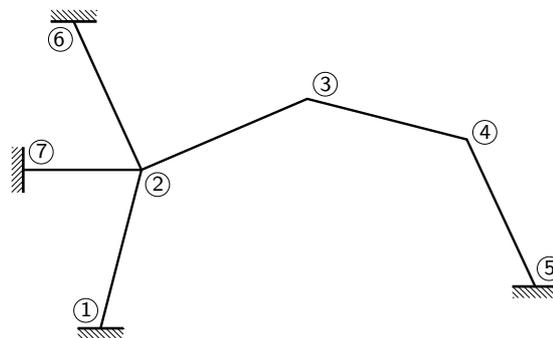
Slika 18.

ta se matrica od matrice (19) razlikuje samo po tome što ima redak manje — nema nul-retka. Dakle, odabrane neovisne translacijske komponente pomakâ ponovo su vertikalne komponente pomakâ čvorova 3 i 4, a duljine ostalih komponenata opet slijede iz izraza (25).

Sa stajališta kinematičkih ograničenja i neovisnih pomakâ štap {2, 6} u okviru sa slike 15. stoga ne igra nikakvu ulogu. Točnije, jedan od štapova {1, 2} ili {2, 6} nema uloge. Naime, uklonimo li umjesto štapa {2, 6} štap {1, 2} (slika 18.), jednadžbe kinematičkih ograničenja se, zbog  $c_{2,6} = c_{1,2}$  i  $s_{2,6} = s_{1,2}$ , neće promijeniti. Promijenit će se tek, možda, njihov poredak u sustavu. Može se, međutim, pokazati da Hermiteov normalni oblik matrice sustava ne ovisi o redosljedu jednadžbi.



Slika 19.



Slika 20.

Ako osi štapova {1, 2} i {2, 6} ne leže na istomu pravcu (slika 19.), kinematička analiza pokazuje da je čvor 2 nepomičan: okomice na pravce osi štapova {1, 2} i {2, 6} dva su različita pravca, pa čvor ne može istodobno krenuti po oba. Prema tome, u okvirnoj konstrukciji sa slike 19. postoji samo jedna neovisna translacijska komponenta pomaka. Potvrdit će to i formalna analiza reducirane matrice sustava jednadžbi ograničenja. Izvorni je sustav:

$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} & 0 & 0 \\ c_{2,6} & s_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} & -c_{3,4} & -s_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{4,5} & s_{4,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (28)$$

za razliku od sustava (18), prva i treća jednadžba sada nisu jednake. Gauss–Jordanovim eliminacijskim postupkom dobivamo sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{h}_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \tilde{h}_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{h}_{5,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Prve dvije jednadžbe daju

$$u_2 = 0 \quad \text{i} \quad v_2 = 0;$$

čvor 2 zaista je, dakle, nepomičan. Matrica u Hermiteovu normalnom obliku ima jedan stupac koji nije bazni, pa je neovisna jedna translacijska komponenta pomaka, a preostale tri ovise o njoj:

$$\begin{aligned} u_3 &= -\tilde{h}_{3,6} v_4, \\ v_3 &= -\tilde{h}_{4,6} v_4, \\ u_4 &= -\tilde{h}_{5,6} v_4. \end{aligned}$$

Dodavanjem još jednoga štapa između čvora 2 i podloge (slika 20.) neovisne se komponente pomakâ ne mijenjaju. Sustav jednadžbi kinematičkih ograničenja proširuje se još jednom jednadžbom:

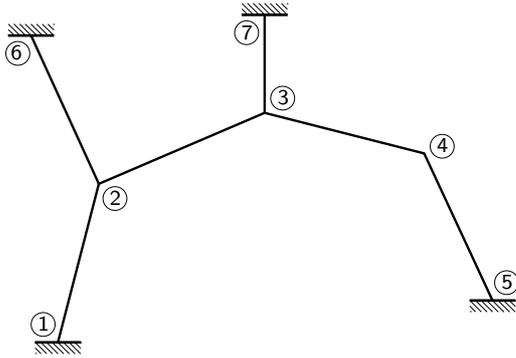
$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} & 0 & 0 \\ c_{2,6} & s_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,7} & s_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} & -c_{3,4} & -s_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{4,5} & s_{4,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Reducirana matrica sustava

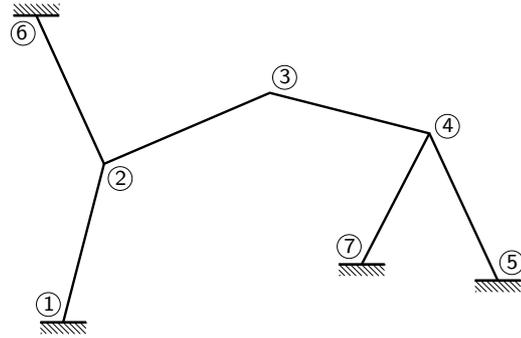
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{h}_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \tilde{h}_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{h}_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

razlikuje se od matrice u izrazu (29) po dodanome nul–retku. Znamo već da pojava nul–retka znači da su neki reci izvorne matrice međusobno linearno zavisni: komponente prvoga, trećeg i četvrtog retka matrice u izrazu (30) možemo shvatiti kao komponente triju vektora u „ravnini” razapetoj vektorima  $\vec{u}_2$  i  $\vec{v}_2$ , a tri su vektora u ravnini uvijek linearno zavisna.

Iako je matrica sustava (30) kvadratna, on nema jedinstveno rješenje: vrijednosti  $u_3$ ,  $v_3$  i  $u_4$  ovise o vrijednosti  $v_4$ , pa ćemo za svaku na neki način odabranu vrijednost  $v_4$  dobiti drugi skup rješenja.



Slika 21.



Slika 22.

Sustav  $n$  jednadžbi sa  $n$  nepoznanica može, naravno, imati i jedinstveno rješenje. Primjerice, za okvirnu konstrukciju sa slike 21. sustav je jednadžbi kinematičkih ograničenja

$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} & 0 & 0 \\ c_{2,6} & s_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} & -c_{3,4} & -s_{3,4} \\ 0 & 0 & c_{3,7} & s_{3,7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{4,5} & s_{4,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Reducirana je matrica sustava sada jedinična:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

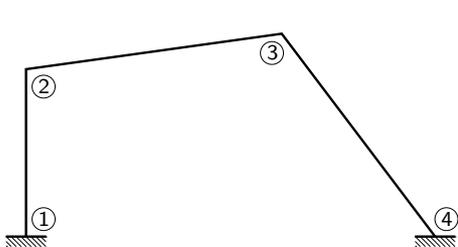
Budući da je sustav homogen (sve su desne strane jednake nuli), njegovo je jedinstveno rješenje trivijalno rješenje:

$$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0.$$

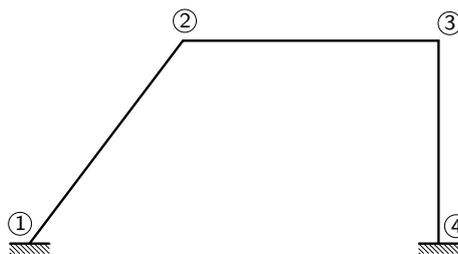
To pak znači da je, prema klasifikaciji koju smo uveli u intuitivnom izlaganju inženjerske metode pomakâ, riječ o nepomičnoj konstrukciji. (Taj zaključak možemo potvrditi kinematičkom analizom pripadne zglobne sheme.)

Nepomična je i konstrukcija prikazana na slici 22. [Napišite sustav jednadžbi kinematičkih ograničenja! Što možete reći o reduciranoj matrici sustava?]

Pomake sistema sa slike 16.a. analizirali smo uz pretpostavku da su  $c_{1,2} \neq 0$  i  $c_{3,4} \neq 0$ . Vrijeme je da napokon objasnimo geometrijske i kinematičke posljedice njezina neispunjavanja. Kako je  $c_{i,j} = (x_j - x_i)/\ell_{\{i,j\}}$ , ta će vrijednost biti jednaka nuli (i, istodobno,  $s_{i,j} = (y_j - y_i)/\ell_{\{i,j\}} = \pm 1$ ) ako je štap  $\{i,j\}$  vertikalan. Duljine štapova se, prema pretpostavci, ne mijenjaju, pa se gornji čvor vertikalnoga štapa ne može ni spustiti ni podignuti; drugim riječima, duljina će vertikalne komponente pomaka takvoga čvora biti jednaka nuli.



Slika 23.



Slika 24.

Za konstrukciju sa slike 23., s vertikalnim štapom  $\{1, 2\}$ , izvorni je sustav jednadžbi kinematičkih ograničenjâ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{2,3} & s_{2,3} & -c_{2,3} & -s_{2,3} \\ 0 & 0 & c_{3,4} & s_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Druga jednadžba reduciranoga sustava,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{h}_{1,4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{h}_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

potvrđuje da je  $v_2 = 0$ . Kao i u sistemu sa slike 16.a., vodeća je komponenta  $\bar{v}_3$ , ali je prate samo komponente  $\bar{u}_2$  i  $\bar{u}_3$ .

Ako je štap  $\{3, 4\}$  vertikalna, kao u konstrukciji sa slike 24., jasno je da  $\bar{v}_3$  ne može biti vodeća komponenta pomaka. Izvorni i reducirani sustav jednadžbi ograničenjâ sada su:

$$\begin{bmatrix} c_{1,2} & s_{1,2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & h_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz treće jednadžbe reduciranoga sustava odmah slijedi očekivana vrijednost  $v_3 = 0$ . U reduciranoj matrici treći stupac nije bazni, pa je vodeća komponenta pomaka komponenta  $\bar{u}_3$ . (Budući da je štap  $\{2, 3\}$  horizontalan, bit će  $u_2 = u_3$ , što nam prva jednadžba reduciranoga sustava i daje.)

#### 1.6.4. Kinematička kondenzacija

Za konstrukciju sa slike 15. na stranici 32. kao vodeće smo translacijske komponente pomakâ na temelju strukture reducirane matrice sustava jednadžbi kinematičkih ograničenja (19) odabrali komponente  $\bar{v}_3$  i  $\bar{v}_4$ . Uz poznate duljine tih, vodećih komponenata, duljine su pratećih komponenata  $\bar{u}_2$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{u}_3$  i  $\bar{u}_4$  određene skalarnim izrazima (24) ili vektorskim izrazom (25) sa stranice 35., a to znači da se u sustavu jednadžbi ravnoteže čvorova kao nepoznanice trebaju (i smiju) pojaviti samo orijentirane duljine vodećih translacijskih komponenata pomakâ i, naravno, kutovi zaokretâ „slobodnih” čvorova. Kutovi zaokretâ čvorova neovisne su nepoznanice, pa ćemo i zaokrete, iako ih ništa ne prati, svrstati u vodeće pomake.

*Kinematička je kondenzacija* formalizirani postupak „uklanjanja” vrijednosti pratećih komponenta pomaka iz jednadžbi ravnoteže primjenom uvedenih kinematičkih ograničenja, uz odgovarajuće smanjivanje broja jednadžbi u sustavu.

Za konstrukciju sa slike 15. vektor je nepoznatih vrijednosti poopćenih pomaka

$$\mathbf{u}_s = [u_2 \ v_2 \ \varphi_2 \ u_3 \ v_3 \ \varphi_3 \ u_4 \ v_4 \ \varphi_4]^T.$$

Veza između vrijednosti vodećih pomaka, sadržanih u vektoru

$$\mathbf{u}_s^v = [\varphi_2 \ v_3 \ \varphi_3 \ v_4 \ \varphi_4]^T,$$

i komponenta vektora  $\mathbf{u}_s$  dana je izrazom

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{h}_{1,4} & 0 & -\bar{h}_{1,6} & 0 \\ 0 & -\bar{h}_{2,4} & 0 & -\bar{h}_{2,6} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{h}_{3,4} & 0 & -\bar{h}_{3,6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{4,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Stenografski matricni zapis izražava, naravno, opći slučaj:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{C} \mathbf{u}_s^v. \quad (34)$$

S teorijskoga i edukacijskog gledišta (ali ne i sa stajališta programske realizacije) pogodno je promijeniti redosljed nepoznanica u vektoru  $\mathbf{u}_s$  uz odgovarajuću permutaciju matricnih redaka:

$$\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{h}_{1,4} & 0 & -\bar{h}_{1,6} & 0 \\ 0 & -\bar{h}_{2,4} & 0 & -\bar{h}_{2,6} & 0 \\ 0 & -\bar{h}_{3,4} & 0 & -\bar{h}_{3,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{4,6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s^v \\ \mathbf{u}_s^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}^{(v \rightarrow p)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_s^v,$$

pri čemu je u našem primjeru

$$\mathbf{C}^{(v \rightarrow p)} = [\mathbf{0} \ -\bar{\mathbf{h}}_{.,4} \ \mathbf{0} \ -\bar{\mathbf{h}}_{.,6} \ \mathbf{0}].$$

Na taj su način sadržaj i struktura matrice  $\mathbf{C}$  preglednije prikazani i, posebice, istaknuta je veza sa stupcima reducirane matrice sustava jednadžbi ograničenjâ (bez nul-redaka).

Uzet ćemo da prisilni pomaci nisu zadani. U tom je slučaju sustav jednadžbi ravnoteže, znamo,

$$\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_s. \quad (35)$$

Ako je  $m_s$  broj vrijednosti nepoznatih slobodnih komponentata (poopćenih) pomaka, sustav ima  $m_s$  jednadžbi, te je matrica  $\mathbf{K}_{s,s}$  tipa  $m_s \times m_s$ .

Uvrštavanjem desne strane izraza (34) dobivamo

$$\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C} \mathbf{u}_s^v = \mathbf{q}_s. \quad (36)$$

Ako vektor  $\mathbf{u}_s^v$  sadrži  $m_s^v$  vodećih komponentata pomakâ (uključujući zaokrete čvorova), matrica  $\mathbf{C}$  je tipa  $m_s \times m_s^v$ , pa će tipa  $m_s \times m_s^v$  biti i matrica  $\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C}$ :

$$[m_s \times \underbrace{m_s}] [m_s \times m_s^v] = [m_s \times m_s^v].$$

Kako je  $m_s^v < m_s$ , sustav (36) sadrži više jednadžbi nego što je potrebno za nalaženje vrijednosti nepoznanica. (Za okvir sa slike 15. su  $m_s = 9$  i  $m_s^v = 5$ , pa su  $\mathbf{K}_{s,s}$  tipa  $9 \times 9$ ,  $\mathbf{C}$  tipa  $9 \times 5$  i  $\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C}$  tipa  $9 \times 5$ ; sustav, prema tome, sadrži 9 jednadžbi s 5 nepoznanica.)

Broj jednadžbi smanjit ćemo tako da u (36) podizraze s obje strane znaka jednakosti pomnožimo slijevâ matricom  $\mathbf{C}^T$ :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C} \mathbf{u}_s^v = \mathbf{C}^T \mathbf{q}_s. \quad (37)$$

Matrica  $\mathbf{C}^T \mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C}$  bit će tada tipa

$$[m_s^v \times \underbrace{m_s}] [m_s \times m_s^v] = [m_s^v \times m_s^v],$$

a vektor  $\mathbf{C}^T \mathbf{q}_s$  imat će

$$[m_s^v \times \underbrace{m_s}] [m_s \times 1] = [m_s^v \times 1]$$

komponentata, tako da će sustav (37) sadržavati  $m_s^v$  jednadžbi s  $m_s^v$  nepoznanica. (U našem je primjeru matrica  $\mathbf{C}^T$  tipa  $5 \times 9$ , pa je matrica  $\mathbf{C}^T \mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C}$  tipa  $5 \times 5$ , odnosno, sustav ima 5 jednadžbi.)

K tomu još, što je gotovo jednako važno, množenjem matrice  $\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{C}$  slijevâ matricom  $\mathbf{C}^T$  očuvali smo simetriju matrice sustava.

Prikazani formalni „izvod” izraza (37) možemo obrazložiti primjenom virtualnoga rada. Neka je  $\delta \mathbf{u}_s^v$  vektor po volji odabranih vrijednosti poopćenih virtualnih pomaka po pravcima vodećih pomaka. Izrazom

$$\delta \mathbf{u}_s = \mathbf{C} \delta \mathbf{u}_s^v \quad (38)$$

zadat ćemo vrijednosti poopćenih virtualnih pomaka po pravcima pomakâ čije su vrijednosti sadržane u vektoru  $\mathbf{u}_s$ , drugim riječima, po pravcima svih nepoznatih pomaka. (Veza između vektorâ  $\delta \mathbf{u}_s$  i  $\delta \mathbf{u}_s^v$  ista je kao veza između vektorâ  $\mathbf{u}_s$  i  $\mathbf{u}_s^v$ .)

Skupu vodećih pomaka pridružiti ćemo sustav sila  $\mathbf{q}_s^v$  tako da virtualni rad tih sila na pomacima s vrijednostima  $\delta \mathbf{u}_s^v$  bude jednak radu sustava sila  $\mathbf{q}_s$  na pomacima čije su vrijednosti  $\delta \mathbf{u}_s$ :

$$[\delta \mathbf{u}_s^v]^T \mathbf{q}_s^v = \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{q}_s.$$

Zamijenimo li s desne strane znaka jednakosti  $\delta \mathbf{u}_s$  sa  $\mathbf{C} \delta \mathbf{u}_s^v$ ,

$$[\delta \mathbf{u}_s^v]^T \mathbf{q}_s^v = [\mathbf{C} \delta \mathbf{u}_s^v]^T \mathbf{q}_s,$$

uz  $[\mathbf{C} \delta \mathbf{u}_s^v]^T = [\delta \mathbf{u}_s^v]^T \mathbf{C}^T$  dobivamo

$$[\delta \mathbf{u}_s^v]^T \mathbf{q}_s^v = [\delta \mathbf{u}_s^v]^T \mathbf{C}^T \mathbf{q}_s.$$

Budući da ta jednakost mora vrijediti za svaki  $\delta \mathbf{u}_s^v$ , slijedi

$$\mathbf{q}_s^v = \mathbf{C}^T \mathbf{q}_s. \quad (39)$$

## 2. Relaksacijski postupci

AGATHA: ... everything is irrevocable,  
Because the past is irremediable,  
Because the future can only be built  
Upon the real past.

T. S. Eliot: *The Family Reunion*

Članak *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija*, objavljen 1923. godine [16], Konstantin Čališev<sup>9</sup> započinje obrazloženjem motivacije i svrhe primjene iteracijskih postupaka u štapnoj statici:

„Da se odrede suvišne nepoznanice statički neodređenih sistema, obično se postavi potreban za to broj linearnih jednadžbi, koje dobivamo na osnovi promatranja deformacije toga sistema. Broj ovih jednadžbi mora da odgovara broju nepoznanica. Često se može desiti, da je ovaj broj tako velik, da je praktički nemoguće direktno riješenje [*sic*] dobivenih jednadžbi.

Zgodnim izborom suvišnih nepoznanica na temelju različitih ujednostavnjujućih pretpostavaka, iskorišćenja uvjeta simetrije i t. d. može se znatno umanjiti broj nepoznanica i katkada se dobiva sistem jednadžbi, koji se daje uporabom naročitih načina riješiti razmjerno jednostavno.

Ako je nakon sviju ujednostavnjenja [*sic*] broj jednadžbi ipak prilično velik, zgodno je da se upotrijebi način postepenih aproksimacija.”

Čališev je, čini se, bio prvi koji je, početkom dvadesetih godina, primijenio iteracijski postupak u rješavanju okvirnih konstrukcija. U [73] Timošenko piše: „Tijekom idućega semestra Hardy Cross je prikazao svoju metodu proračuna okvirnih konstrukcija. Nikada nisam čuo o Hardyju Crossu, ali sam odmah uočio da je njegova metoda vrlo blizu Čališevljeve metode, koju sam dobro poznao, i prikaz koje je bio objavljen u Zagrebu

---

<sup>9</sup> Rodio se godine 1888. u Kupjansku u Rusiji. Na Visokoj tehničkoj školi u Kijevu diplomirao je građevinarstvo 1911. god. Nakon Prvoga svjetskog rata bio je asistent na Akademiji znanosti u Kijevu, ali se sa službenoga putovanja u Njemačku 1919. god. nije vratio u Sovjetski Savez. U ožujku 1921. god. postaje asistentom profesora Stjepana Timošenka (također emigranta iz Sovjetskoga Saveza) na Katedri za tehničku mehaniku Tehničke visoke škole u Zagrebu (osnovane 1919. god.). Disertacijom naslovljenom *Jednostavan način izračunavanja okvirnih nosača* doktorirao je u travnju 1922. god. Kao docent, a potom kao izvanredni i, od 1930. god., kao redoviti profesor predavao je *Nauku o čvrstoći/Otpornost materijala*, *Ispitivanje gradiva*, *Teoriju konstrukcija/Građevnu statiku* i *Teoriju elastičnosti* na Tehničkoj visokoj školi, Tehničkom fakultetu (uspostavljenom 1926. god. priključenjem Visoke škole zagrebačkom Sveučilištu) te na Arhitektonsko–građevinsko–geodetskom fakultetu (nakon podjele Tehničkoga fakulteta na samostalne fakultete 1956. god.). Do odlaska u mirovinu godine 1958. vodio je Zavod za ispitivanje gradiva (koji je godine 1920. osnovao profesor Timošenko). Umro je u Zagrebu 1970. godine.

prije gotovo deset godina. Očito se tu nije radilo o plagijatu, jedino o dilemi tko je bio prvi.” Čališevljev je rad, naime, prešao granice Kraljevine Jugoslavije tek godine 1936. kada je u njemačkom prijevodu predstavljen na kongresu IABSE-a u Berlinu.<sup>10</sup>

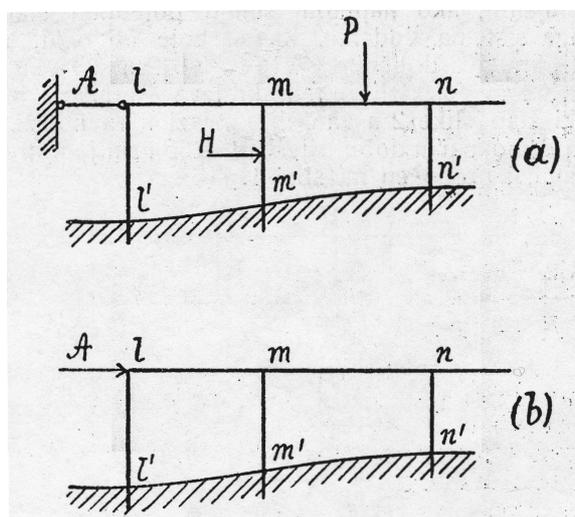
U članku [15] Čališev je opisao „kako se jednostavno mogu odrediti sporedna naprezanja kod rešetkastih nosača, koja nastaju uslijed krutosti spojeva u čvorovima, ako primjenimo [*sic*] na njih metodu postepenih aproksimacija”, a u [16] je pokazao „kako se može primjeniti isti način kod izračunavanja okvirnih konstrukcija.” U prikazu „hoda proračunavanja” slijedit ćemo izlaganje u drugome članku, uz prilagodbu predznakâ te osuvremenjivanje i usuglašavanje oznaka.

## 2.1. Postupak K. Čališeva za nepomične sisteme

Rješavamo sustav jednadžbi inženjerske metode pomakâ:

„Pod djelovanjem vanjskih sila čvorovi nosača zaokrenut će se u općenitom slučaju za neke kutove  $\varphi_{\diamond}$  i uz to pomaknuti za veličinu  $u$ , koja je za sve čvorove grede zajednička. (Kako je već spomenuto bilo, promatramo samo deformaciju uslijed savijanja štapova i zato ne uzimamo u obzir pomaknuća uslijed stlačivanja ili rastezanja štapova.) Rastavit ćemo našu zadaću u dva dijela. U prvom dijelu odredit ćemo momente na krajevima pojedinih štapova, koji nastaju uslijed djelovanja vanjskih sila, te ćemo uz to pretpostaviti, da je jedan čvor nosača spojen sa čvrstim tlom još pomoću horizontalnog štapa (štap  $A$ , sl. 25.a.), te će radi toga pomaknuće  $u$  biti jednako nuli.

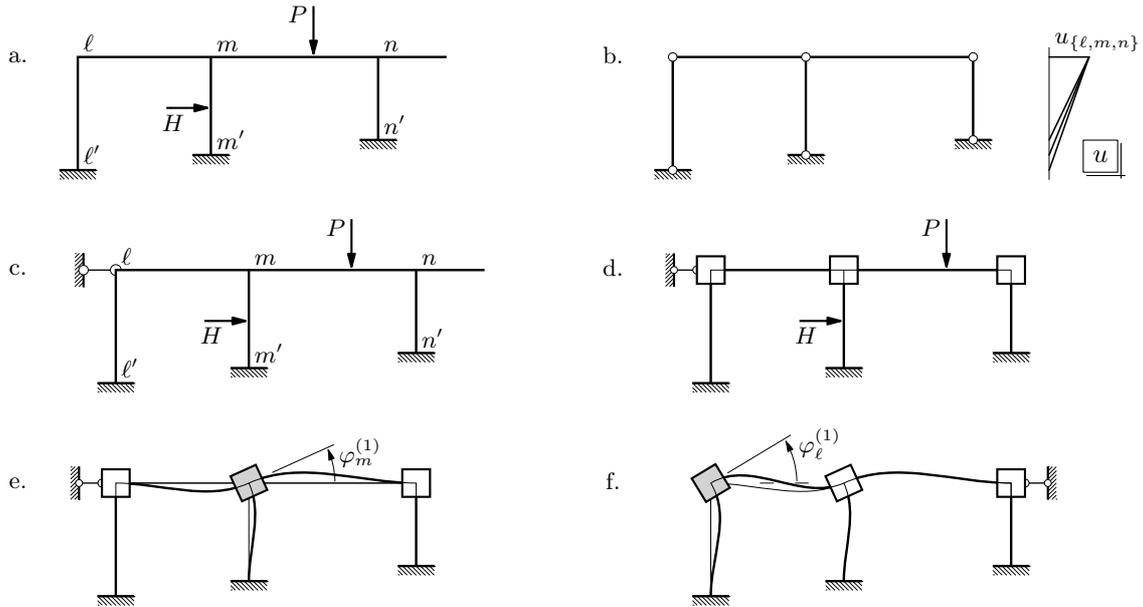
U drugom dijelu odredit ćemo momente, koji nastaju pod djelovanjem same horizontalne sile (sl. 25.b.), koja je jednaka i protusmjerna sili u štapu  $A$ .”



Slika 25. Iz članka K. Čališeva

Naime, prema principu superpozicije stvarno stanje sa slike 26.a. možemo prikazati zbrojem stanja prikazanih na slikama 25.a. i b. Svako od tih stanja možemo neovisno

<sup>10</sup> O dubini jezičnoga jaza ponešto govori navod naslova rada [16] u [39]: *Izračunavanje višestruko statički neodređenik sistema pomoću postepenik aproksimacija*.



Slika 26.

proračunati.<sup>11</sup> U prvome dijelu proračunavamo nepomični sistem (slike 25.a. odnosno, precrtano, 26.c.) koji nastaje tako da u zadanom sistemu (slika 26.a.) dodanom vezom spriječimo mogući translacijski pomak čvorova prikazan na slici 26.b.

„Promatrat ćemo sada proračunavanje sistema urisanog na slici 25.a. t.j. uz pretpostavku, da su centri čvorova nepomični. Da ujednostavimo tu zadaću odredit ćemo najprije za svaki štap momente  $\overline{M}_{\diamond, \diamond}$  na krajevima uz pretpostavku, da su krajevi upeti.” Prvi je korak rješavanja nepomičnoga sistema, prema tome, isti kao u inženjerskoj metodi pomakâ: uvodimo osnovni sistem u kojemu su spriječeni zaokreti čvorova (slika 26.d.) te utjecaj zadanih djelovanja obuhvaćavamo momentima upetosti. Ograničit ćemo se zasad na sisteme u kojima su svi čvorovi kruti.

Budući da je sistem nepomičan, momente u štapovima, osim zadanih djelovanja, uzrokuju još samo zaokreti čvorova u koje su štapovi priključeni, pa je ukupna vrijednost momenta na kraju  $i$  štapa  $\{i, j\}$  dana poznatim izrazom (izraz (1) na stranici 10.):

$$M_{i,j} = m_{i,j}(\varphi_i, \varphi_j) + \overline{M}_{i,j} = 4k_{\{i,j\}}\varphi_i + 2k_{\{i,j\}}\varphi_j + \overline{M}_{i,j}. \quad (40)$$

„Ako izlučimo iz naše konstrukcije”  $i$ -ti čvor, „onda na njega djeluju [...] momenti, koji su jednaki i protusmjerni momentima na krajevima štapova”  $i$ , možda, vanjski koncentrirani moment s vrijednošću  $M_i$ . „Iz uvjeta ravnotežja izlučenog čvora dobivamo, da je”

$$\sum_{j_i} (-M_{i,j_i}) + M_i = 0.$$

<sup>11</sup> Rastavljanje zadaće u dva dijela odgovara formulaciji inženjerske metode pomakâ koju je A. Bendixsen objavio 1914. godine. Danas uvriježeno oblikovanje sustava jednadžbi u kojima se kao nepoznanice pojavljuju i kutovi zaokretâ čvorova i (orijentirane) duljine pomakâ razradio je A. Ostenfeld „tek” 1921. godine [39].

„Znak  $\sum$  proteže se na sve krajeve štapova, koji pripadaju jednom čvoru.” Drugim riječima,  $j_i$  označava „druge krajeve” svih onih štapova kojima je  $i$  jedan kraj.

Uvrstimo li izraz za  $M_{i,j_i}$  i oznakom  $\mathfrak{M}_i$  obuhvatimo zbroj vrijednosti svih poznatih momenata,

$$\mathfrak{M}_i = \sum_{j_i} (-\overline{M}_{i,j_i}) + M_i, \quad (41)$$

jednadžba ravnoteže momenata u čvoru  $i$  poprima oblik

$$-\left(\sum_{j_i} 4 k_{\{i,j_i\}}\right) \varphi_i - \sum_{j_i} 2 k_{\{i,j_i\}} \varphi_{j_i} + \mathfrak{M}_i = 0. \quad (42)$$

„Kuteve  $\varphi_\diamond$  moramo odabrati tako, da zadovoljavaju jednadžbu (42) za svaki čvor konstrukcije. Ovu zadaću rješavamo [*sic*] putem postepenih aproksimacija.”

Rješavanje *postupnim* ili *uzastopnim aproksimacijama* znači, ukratko, sljedeće:

Umjesto da istodobno zadovoljimo sve jednadžbe tako da sve čvorove istodobno zaokrenemo za „prave” kutove (što je metafora za rješavanje sustava direktnim postupkom poput Gaussove eliminacije), zaokretat ćemo čvor po čvor zadovoljavajući time u svakom od njih zasebice uvjet ravnoteže momenata. No, zaokret čvora  $i$ , osim na  $i$ -tom kraju štapa  $\{i, j_i\}$ , uzrokuje moment  $i$  na kraju  $j_i$ , s vrijednošću

$$m_{j_i,i}(\varphi_i) = 2 k_{\{i,j_i\}} \varphi_i,$$

pa će uravnoteženje čvora  $i$  narušiti ravnotežu koju smo možda već ostvarili u čvoru  $j_i$ . Morat ćemo se stoga vraćati u čvorove koje smo već jednom, dvaput, triput, ... uravnotežili — postupak je *iteracijski*.

„Počinjemo sa onim čvorom, gdje očekujemo najveću, po apsolutnoj vrijednosti, veličinu  $\varphi_\diamond$ .” Neka je to čvor  $m$ . Ako su zaokreti svih čvorova osim čvora  $m$  spriječeni (slika 26.e.), tj. ako je  $\varphi_j = 0$  za  $j \neq m$ , jednadžba ravnoteže momenata u tom čvoru postaje

$$-\left(4 \sum_{j_m} k_{\{m,j_m\}}\right) \varphi_m + \mathfrak{M}_m = 0.$$

Iz te je jednadžbe

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\mathfrak{M}_m}{4 \sum_{j_m} k_{\{m,j_m\}}}. \quad (43)$$

Zaokrenemo li, dakle, čvor  $m$  za kut  $\varphi_m^{(1)}$ , momenti će u tom čvoru biti u ravnoteži. Međutim, kako je uvjet ravnoteže momenata zadovoljen u čvoru  $m$ , ali ne i u ostalim čvorovima, dobili smo tek prvu približnu vrijednost kuta, pa smo oznaci  $\varphi_m$  kao gornji indeks dodali (1). U općem ćemo slučaju približnu vrijednost kuta  $\varphi_i$  dobivenu nakon  $n_i$  uravnoteženja označiti s  $\varphi_i^{(n_i)}$ .

Prelazimo na neki drugi čvor, primjerice  $\ell$ . Ponovo je najpovoljnije odabrati čvor u kojem „očekujemo najveću, po apsolutnoj vrijednosti, veličinu  $\varphi$ ”. Čvor  $m$  zaokrenut je za kut  $\varphi_m^{(1)}$ , ali ćemo njegov dalji zaokret spriječiti. Sada su spriječeni zaokreti svih čvorova osim čvora  $\ell$  (slika 26.f.), pa je jednadžba ravnoteže momenata u tom čvoru:

$$-\left(4 \sum_{j_\ell} k_{\{\ell,j_\ell\}}\right) \varphi_\ell - 2 k_{\{\ell,m\}} \varphi_m^{(1)} + \mathfrak{M}_\ell = 0;$$

uočite utjecaj kuta zaokreta  $\varphi_m^{(1)}$ . Slijedi:

$$\varphi_\ell^{(1)} = \frac{\mathfrak{M}_\ell^{(0)}}{4 \sum_{j_\ell} k_{\{\ell, j_\ell\}}},$$

gdje je

$$\mathfrak{M}_\ell^{(0)} = -2 k_{\{\ell, m\}} \varphi_m^{(1)} + \mathfrak{M}_\ell.$$

Neka su u nekom kasnijem koraku  $\varphi_j^{(n_j)}$  približne vrijednosti kutova pri ponovnom dolasku u čvor  $i$ . (Čvorove ne treba „obilaziti“ uvijek istim redoslijedom, pa u općem slučaju  $n_j$  neće biti jednaki u svim čvorovima.) Kako smo uravnoteženjem susjednih čvorova narušili ravnotežu u čvoru  $i$ , zbroj vrijednosti momenata koji na nj djeluju neće biti jednak nuli:

$$-\left(4 \sum_{j_i} k_{\{i, j_i\}}\right) \varphi_i^{(n_i)} - \sum_{j_i} 2 k_{\{i, j_i\}} \varphi_{j_i}^{(n_{j_i})} + \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i^{(n_i)}; \quad (44)$$

neuravnoteženi moment, čija je vrijednost  $\mathfrak{M}_i^{(n_i)}$ , nazivamo *rezidualnim momentom*<sup>12</sup>. Prave vrijednosti koje zadovoljavaju jednadžbu (42) razlikuju se od kutova  $\varphi_\diamond^{(n_\diamond)}$  za *priraste*  $\Delta\varphi_\diamond$ :

$$-\left(4 \sum_{j_i} k_{\{i, j_i\}}\right) \left(\varphi_i^{(n_i)} + \Delta\varphi_i\right) - \sum_{j_i} 2 k_{\{i, j_i\}} \left(\varphi_{j_i}^{(n_{j_i})} + \Delta\varphi_{j_i}\right) + \mathfrak{M}_i = 0.$$

Oduzmemo li od te jednadžbe jednadžbu (44), dobivat ćemo

$$-\left(4 \sum_{j_i} k_{\{i, j_i\}}\right) \Delta\varphi_i - \sum_{j_i} 2 k_{\{i, j_i\}} \Delta\varphi_{j_i}^{(n_{j_i})} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0. \quad (45)$$

Da čvor  $i$  ponovo uravnotežimo, spriječit ćemo, kao i ranije, daljnje zaokretanje svih ostalih čvorova, a njega dodatno zaokrenuti, pa je prirast kuta potreban za uravnoteženje

$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{\mathfrak{M}_i^{(n_i)}}{4 \sum_{j_i} k_{\{i, j_i\}}}, \quad (46)$$

tako da je približna vrijednost kuta zaokreta čvora  $i$  zaokreta nakon  $n_i + 1$  uravnoteženja

$$\varphi_i^{(n_i+1)} = \varphi_i^{(n_i)} + \Delta\varphi_i^{(n_i+1)}. \quad (47)$$

Kako pri svakom uravnoteženju čvora izračunavamo samo prirast kuta zaokreta, iteracija je *relaksacijska*.

Izrazi za  $\varphi_m^{(1)}$  i  $\varphi_\ell^{(1)}$  samo su posebni slučajevi općega izraza (46): na početku proračuna svi su  $\varphi_i^{(0)} = 0$ , pa iz izraza (47) neposredno slijedi  $\varphi_i^{(1)} = \Delta\varphi_i^{(1)}$ ; izraz (44) za  $i = m$  daje  $\mathfrak{M}_m^{(0)} = \mathfrak{M}_m$ , a nakon prvoga uravnoteženja čvora  $m$  u izraz za  $\mathfrak{M}_\ell^{\{0\}}$  osim  $\mathfrak{M}_\ell$  ulazi i utjecaj kuta  $\varphi_m^{(1)}$ .

<sup>12</sup> Općenito se neuravnotežene sile nazivaju *rezidualnim silama* ili, kraće, *rezidualima*. Prema ANIČEVU *Velikom rječniku hrvatskoga jezika* rezidualan je „koji ostaje, preostaje, koji je zaostao; ostalni, preostali, zaostali“.

Jednadžbu (45), koja je istoga oblika kao (42), nazivamo rezidualnom jednadžbom. Indukcijom se, pomoću izrazâ (44) te (47) i (46), napisanih za  $\varphi_i^{(n_i)}$  i  $\Delta\varphi_i^{(n_i)}$  i uz  $\mathfrak{M}_i^{(0)} = \mathfrak{M}_i$ , može pokazati da je

$$\mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \sum_{j_i} 2 k_{\{i,j_i\}} \Delta\varphi_{j_i}^{(n_{j_i})}, \quad (48)$$

pri čemu zbrajamo priraste kutova zaokretâ čvorova koji su uravnoteženi nakon posljednjega uravnoteženja čvora  $i$ .

Poredamo li jednadžbe (42) redoslijedom kojim smo numerirali čvorove te uvedemo oznake  $a_{i,i} = \sum_{j_i} 4 k_{\{i,j_i\}}$ ,  $a_{i,j_i} = a_{j_i,i} = 2 k_{\{i,j_i\}}$  i  $b_i = \mathfrak{M}_i$ , u Čališevljevu ćemo postupku lako prepoznati Gauss–Seidelov iteracijski postupak rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Prema matematičkoj teoriji iteracijskih postupaka [58], taj postupak konvergira ako je sustav strogo dijagonalno dominantan ( $|a_{i,i}| > \sum_{j_i \neq i} |a_{i,j_i}|$  za sve  $i$ ) ili ako je nesvodivo dijagonalno dominantan (ne može se rastaviti na dva neovisna sustava i  $|a_{i,i}| \geq \sum_{j_i \neq i} |a_{i,j_i}|$  za sve  $i$ , uz  $>$  za barem jedan  $i$ ). U jednadžbi (42) koeficijent uz  $\varphi_i$  dva puta je veći od zbroja ostalih, pa je očito da je sustav jednadžbi ravnoteže momenata u čvorovima strogo dijagonalno dominantan. Štoviše, može se pokazati da brzina konvergencije ovisi o omjeru  $|a_{i,i}| / \sum_{j_i \neq i} |a_{i,j_i}|$ ; omjer 2 može se smatrati vrlo povoljnim, tako da „[v]eć druga aproksimacija daje obično za praktičnu svrhu dovoljnu točnost”.

U uvodu članka Čališev ističe: „Kao glavnu zadaću kod proračunavanja okvirnih konstrukcija smatrat ćemo određivanje momenata, koji djeluju na krajevima pojedinih štapova.” A ipak, u njegovu su postupku nepoznanice kutovi zaokreta čvorova, a vrijednosti momenata izračunavaju se naknadno, posredno — približne vrijednosti momenata na krajevima štapova dobivamo uvrštavanjem konačnih približnih vrijednosti kutova u izraz (40). Da se vrijednosti momenata na krajevima štapova nepomičnoga sistema mogu izravno izračunati nekoliko je godina kasnije uočio Hardy Cross [13, 14].

## 2.2. Crossov postupak

Metoda Hardyja Crossa postala je vrlo raširena u Americi, možda čak i previše. Studenta dakako treba poučiti kako se primjenjuje metoda, ali to nije dovoljno. On treba razumjeti i zbog čega metoda vodi rješenju. On treba znati da se metoda sastoji od uzastopnih aproksimacija rješenja sustava linearnih jednadžbi. Ali u američkim školama u to vrijeme podučavali su uglavnom kako se računa, a ne zbog čega proračun vodi rješenju.

S. P. Timošenko: *As I Remember* [73]

Vežu s Crossovim postupkom Čališev je opisao u udžbeniku [17]: „Određivanje kutova  $\varphi_\diamond$  ima zapravo prolazno značenje. Svakoj promjeni  $\varphi_\diamond$  odgovara promjena momenata koji djeluju na krajeve štapova. Iz osnovne formule (40) za momente koji djeluju na krajeve štapa vidimo da promjena kuta  $\varphi_i$  zaokreta čvora  $i$  ima za posljedicu promjenu momenata, koji djeluju na krajeve štapova, koji pripadaju tom čvoru za veličinu

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = 4 k_{\{i,j_i\}} \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = - \frac{4 k_{\{i,j_i\}}}{\sum_{s_i} 4 k_{\{i,s_i\}}} \mathfrak{M}_i^{(n_i)} \quad (49)$$

i da se na protivnim krajevima tih štapova moment promijeni za veličinu

$$\Delta M_{j_i,i}^{(n_i+1)} = 2 k_{\{i,j_i\}} \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)}. \quad (50)$$

[...] Prema tome brojčano izračunavanje kutova  $\varphi_\diamond$  možemo izostaviti, te računati dodatne momente prema formulama (49) i (50), kako to čini prof. Cross.”

Prve jednakosti u izrazima (49) i (50) „slijede” iz izraza (40) zato što su pri uravnoteženju čvora  $i$  zaokreti svih ostalih čvorova spriječeni, pa su  $\Delta\varphi_{j_i}^{n_{j_i}} = 0$ . Drugu jednakost u (49) dobivamo uvrštavanjem izraza (46) za  $\Delta\varphi_i^{\{n_i+1\}}$ .

Zbroj koeficijenata krutosti svih štapova koji su u nj priključeni,

$$k_i = \sum_{j_i} 4 k_{\{i,j_i\}}, \quad (51)$$

nazvat ćemo *koeficijentom krutosti čvora  $i$* , a razlomak

$$\mu_{i,j_i} = \frac{4 k_{\{i,j_i\}}}{k_i} \quad (52)$$

*razdjelnim koeficijentom* u čvoru  $i$  za štap  $\{i, j_i\}$ . Očito je

$$\sum_{j_i} \mu_{i,j_i} = 1.$$

Sada je

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{i,j_i} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}, \quad (53)$$

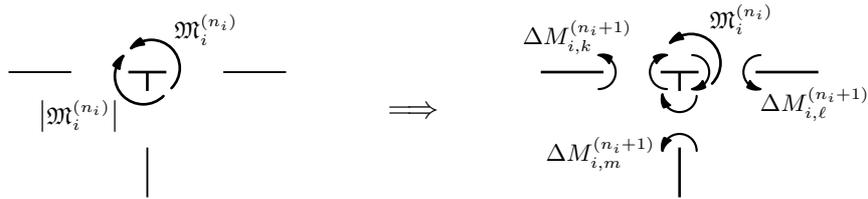
pa je lako vidjeti da je

$$\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mathfrak{M}_i^{(n_i)},$$

odnosno

$$-\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0. \quad (54)$$

Prema tome, čvor  $i$  možemo uravnotežiti tako da na njega dodamo moment čiji je intenzitet jednak intenzitetu rezidualnoga momenta  $\mathfrak{M}_i^{(n_i)}$ , a smisao vrtnje suprotan, te ga razdijelimo na priključene štapove u omjeru njihovih krutosti (slika 27.). Crossov se postupak stoga naziva i *postupkom razdiobe momenata* ili *postupkom raspodjele momenata*.



Slika 27.

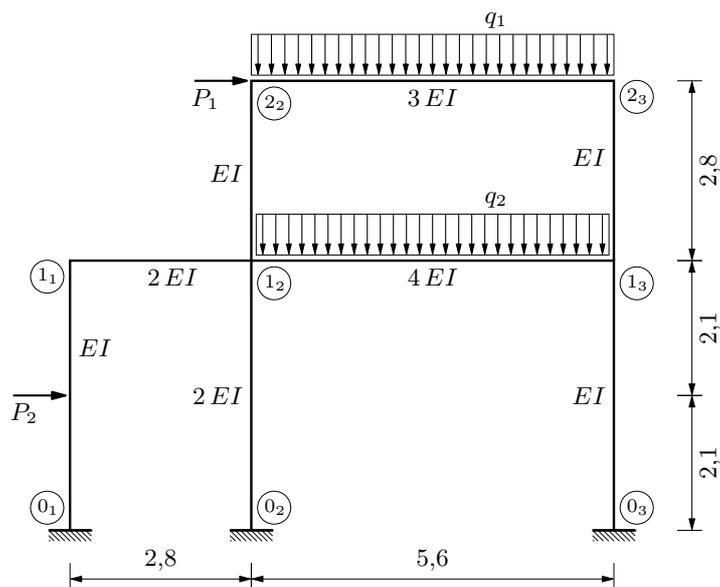
Izraz (50) pokazuje da nakon uravnoteženja čvora  $i$  treba na drugi kraj svakoga priključenoga štapa dodati moment čija je vrijednost jednaka polovini vrijednosti momenta s kraja  $i$ . Kažemo i da „prenosimo pola momenta” pa je  $1/2$  *prijenosni koeficijent*.

Proračun razmjerno brzo konvergira, posebice ako se uvijek uravnotežuje čvor u kojemu je intenzitet rezidualnoga momenata najveći. Nastavljamo ga sve dok vrijednosti neuravnoteženih momenata ili vrijednosti momenata koje se prenose ne postanu dovoljno male da se mogu zanemariti.

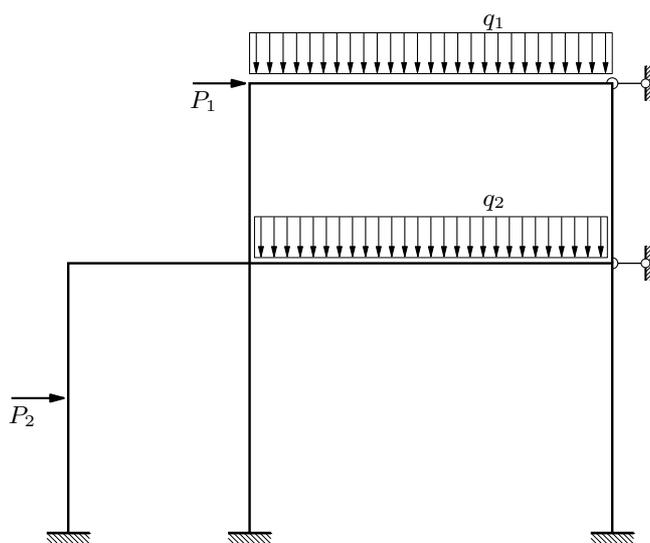
I Crossov je postupak relaksacijski, jer pri svakom uravnoteženju izračunavamo priraste vrijednosti momenata. Konačne vrijednosti momenata dobivamo tako da na svakom kraju zbrojimo vrijednosti svih momenata — momenata upetosti, raspodijeljenih i prenesenih momenata — koji su se na njemu pojavili.

### 2.2.1. Primjer

Postupak ćemo detaljnije prikazati na primjeru sa slike 28. Crossov je postupak, kao i u prethodnom odjeljku opisani „prvi dio” Čališevljeva postupaka, primjenjiv samo na nepomične sisteme. Želimo li riješiti sistem u kojem postoji mogućnost translacijskih



Slika 28.



Slika 29.

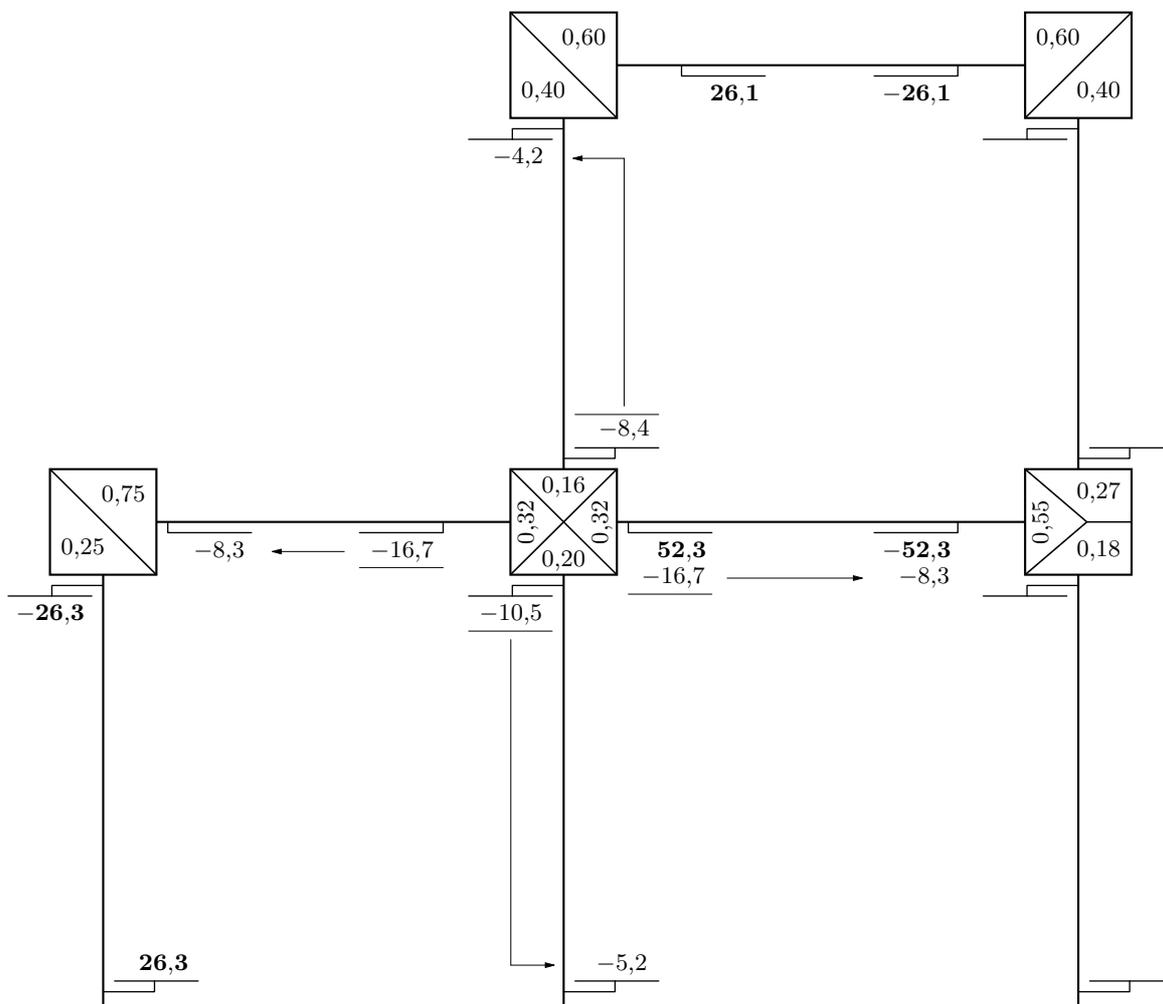
pomaka, proračun treba provesti, kao što Čališev navodi, u dva dijela. U prvome dijelu rješavamo nepomični sistem koji nastaje tako da dodanim vezama, najčešće s podlogom, spriječimo sve pomake (slika 29.).

Proračun provodimo na shemi sistema prikazanoj na slici 30. U kvadratiće (ili kružiće) u čvorovima prije početka proračuna unosimo, prema priključenim štapovima, razdjelne koeficijente. Na krajeve greda i stupova upisujemo vrijednosti pripadnih momenata upetosti, a potom, slijedom kojim se javljaju u proračunu, vrijednosti raspodijeljenih i prenesenih momenata.

Koeficijenti krutosti štapova su:

$$k_{\{0_1,1_1\}} = \frac{EI}{4,2} = 0,24 EI, \quad k_{\{0_2,1_2\}} = \frac{2EI}{4,2} = 0,48 EI, \quad k_{\{0_3,1_3\}} = 0,24 EI,$$

$$k_{\{1_2,2_2\}} = \frac{EI}{2,8} = 0,36 EI, \quad k_{\{1_3,2_3\}} = 0,36 EI,$$



Slika 30.

$$k_{\{1_1,1_2\}} = \frac{2 EI}{2,8} = 0,71 EI, \quad k_{\{1_2,1_3\}} = \frac{4 EI}{5,6} = 0,71 EI, \quad k_{\{2_2,2_3\}} = \frac{3 EI}{5,6} = 0,54 EI,$$

pa su koeficijenti krutosti čvorova i razdjelni koeficijenti:

u čvoru 1<sub>1</sub>:

$$k_{1_1} = 4 k_{\{0_1,1_1\}} + 4 k_{\{1_1,1_2\}} = 3,80 EI,$$

$$\mu_{1_1,0_1} = \frac{4 k_{\{0_1,1_1\}}}{k_{1_1}} = 0,25,$$

$$\mu_{1_1,1_2} = \frac{4 k_{\{1_1,1_2\}}}{k_{1_1}} = 0,75;$$

u čvoru 1<sub>2</sub>:

$$k_{1_2} = 4 k_{\{1_1,1_2\}} + 4 k_{\{0_2,1_2\}} + 4 k_{\{1_2,1_3\}} + 4 k_{\{1_2,2_2\}} = 9,04 EI,$$

$$\mu_{1_2,1_1} = \frac{4 k_{\{1_1,1_2\}}}{k_{1_2}} = 0,31 \implies 0,32,$$

$$\mu_{1_2,0_2} = \frac{4 k_{\{0_2,1_2\}}}{k_{1_2}} = 0,21 \implies 0,20,$$

$$\mu_{1_2,1_3} = \frac{4 k_{\{1_2,1_3\}}}{k_{1_2}} = 0,31 \implies 0,32,$$

$$\mu_{1_2,2_2} = \frac{4 k_{\{1_2,2_2\}}}{k_{1_2}} = 0,16;$$

u čvoru 1<sub>3</sub>:

$$k_{1_3} = 4 k_{\{1_2,1_3\}} + 4 k_{\{0_3,1_3\}} + 4 k_{\{1_3,2_3\}} = 5,24 EI,$$

$$\mu_{1_3,1_2} = \frac{4 k_{\{1_2,1_3\}}}{k_{1_3}} = 0,54 \implies 0,55,$$

$$\mu_{1_3,0_3} = \frac{4 k_{\{0_3,1_3\}}}{k_{1_3}} = 0,18,$$

$$\mu_{1_3,2_3} = \frac{4 k_{\{1_3,2_3\}}}{k_{1_3}} = 0,27;$$

u čvoru 2<sub>2</sub>:

$$k_{2_2} = 4 k_{\{1_2,2_2\}} + 4 k_{\{2_2,2_3\}} = 3,60 EI,$$

$$\mu_{2_2,1_2} = \frac{4 k_{\{1_2,2_2\}}}{k_{2_2}} = 0,40,$$

$$\mu_{2_2,2_3} = \frac{4 k_{\{2_2,2_3\}}}{k_{2_2}} = 0,60;$$

u čvoru 2<sub>3</sub>:

$$k_{2_3} = 4 k_{\{2_2,2_3\}} + 4 k_{\{1_3,2_3\}} = 3,60 EI,$$

$$\mu_{2_3,2_2} = \frac{4 k_{\{2_2,2_3\}}}{k_{2_3}} = 0,60,$$

$$\mu_{2_3,1_3} = \frac{4 k_{\{1_3,2_3\}}}{k_{2_3}} = 0,40.$$

U čvorovima  $1_2$  i  $1_3$  prilagodili smo vrijednosti nekih koeficijenta kako bi njihovi zbrojevi bili jednaki 1.

Ako su  $q_1 = 10 \text{ kN/m}'$ ,  $q_2 = 20 \text{ kN/m}'$  i  $P_1 = P_2 = 50 \text{ kN}$ , vrijednosti su momenata upetosti:

$$\begin{aligned}\overline{M}_{0_1,1_1} &= -\overline{M}_{1_1,0_1} = \frac{P_2 \ell_{\{0_1,1_2\}}}{8} = \frac{50 \cdot 4,2}{8} = 26,3 \text{ kNm}, \\ \overline{M}_{1_2,1_3} &= -\overline{M}_{1_3,1_2} = \frac{q_2 \ell_{\{1_2,1_3\}}^2}{12} = \frac{20 \cdot 5,6^2}{12} = 52,3 \text{ kNm}, \\ \overline{M}_{2_2,2_3} &= -\overline{M}_{2_3,2_2} = \frac{q_1 \ell_{\{2_2,2_3\}}^2}{12} = \frac{10 \cdot 5,6^2}{12} = 26,1 \text{ kNm}.\end{aligned}$$

U shemu na slici 30. te su vrijednosti upisane debljim znamenkama.

Najveće intenzitete imaju neuravnoteženi momenti u čvorovima  $1_2$  i  $1_3$ : na čvor  $1_2$  djeluje moment čija je vrijednost

$$\mathfrak{M}_{1_2} = -\overline{M}_{1_2,1_3} = -52,3 \text{ kNm},$$

a na čvor  $1_3$  moment s vrijednošću

$$\mathfrak{M}_{1_3} = -\overline{M}_{1_3,1_2} = 52,3 \text{ kNm}.$$

Prvo ćemo uravnotežiti čvor  $1_2$ . Vrijednost momenta kojim pri zaokretu svojih krajeva priključeni štapovi moraju na nj djelovati je 52,3, što znači da zbroj vrijednosti momenata na krajevima tih štapova mora biti  $-52,3$ :

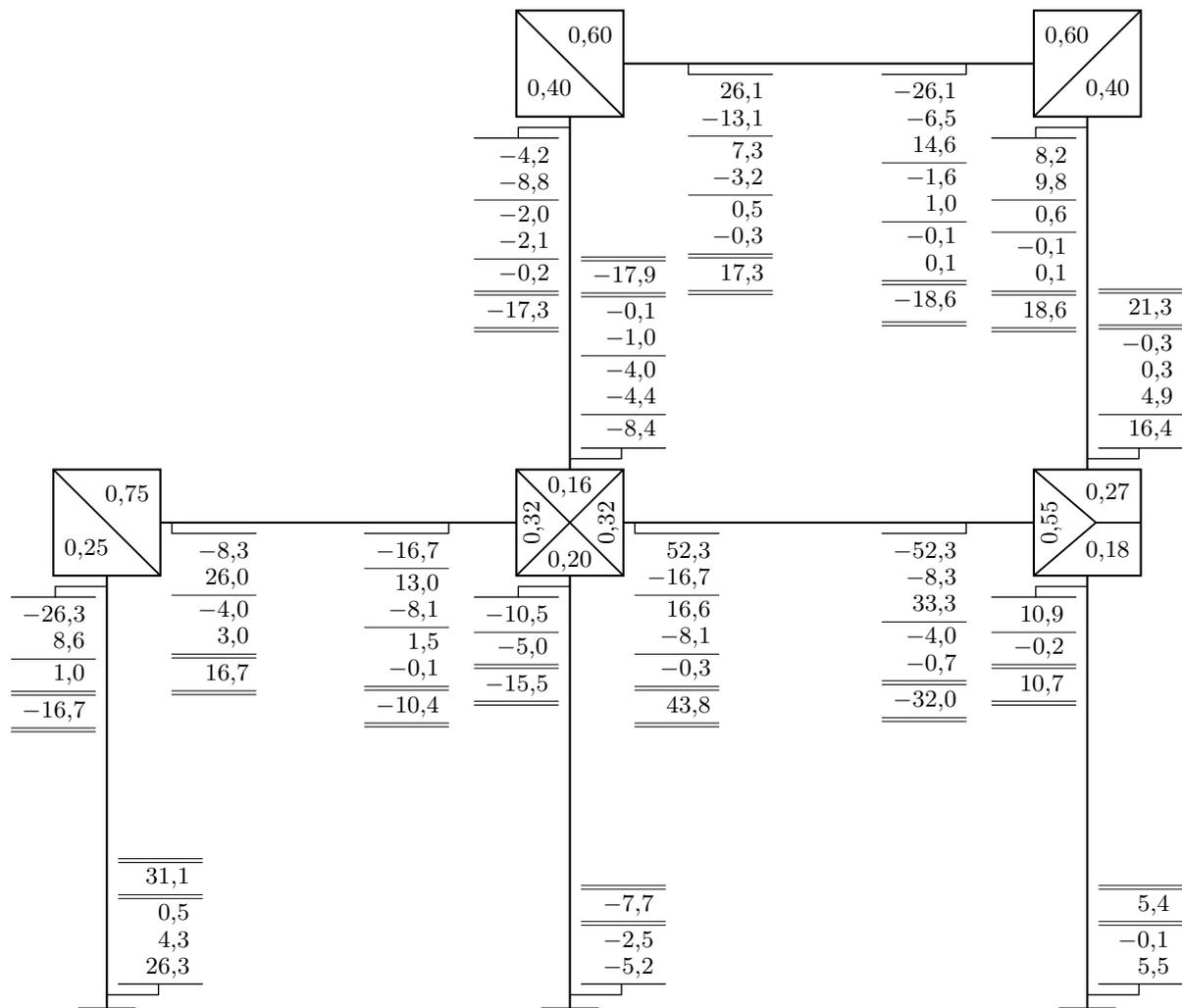
$$\begin{aligned}\Delta M_{1_2,1_1}^{\{1\}} &= \mu_{1_2,1_1} \cdot (-52,3) = 0,32 \cdot (-52,3) = -16,7, \\ \Delta M_{1_2,0_2}^{\{1\}} &= \mu_{1_2,0_2} \cdot (-52,3) = 0,20 \cdot (-52,3) = -10,5, \\ \Delta M_{1_2,1_3}^{\{1\}} &= \mu_{1_2,1_3} \cdot (-52,3) = 0,32 \cdot (-52,3) = -16,7, \\ \Delta M_{1_2,2_2}^{\{1\}} &= \mu_{1_2,2_2} \cdot (-52,3) = 0,16 \cdot (-52,3) = -8,4, \\ &\hline & -52,3.\end{aligned}$$

Te vrijednosti upisujemo na krajeve  $1_2$  odgovarajućih štapova. Čvor  $1_2$  sada je u ravnoteži. Na shemi to označavamo podcrtavanjem upisanih vrijednosti. Polovine vrijednosti raspodijeljenih momenata prenosimo i upisujemo na druge krajeve štapova. Tako na kraj  $1_3$  elementa  $\{1_2, 1_3\}$  dolazi moment čija je vrijednost  $\Delta M_{1_2,1_3}^{\{1\}}/2 = -16,7/2 = -8,3$ .

Nastavak proračuna prikazan je na slici 31.

Po intenzitetu najveći neuravnoteženi moment sada je u čvoru  $1_3$ : štap  $\{1_2, 1_3\}$  djeluje na nj momentom s vrijednošću

$$\mathfrak{M}_{1_3}^{\{0\}} = \mathfrak{M}_{1_3} - \frac{\Delta M_{1_2,1_3}^{\{1\}}}{2} = 52,3 - (-8,3) = 60,6 \text{ kNm}.$$



Slika 31.

Za uravnoteženje mora stoga vrijednost momenta kojim će štapovi pri zaokretu krajeva djelovati na nj biti  $-60,6$ , pa zbroj vrijednosti momenata na priključenim krajevima mora biti  $60,6$ :

$$\begin{aligned}\Delta M_{13,12}^{\{1\}} &= \mu_{13,12} \cdot 60,6 = 0,55 \cdot 60,6 = 33,3, \\ \Delta M_{13,23}^{\{1\}} &= \mu_{13,23} \cdot 60,6 = 0,27 \cdot 60,6 = 16,4, \\ \Delta M_{13,03}^{\{1\}} &= \mu_{13,03} \cdot 60,6 = 0,18 \cdot 60,6 = 10,9, \\ & \underline{\underline{60,6}}.\end{aligned}$$

Vrijednosti koje izračunavamo pri raspodijeli i pri prenošenju momenata i koje upisujemo u shemu, vrijednosti su prirasta momenata na krajevima štapova. Štapovi na čvor djeluju momentima suprotna smisla vrtnje, što znači da su predznaci njihovih vrijednosti suprotni od predznaka upisanih vrijednosti. Ukupna je vrijednost svih momenata kojima

u nekom koraku proračuna priključeni štapovi djeluju na čvor  $i$

$$\mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \sum_{j_i} \left( -M_{i,j_i}^{(n_i)} \right).$$

Nije li  $\mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0$ , čvor  $i$  nije u ravnoteži. Čvor uravnotežujemo dodavanjem momenta čiji je smisao vrtnje suprotan od smisla vrtnje neuravnoteženoga momenta, pa njegova vrijednost ima suprotni predznak:  $-\mathfrak{M}_i^{(n_i)}$ . Nakon raspodjele tog momenta u omjerima krutosti,

$$\mu_{i,j_i} \left( -\mathfrak{M}_i^{(n_i)} \right) = -\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)},$$

predznake dobivenih vrijednosti treba prije upisivanja još jednom promijeniti — izračunane vrijednosti  $-\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)}$  vrijednosti su momenata kojima štapovi djeluju na čvor, dok su momenti na krajevima štapova momenti kojima čvor djeluje na štapove. Prema tome, predznaci vrijednosti mijenjaju se triput. Očito je da će učinak biti isti promijenimo li ih samo jednom — budući da vrijednost momenta koji se dodaje u čvor ima predznak suprotan od predznaka vrijednosti neuravnoteženoga momenta, zbroj vrijednosti uravnotežujućih/raspodijeljenih momenata na krajevima štapova mora imati predznak koji je suprotan predznaku zbroja vrijednosti momenata prije uravnoteženja te je

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{i,j_i} \left( -\sum_{s_i} M_{i,s_i}^{(n_i)} \right). \quad (55)$$

Primjerice, zbroj vrijednosti momenta upetosti na kraju  $1_1$  štapa  $\{0_1, 1_1\}$  i momenta prenesena na kraj  $1_1$  štapa  $\{1_1, 1_2\}$  nakon uravnoteženja je  $-26,3 + (-8,3) = -34,6$  pa u čvoru  $1_1$  raspodjeljujemo vrijednost  $34,6$ :

$$\Delta M_{1_1,1_2}^{(1)} = \mu_{1_1,1_2} \cdot 34,6 = 0,75 \cdot 34,6 = 26,0,$$

$$\Delta M_{1_1,0_1}^{(1)} = \mu_{1_1,0_1} \cdot 34,6 = 0,25 \cdot 34,6 = 8,6.$$

U sljedeća dva koraka uravnotežujemo čvorove  $2_2$  i  $2_3$ ; odabiremo uvijek čvor u kojemu rezidualni moment ima najveći intenzitet. Raspodijeljene vrijednosti upisujemo na odgovarajuće krajeve štapova, a polovine tih vrijednosti prenosimo na druge krajeve. Nakon upisa raspodijeljenih vrijednosti podcrtavanjem označavamo da je čvor uravnotežen — pri ponovnu dolasku u taj čvor zbrojiti treba samo vrijednosti ispod najdonjih crta, jer je zbroj svih vrijednosti iznad njih jednak nuli. Tako pri povratku u čvor  $1_2$  zbrajamo samo vrijednosti koje su na u nj priključene krajeve prenesene nakon uravnoteženja čvorova  $1_3$ ,  $1_1$  i  $2_2$ :  $16,6 + 13,0 - 4,4 = 25,2$ ; raspodjeljujemo, dakako, vrijednost  $-25,2$ .

I tako dalje. U nastavku je proračuna (slika 31.) redosljed obilaženja čvorova:  $2_2$ ,  $1_1$ ,  $2_3$ ,  $1_3$ ,  $2_2$ ,  $2_3$ ,  $1_2$ . U zadnjem je koraku zbroj vrijednosti na u čvor  $1_2$  priključenim krajevima  $1,5 - 0,3 - 1,0 - 0,1 = 0,1$  pa vrijednost  $-0,1$  bez dalje raspodjele upisujemo na kraj štapa  $\{1_1, 1_2\}$ . (Ne raspodjeljujemo li posljednju vrijednost, upisat ćemo je uvijek na kraj s najvećim razdjelnim koeficijentom.)

Treba još na svakom kraju zasebice zbrojiti sve vrijednosti koje su na taj kraj upisane. Ti su zbrojevi istaknuti upisom između parova dvostrukih linija.

No, kao što smo već rekli, dobivene vrijednosti momenata nisu konačno rješenje — za primjenu Crossova postupka morali smo sistem pridržati. U dodanim će se pridržanjima pojaviti reakcije koje, naravno, mijenjaju „sliku” raspodjele unutarnjih sila u okviru.

Vrijednosti reakcija u dodanim vezama izračunat ćemo iz uvjetâ ravnoteže horizontalnih sila na pogodno odabranim dijelovima okvira.

Za izračunavanje vrijednosti  $R_2$  reakcije u čvoru 2<sub>3</sub> prerezat ćemo stupove {1<sub>2</sub>, 2<sub>2</sub>} i {1<sub>3</sub>, 2<sub>3</sub>} neposredno ispod čvorova 2<sub>2</sub> i 2<sub>3</sub> i napisati jednadžbu ravnoteže horizontalnih sila za dio iznad presjekâ (slika 32.a.). Iz te jednadžbe slijedi

$$R_2 = T_{22,12} + T_{23,13} - P_1.$$

Vrijednosti  $T_{22,12}$  i  $T_{23,13}$  poprečnih sila pri vrhu stupova izračunat ćemo iz uvjetâ ravnoteže momenata na stupovima oko njihova dna (slika c.). Iz jednadžbe ravnoteže momenata može se izvesti opći izraz za poprečnu silu u neopterećenu stupu:

$$T_{i_j, i_{j-1}} = \frac{1}{h_{\{i-1, i\}}} (M_{i_j, i_{j-1}} + M_{i_{j-1}, i_j}). \quad (56)$$

U našem su primjeru:

$$T_{22,12} = \frac{1}{h_{\{1,2\}}} (M_{22,12} + M_{12,22}) = \frac{1}{2,8} (-17,3 - 17,9) = -12,6 \text{ kN},$$

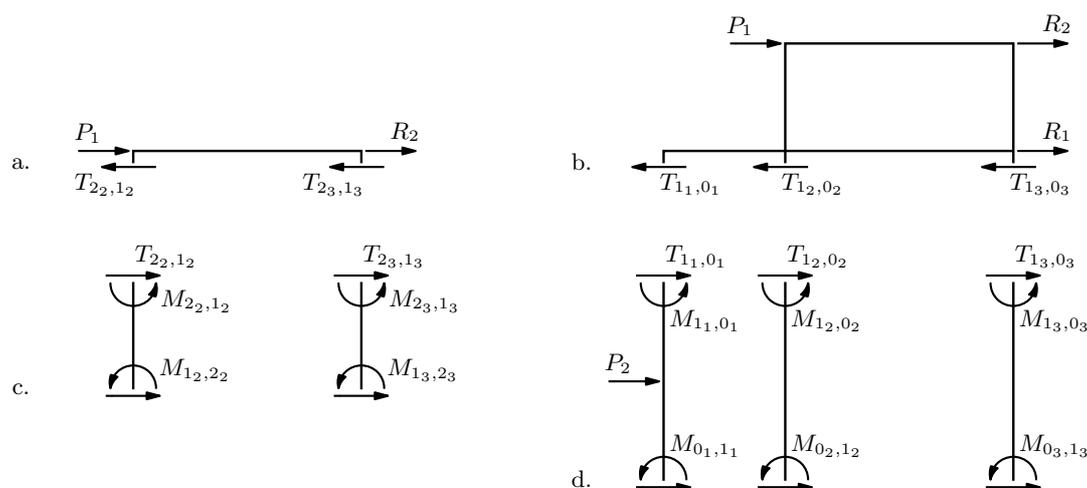
$$T_{23,13} = \frac{1}{h_{\{1,2\}}} (M_{23,13} + M_{13,23}) = \frac{1}{2,8} (18,6 + 21,3) = 14,3 \text{ kN},$$

pa je

$$R_2 = -12,6 + 14,3 - 50,0 = -48,3 \text{ kN}.$$

Vrijednost  $R_1$  reakcije u čvoru 1<sub>3</sub> izračunat ćemo iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila na dijelu nosača iznad presjeka kroz stupove {0<sub>1</sub>, 1<sub>1</sub>}, {0<sub>2</sub>, 1<sub>2</sub>} i {0<sub>3</sub>, 1<sub>3</sub>} neposredno ispod čvorova 1<sub>1</sub>, 1<sub>2</sub> i 1<sub>3</sub> (slika 32.b.). Jednadžba ravnoteže daje

$$R_1 = T_{11,01} + T_{12,02} + T_{13,03} - P_1 - R_2.$$



Slika 32.

Vrijednosti  $T_{1,0_1}$ ,  $T_{1_2,0_2}$  i  $T_{1_3,0_3}$  izračunavamo, kao i ranije, iz jednadžbi ravnoteže momenata na stupovima (slika d.):

$$T_{1_2,0_2} = \frac{1}{h_{\{0,1\}}} (M_{1_2,0_2} + M_{0_2,1_2}) = \frac{1}{4,2} (-15,5 - 7,7) = -5,5 \text{ kN},$$

$$T_{1_3,0_3} = \frac{1}{h_{\{0,1\}}} (M_{1_3,0_3} + M_{0_3,1_3}) = \frac{1}{4,2} (10,7 + 5,4) = 3,8 \text{ kN};$$

kako na stup  $\{0_1, 1_1\}$  djeluje i sila  $P_2$  (u polovini visine), jednadžba je ravnoteže momenata u odnosu na dno stupa

$$-T_{1_1,0_1} \cdot h_{\{0,1\}} + M_{1_1,0_1} + M_{0_1,1_1} - P_2 \cdot \frac{h_{\{0,1\}}}{2} = 0,$$

a odatle je

$$T_{1_1,0_1} = \frac{1}{4,2} (-16,7 + 31,1 - 50,0 \cdot 2,1) = -21,6 \text{ kN}.$$

Uvrštavanje dobivenih vrijednosti u izraz za  $R_1$  daje

$$R_1 = -21,6 - 5,5 + 3,8 - 50,0 + 48,3 = -25,0 \text{ kN}.$$

U nastavku proračuna opteretit ćemo okvir silama jednakih intenziteta i pravaca djelovanja, a suprotnih orijentacija i tako poništiti reakcije  $\bar{R}_1$  i  $\bar{R}_2$ . Postupak koji je Čališev uveo za taj „drugi dio zadaće” primjenjuje se i u proširenju Crossova postupka, ali takav je proračun najčešće dugotrajan i mukotrpan. Zadatak ćemo riješiti na drugi način, postupkom opisanim u sljedećem odjeljku.

### 2.3. Postupak O. Wernera i P. Csonke



Wernerova ljuska

U kombinaciji s postupkom Wernera i Csonke opseg proračuna pomičnoga okvira opterećena horizontalnim silama u čvorovima može se u mnogim slučajevima zamjetno smanjiti. Rekosmo „u mnogim slučajevima”. Naime, skup je konstrukcijskih tipova na koje se taj postupak može primijeniti donekle ograničen, ali brojne okvirne konstrukcije pripadaju upravo tim tipovima.

Prije opisa postupka, nekoliko riječi o njegovu nazivu. Dvije su inačice gotovo istodobno neovisno razvili Otto Werner<sup>13</sup> u Zagrebu i Pál Csonka u Budimpešti. Wernerova je inačica primjenjivana od godine 1951. u APZ-u PLAN; tako je, primjerice, krajem te godine dovršen proračun okvira istovarne stanice žičare u tvornici cementa u Podsusedu. No, O. Werner nije žurio s objavljivanjem u stručnim publikacijama, dok je Csonka prikaz postupka tiskao 1952. godine u Parizu, pa se u svjetskoj literaturi uglavnom navodi kao Csonkin postupak. Temeljne su zamisli u obje inačice iste, ali postoje neke razlike pri provedbi proračuna. Spomenut ćemo usput da je Otto Werner početkom šezdesetih godina proširio postupak na nelinearni proračun simetričnih višetažnih okvira s jednim rasponom [80].

Opisat ćemo izvornu inačicu postupka linearnoga proračuna koju je razradio Otto Werner. Postupak ćemo uvesti postupno, na sve „složenijim” tipovima okvira. Nakon opisa postupka vratit ćemo se na primjer koji smo započeli rješavati u prethodnom odjeljku.

### 2.3.1. Simetričan višetažni jednorasponski okvir

Analizirat ćemo najprije simetrični višetažni okvir s jednim rasponom (slika 33.a.). Broj etaža<sup>14</sup> označit ćemo s  $e$ ; u našem je primjeru  $e = 3$ . Djelovanja na okvir mogu biti bilo kakva. U skladu s osnovnom pretpostavkom inženjerske metode pomakâ oba čvora jedne etaže imaju isti horizontalni pomak; nazvat ćemo ga *pomakom etaže*.

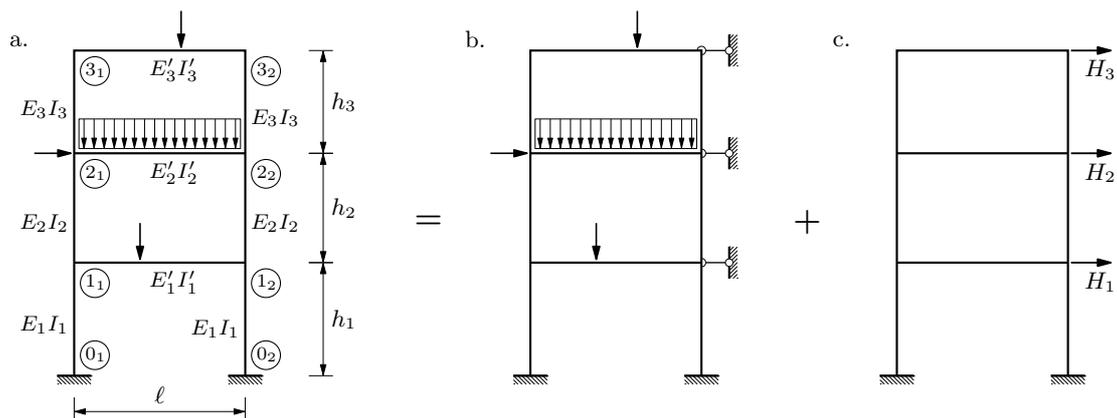
Kao što smo već u odjeljku 2.1. rekli, stvarno stanje možemo prikazati zbrojem stanjâ prikazanih na slikama 33.b. i c. U stanju na slici b. spriječeni su pomaci etaža, pa ga možemo riješiti Crossovim postupkom. U dodanim će se vezama pojaviti reaktivne sile. Kako u izvornom sistemu te veze — pa stoga ni reakcije u njima — ne postoje, opteretit ćemo potom okvir samo silama koje imaju iste intenzitete kao reakcije i djeluju na istim pravcima, ali su im orijentacije suprotne (slika c.).

---

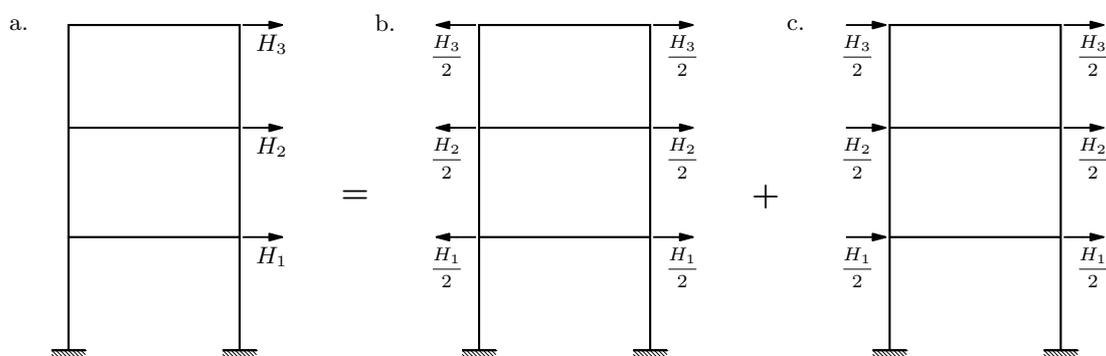
<sup>13</sup> Rodio se 1908. god. u Rumi u Srijemu; umro je u Zagrebu 1981. god. Građevinarstvo je studirao u Beču i na Tehničkom fakultetu u Zagrebu, gdje je diplomirao godine 1931. Od 1933. do 1936. god. bio je asistent na Tehničkom fakultetu, a doktorirao je godine 1941. Za vrijeme rata radio je u tvornici cementa u Podsusedu, a 1946. god. prešao je u Arhitektonski projektni zavod PLAN, gdje je ponajviše radio na projektiranju industrijskih građevina. Projektiranjem se nastavio baviti i po povratku na Građevinski odjel Tehničkoga fakulteta 1954. god., kada je izabran za izvanrednoga profesora za predmet *Teorija konstrukcija (Građevna statika)*. Redoviti je profesor od 1959. god. U svome je pedagoškom radu posebnu pozornost posvećivao primjeni teorijskih znanja — ponajčešće rezultata vlastitih istraživanja — u rješavanju praktičnih problema u projektiranju konstrukcija. Svi su pak njegovi znanstveni radovi proizašli iz konstruktorske prakse i u njoj su našli široku primjenu. Svakome je novom projektu pristupao na poseban, originalan način.

Wernerova ljuska, izvorna krovna konstrukcija prikladna za natkrivanje industrijskih hala, izvedena je na mnogim objektima u našoj zemlji i u svijetu. Ljuska i rešetkaste dijafragme bez srednjih štapova ispune čine vrlo racionalan konstrukcijski sustav; srednji su štapovi rešetki nepotrebni, jer za simetrično opterećenje u njima nema sila, a pri antimetričnu opterećenju u sredini raspona nema momenta ni uzdužne komponente sile, tako da se luk može smatrati sastavljenim od dva neovisna luka nad polovinama otvora.

<sup>14</sup> Etažom nazivamo horizontalni dio zgrade koji obuhvaća prostor između dvije uzastopne nosive podne konstrukcije. Riječ je preuzeta iz francuskoga jezika (*étage*), a znači kat. Kako u hrvatskome jeziku nema zajedničkoga naziva za kat, prizemlje i podrum, upotrebljavamo je da jednim pojmom označimo te različite razine u zgradi [42].



Slika 33.

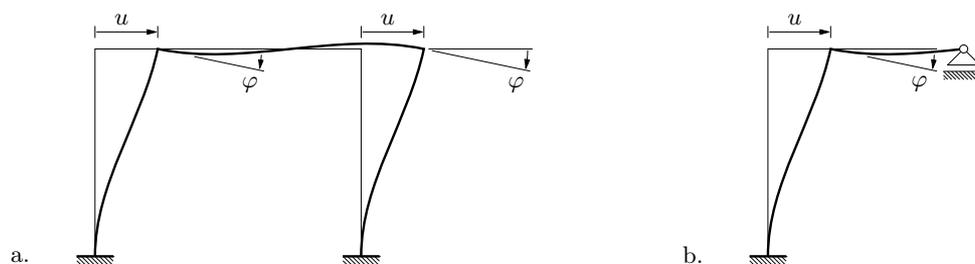


Slika 34.

Sile sa slike 33.c./34.a. rastavljamo na simetrični i antisimetrični dio, slike 34.b. i c.

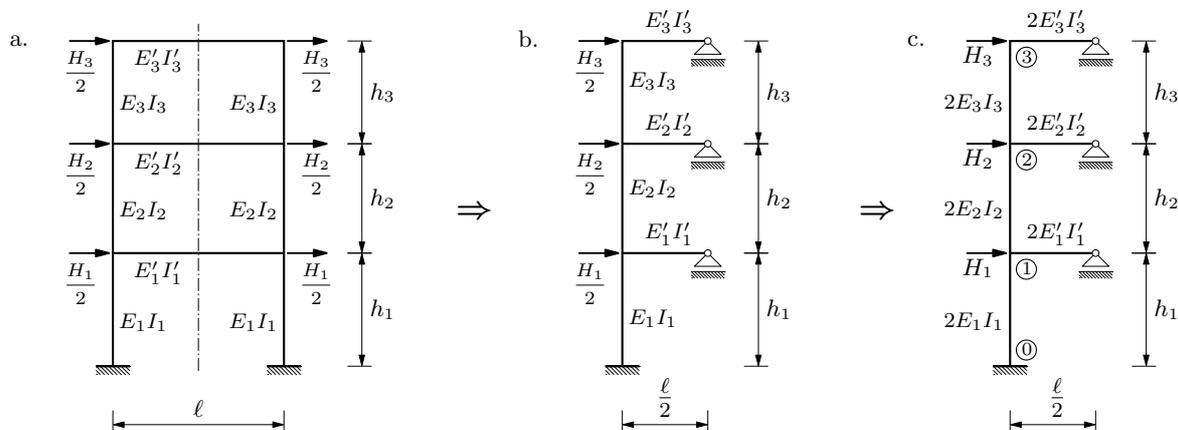
Budući da prema pretpostavci uzdužne sile ne mijenjaju duljine greda, simetrično stanje opterećenja (slika 34.b.) neće prouzročiti momente savijanja. Momenti nastaju samo zbog djelovanja antisimetričnoga opterećenja (slika c.).

Znamo da je pri antisimetričnu opterećenju polje pomakâ simetrične konstrukcije antisimetrično. To u našem slučaju znači da su kutovi zaokretâ i vrijednosti horizontalnih pomaka oba čvora na jednoj etaži jednaki i da je vrijednost vertikalnoga pomaka polovišta raspona grede jednaka nuli te da je u tom polovištu točka infleksije progibne linije (slika 35.a.; jednostavnosti radi prikazali smo jednoetažni okvir). Kako je u točki in-



Slika 35.

fleksije zakrivljenost jednaka nuli, u polovištu raspona je i vrijednost momenta savijanja jednaka nuli. Umjesto cijeloga sistema možemo stoga promatrati samo jednu polovicu, uz odgovarajući rubni uvjet u osi simetrije — pomični zglobovi ležaj koji sprečava vertikalni, a dopušta horizontalni pomak i zaokret (slika b.). Takav sistem nazivamo *poluokvirom*.



Slika 36.

Dakle, umjesto okvira sa slike 34.c./36.a. možemo rješavati poluokvir sa slike 36.b. Radi lakšega poopćenja postupka na nesimetrične i na višeraspanske okvire uvest ćemo jednu promjenu: zamislimo li da je poluokvir nastao „preklapanjem” dviju polovica okvira oko osi simetrije, momenti tromosti greda i stupova poluokvira udvostručit će se, a u njegovim će čvorovima djelovati iste sile kao i u čvorovima okvira (slika 36.c.). Zbog toga ćemo na poluokviru dobiti dvostruko veće vrijednosti momenata, pa ih pri „vraćanju” na okvir treba podijeliti s dva.

Poluokvir proračunavamo relaksacijskim postupkom sličnim Crossovu postupku: koraci su isti, ali se razlikuju momenti upetosti te razdjelni i prijenosni koeficijenti. Strogo govoreći, Wernerovim se postupkom naziva samo proračun poluokvira, ali kako taj proračun svoj puni smisao dobiva tek pri prijelazu s okvira na poluokvir i natrag, naziv ćemo najčešće neformalno upotrebljavati za cijeli ovdje opisani postupak.

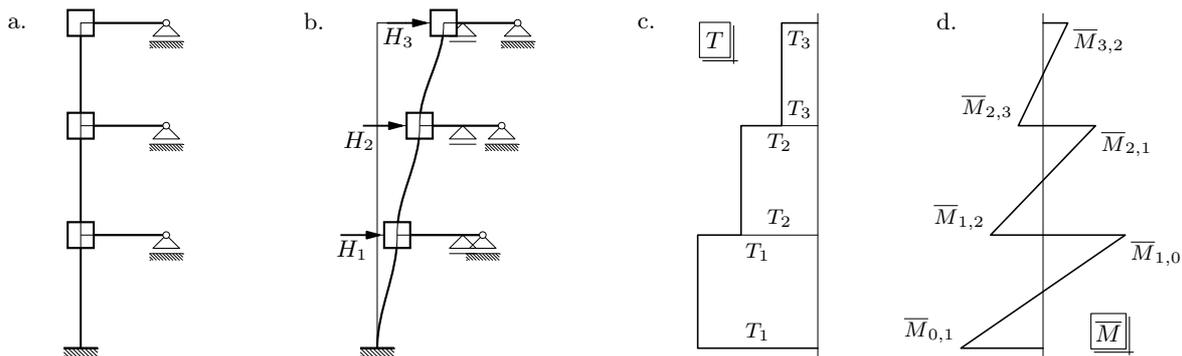
Prvi je korak izračunavanje vrijednosti momenata upetosti. Pretpostavljamo da su zaokreti čvorova spriječeni, ali, za razliku od (inženjerske) metode pomakâ i Crossova postupka, horizontalne pomake ne sprečavamo (slike 37.a. i b.). Budući da se krajevi greda ne zaokreću, u gredama nema momenata upetosti.

Vrijednosti momenata upetosti u stupovima izračunavamo iz poznatih vrijednosti poprečnih sila. Kako je poluokvir opterećen samo u čvorovima, vrijednosti su poprečnih sila u pojedinim stupovima konstantne, pa možemo pisati

$$T_{i,i-1} = -T_{i-1,i} = T_i.$$

Za stup konstantnoga poprečnog presjeka točka infleksije progibne linije u polovištu je visine etaže (slika 37.b.), a kako je u točki infleksije vrijednost momenta savijanja jednaka nuli, bit će  $\overline{M}_{i,i-1} = \overline{M}_{i-1,i}$ . Jednadžba ravnoteže momenata oko kraja  $i-1$  stupa  $\{i-1, i\}$ ,

$$-T_i \cdot h_i + \overline{M}_{i,i-1} + \overline{M}_{i-1,i} = 0$$



Slika 37.

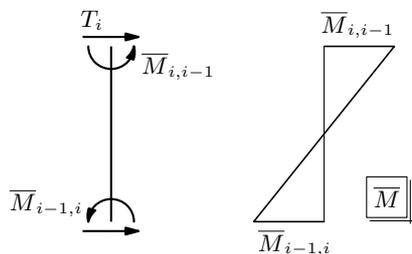
(slika 38.), daje izraz za momente upetosti:

$$\bar{M}_{i,i-1} = \bar{M}_{i-1,i} = \frac{1}{2} T_i h_i. \quad (57)$$

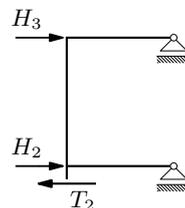
Vrijednost  $T_i$  lako je izračunati iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na dio polukvira iznad presjeka kroz  $i$ -ti stup (slika 39.):

$$T_i = \sum_{j=i}^e H_j. \quad (58)$$

Treba uočiti da se vrijednosti  $T_i$  poprečnih sila tijekom relaksacije ne mijenjaju. Dijagrami poprečnih sila i momenata upetosti u stupovima sistema sa slike 36.c. skicirani su na slikama 37.c. i d.



Slika 38.



Slika 39.

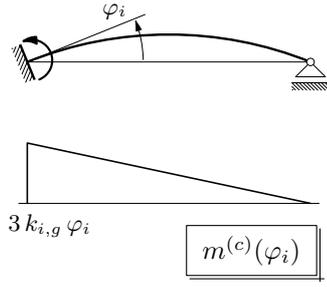
U nastavku proračuna, kao i u Crossovu postupku, uravnotežujemo čvor po čvor, ali za razliku od Crossova postupka pri zaokretu čvora ne sprečavamo njegov horizontalni pomak. Za takvo uravnoteženje treba definirati razdjelne i prijenosne koeficijente.

Grede u osnovnom sistemu jednostrano su upete (slika 40.), pa za prirast vrijednosti momenta na upetome kraju zbog zaokreta čvora vrijedi poznati izraz

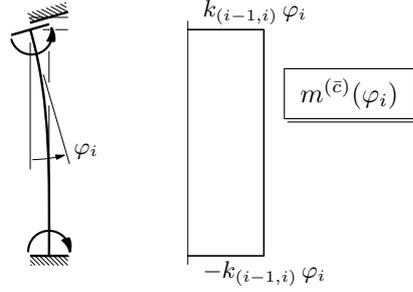
$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = 3 k_{i,g} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}, \quad (59)$$

gdje je  $k_{i,g}$  koeficijent krutosti grede polukvira:

$$k_{i,g} = \frac{E'_i (2I'_i)}{\frac{\ell}{2}} = 4 \frac{E'_i I'_i}{\ell} = 4 k_{\{i_1, i_2\}}.$$



Slika 40.



Slika 41.

Prirast vrijednosti momenta možemo izraziti i pomoću koeficijenta krutosti grede izvornoga okvira:

$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = 12 k_{\{i_1, i_2\}} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}. \quad (60)$$

Budući da horizontalni pomaci čvorova osnovnoga sistema nisu spriječeni, za izvod izrazâ za vrijednosti momenata u stupu možemo zamisliti da na kraju priključenom u čvor stup ima krutu pomičnu vezu koja omogućava pomak okomito na njegovu os (slika 41.). Veza između prirasta vrijednosti momenata na krajevima i prirasta kuta zaokreta kraja  $i$  dana je izrazima

$$\begin{aligned} \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} &= k_{\{i-1, i\}} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}, \\ \Delta M_{i-1, i}^{(n_i+1)} &= -k_{\{i-1, i\}} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}, \end{aligned} \quad (61)$$

gdje je  $k_{\{i-1, i\}}$  koeficijent krutosti stupa poluokvira

$$k_{\{i-1, i\}} = \frac{E_i (2I_i)}{h_i} = 2 \frac{E_i I_i}{h_i} = 2 k_{\{i_1-1, i_1\}}. \quad (62)$$

[Izvedite izraze (61) statičkom kondenzacijom izrazâ za obostrano upetu gredu!]

Zaokretanjem za kut  $\Delta \varphi_i^{(n_i)}$  uravnotežujemo čvor  $i$  na koji djeluje rezidualni moment s vrijednošću  $\mathfrak{M}_i^{(n_i)}$ :

$$-\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0.$$

(U jednadžbi ravnoteže najgornjega čvora naravno nema vrijednosti  $\Delta M_{i,i+1}$ .) Uvrštavanje izraza (59) i (61) daje

$$(3 k_{i,g} + k_{\{i-1, i\}} + k_{\{i, i+1\}}) \Delta \varphi_i^{(n_i+1)} = \mathfrak{M}_i^{(n_i)},$$

pa je

$$\Delta \varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{\mathfrak{M}_i^{(n_i)}}{k_i^W},$$

gdje je krutost čvora

$$k_i^W = 3 k_{i,g} + k_{\{i-1, i\}} + k_{\{i, i+1\}}. \quad (63)$$

Dobiveni izraz za prirast kuta  $\Delta\varphi_i^{(n_i)}$  možemo sada uvrstiti u izraze za vrijednosti momenata na krajevima grede i stupova:

$$\begin{aligned}\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} &= \frac{3 k_{i,g}}{k_i^W} \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \mu_{i,g} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}, \\ \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} &= \frac{k_{\{i-1,i\}}}{k_i^W} \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \mu_{i,i-1} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}, \\ \Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} &= \frac{k_{\{i,i+1\}}}{k_i^W} \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \mu_{i,i+1} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}.\end{aligned}\tag{64}$$

Razdjelni koeficijenti za čvor  $i$  su, prema tome:

$$\begin{aligned}\mu_{i,g} &= \frac{3 k_{i,g}}{k_i^W}, \\ \mu_{i,i-1} &= \frac{k_{\{i-1,i\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i,i+1} &= \frac{k_{\{i,i+1\}}}{k_i^W};\end{aligned}$$

katkad se ti koeficijenti neposredno izražavaju pomoću koeficijenata krutosti grede i stupova izvornoga okvira:

$$\begin{aligned}k_i^W &= 12 k_{\{i_1,i_2\}} + 2 k_{\{i_1-1,i_1\}} + 2 k_{\{i_1,i_1+1\}}, \\ \mu_{i,g} &= \frac{12 k_{\{i_1,i_2\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i,i-1} &= \frac{2 k_{\{i_1-1,i_1\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i,i+1} &= \frac{2 k_{\{i_1,i_1+1\}}}{k_i^W}.\end{aligned}\tag{65}$$

Izrazi (61) pokazuju da je  $\Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)} = -\Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)}$ , pa je prijenosni koeficijent  $-1$ .

S tim razdjelnim i prijenosnim koeficijentima proračun dalje provodimo kao i u Crossovu postupku.

Zbroj momenata na krajevima jednog stupa nazivamo *momentom etaže*; njegova je vrijednost

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i+1)}.$$

Iz jednadžbe ravnoteže momenata oko dna stupa [nacrtajte skicu!],

$$-T_i \cdot h_i + M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i+1)} = -T_i \cdot h_i + M_{e,i}^{(n_i+1)} = 0,$$

slijedi

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = T_i \cdot h_i,$$

što znači da vrijednosti momenata etaža tijekom proračuna moraju ostati konstantne. Budući da su  $\Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)}$  i  $\Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)}$  za sve  $n_i$  jednakih intenziteta, a suprotnih predznaka, zaista vrijedi:

$$\begin{aligned} M_{e,i}^{(n_i+1)} &= M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i+1)} \\ &= M_{i-1,i}^{(n_i)} + \Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i)} + \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} \\ &= M_{i-1,i}^{(n_i)} + M_{i,i-1}^{(n_i)} = M_{e,i}^{(n_i)} = \dots = \bar{M}_{i-1,i} + \bar{M}_{i,i-1}. \end{aligned}$$

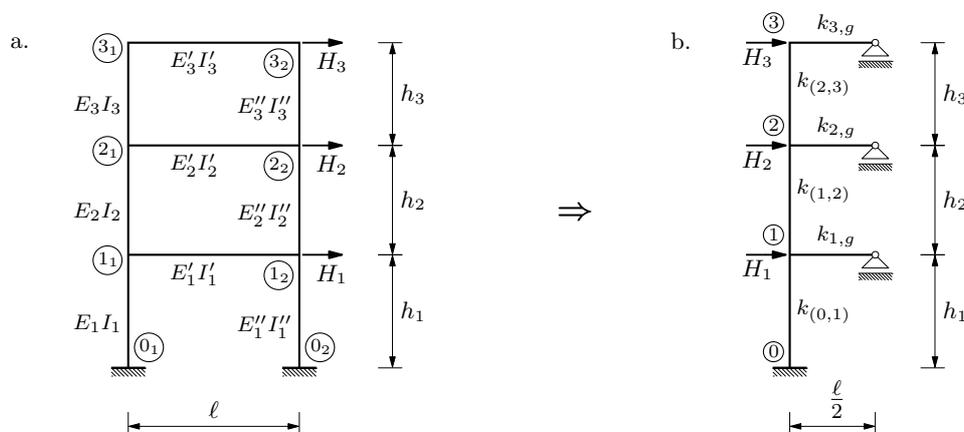
Kako je poluokvir nastao preklapanjem polovica izvornoga okvira, ukupne momente s poluokvira treba pri „vraćanju” na okvir raspoloviti:

$$\begin{aligned} M_{i_1,i_2} &= M_{i_2,i_1} = \frac{1}{2} M_{i,g}, \\ M_{i_1,i_1-1} &= M_{i_2,i_2-1} = \frac{1}{2} M_{i,i-1}, \\ M_{i_1,i_1+1} &= M_{i_2,i_2+1} = \frac{1}{2} M_{i,i+1}. \end{aligned} \tag{66}$$

Pribrojimo li te momente momentima iz proračuna nepomičnoga sistema sa slike 33.b. na stranici 59., dobit ćemo konačne momente na izvornom sistemu sa slike 33.a.

### 2.3.2. Nesimetričan višeetažni jednorasponski okvir

Opisani ćemo postupak proširiti na proračun nesimetričnih okvira s jednim rasponom. I u takvu ćemo slučaju prvo Crossovim postupkom riješiti pridržani sistem pod zadanim djelovanjima i izračunati reakcije u dodanim vezama. Potom ćemo okvir u odgovarajućim čvorovima opteretiti silama istih intenziteta i pravaca djelovanja, a suprotnih orijentacija. Razlika u odnosu na okvir na slici 33. samo je u tome što sada stupovi jedne etaže mogu imati različite momente tromosti ili module elastičnosti ili oboje (slika 42.a.).



Slika 42.

Kako okvir nije simetričan, pod antimetričnim opterećenjem progibna linija neće biti antimetrična. Ipak, u prvoj ćemo fazi proračuna uzeti da su kutovi zaokreta oba čvora na nekoj etaži međusobno jednaki. To pak znači da će biti jednaki i kutovi zaokreta oba kraja grede, pa će u sredini njezina raspona biti točka infleksije u kojoj je vrijednost momenta savijanja jednaka nuli. Stoga i sada možemo okvir u prvoj fazi proračuna zamijeniti poluokvirom (slika 42.b.).

Vrijednosti momenata upetosti izračunavamo prema izrazu (57) na stranici 61.

U nesimetričnu okviru stupovi u jednoj etaži nisu međusobno jednaki. Zbog toga koeficijente krutosti stupova poluokvira definiramo kao zbroj koeficijenata krutosti stupova okvira:

$$k_{\{i-1,i\}} = k_{\{i_1-1,i_1\}} + k_{\{i_2-1,i_2\}}, \quad (67)$$

pa je

$$\begin{aligned} k_i^W &= 3k_{i,g} + k_{\{i-1,i\}} + k_{\{i,i+1\}} \\ &= 12k_{\{i_1,i_2\}} + [k_{\{i_1-1,i_1\}} + k_{\{i_2-1,i_2\}}] + [k_{\{i_1,i_1+1\}} + k_{\{i_2,i_2+1\}}], \end{aligned} \quad (68)$$

a razdjelni su koeficijenti:

$$\begin{aligned} \mu_{i,g} &= \frac{3k_{i,g}}{k_i^W} = \frac{12k_{\{i_1,i_2\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i,i-1} &= \frac{k_{\{i-1,i\}}}{k_i^W} = \frac{k_{\{i_1-1,i_1\}} + k_{\{i_2-1,i_2\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i,i+1} &= \frac{k_{\{i,i+1\}}}{k_i^W} = \frac{k_{\{i_1,i_1+1\}} + k_{\{i_2,i_2+1\}}}{k_i^W}. \end{aligned} \quad (69)$$

S tim razdjelnim koeficijentima provodimo relaksacijski proračun na poluokviru. Prijednosni je koeficijent i sada  $-1$ .

S poluokvira prelazimo opet na okvir tako da vrijednosti momenata koje smo izračunali na poluokviru raspodijelimo na odgovarajuće elemente okvira u omjerima njihovih krutosti:

$$\begin{aligned} M_{i_1,i_2} &= M_{i_2,i_1} = \frac{1}{2} M_{i,g}, \\ M_{i_1,i_1-1} &= \frac{k_{\{i_1-1,i_1\}}}{k_{\{i_1-1,i_1\}} + k_{\{i_2-1,i_2\}}} M_{i,i-1}, \\ M_{i_2,i_2-1} &= \frac{k_{\{i_2-1,i_2\}}}{k_{\{i_1-1,i_1\}} + k_{\{i_2-1,i_2\}}} M_{i,i-1}, \\ M_{i_1,i_1+1} &= \frac{k_{\{i_1,i_1+1\}}}{k_{\{i_1,i_1+1\}} + k_{\{i_2,i_2+1\}}} M_{i,i+1}, \\ M_{i_2,i_2+1} &= \frac{k_{\{i_2,i_2+1\}}}{k_{\{i_1,i_1+1\}} + k_{\{i_2,i_2+1\}}} M_{i,i+1}. \end{aligned} \quad (70)$$

Budući da pretpostavka o jednakosti kutova zaokreta krajeva jedne grede u stvari nije ispravna, čvorovi okvira neće biti u ravnoteži. Neuravnoteženi momenti upravo su momenti kojima smo čvorove „prisilili” da imaju jednake zaokrete.

U drugoj fazi proračuna momente u čvorovima uravnotežujemo Crossovim postupkom. (Pritom, naravno, treba spriječiti horizontalne pomake etaža.) Izračunamo li nakon toga vrijednosti poprečnih sila u stupovima, otkrit ćemo da te sile nisu u ravnoteži sa silama  $\vec{H}_i$ , što znači da smo uravnoteženjem momenata narušili ravnotežu horizontalnih sila ostvarenu proračunom na poluokviru.

Drugim riječima, u različitim fazama proračuna neovisno zadovoljavamo različite uvjete ravnoteže. U prvoj fazi, proračunom na poluokviru zadovoljili smo uvjete ravnoteže horizontalnih sila. Ti su uvjeti zadovoljeni i neposredno nakon „vraćanja” momenata na okvir, ali u tom trenutku ne postoji ravnoteža momenata u čvorovima. Potom, u drugoj fazi, Crossovim postupkom uravnotežujemo momente, ali će se pritom promijeniti vrijednosti poprečnih sila u stupovima, a time i ukupne vrijednosti horizontalnih sila u pojedinim etažama. Odnos tih faza odgovara, na apstraktnijoj razini, odnosu korakâ u Crossovu postupku u kojemu momente u jednome čvoru uravnotežujemo neovisno o drugim čvorovima narušavajući time njihovu ravnotežu.

Često je neispunjenje uvjeta ravnoteže horizontalnih sila nakon uravnoteženja momenata tako malo da „za praktične potrebe” možemo dobivene rezultate smatrati konačnima.

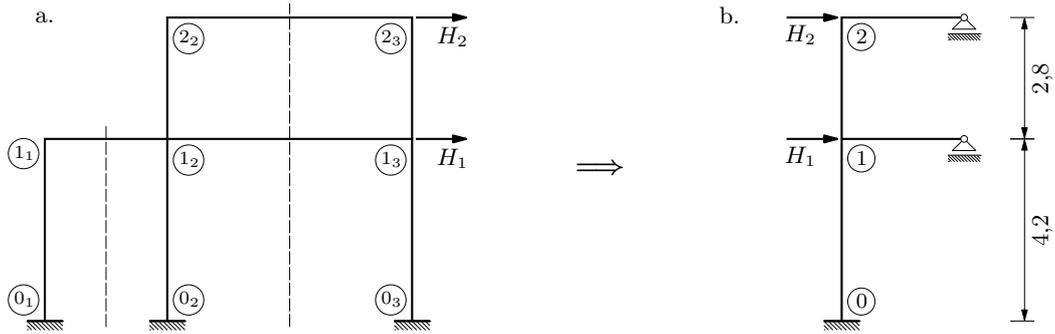
Želimo li točnije rezultate, ponovit ćemo cijeli postupak — obje faze — opterećujući okvir/poluokvir neuravnoteženim dijelom horizontalnih sila. Pribrojimo li te rezultate rezultatima prvoga ciklusa (prvog „prolaza” kroz obje faze proračuna), dobit ćemo rješenje koje još uvijek nije konačno, ali ga ovisno o veličini neuravnoteženih sila i o traženoj točnosti možemo smatrati konačnim. Daljim ponavljanjem ciklusa možemo postići bilo koju točnost. Očita je analogija s Crossovim postupkom u kojemu čvorove uravnotežujemo više puta, do zahtijevane točnosti.

Iako su ciklusi, nakon prvoga, razmjerno kratkotrajni, jer su razlike vrijednosti sila male, takvo je višekратно ponavljanje proračuna ipak zamorno i oduzima dosta vremena. Uvođenje popravnoga koeficijenta najčešće omogućava prekid postupka, uz točnost dovoljnu „za sve praktične potrebe”, već nakon prvoga ili, u najgorem slučaju, nakon drugog ciklusa. Najlakše je to objasniti na primjeru, pa ćemo pojedinosti odložiti do sljedećega pododjeljka.

### 2.3.3. Okvir s više etaža i više raspona — nastavak primjera

Postupak proračuna nesimetričnoga okvira s jednim rasponom može se primijeniti i za proračun bilo kakvih višerasponskih okvira s horizontalnim gredama i vertikalnim stupovima ako su svi ležajevi na istoj razini. Osim toga, ležajevi moraju imati jednake uvjete pričvršćenja. Naravno, ako ležajevi nisu upeti, razdjelni će se koeficijenti u čvorovima prve etaže promijeniti.

Postupak proračuna višerasponskih okvira je, osim izrazâ za razdjelne koeficijente, isti kao i za okvir s jednim rasponom, pa ćemo odmah prijeći na primjer. Nastavit ćemo proračun okvira sa slike 28. na stranici 50. U odjeljku 2.2.1. proveli smo proračun nepomičnoga sistema, što je prvi dio proračuna okvira pri općim djelovanjima. Preostaje nam da riješimo problem nepostojećih reakcija u zamišljenim vezama.



Slika 43.

Okvir stoga opterećujemo silama koje imaju suprotne orijentacije, a jednake intenzitete i pravce djelovanja kao reakcije koje smo izračunali na kraju odjeljka 2.2. (slika 43.a.):

$$H_1 = -R_1 = 25,0 \text{ kN},$$

$$H_2 = -R_2 = 48,3 \text{ kN}.$$

I sada ćemo započeti s pretpostavkom da su kutovi zaokreta svih čvorova na jednoj etaži jednaki, pa možemo uvesti zamjenjujući poluokvir (slika 43.b.). Na tom poluokviru nismo naznačili duljine greda, jer su neodređene (je li to polovina prvoga ili polovina drugog raspona okvira?). No, duljine greda nisu nam ni potrebne. One ostaju skrivene u koeficijentima krutosti, pa koeficijente krutosti greda poluokvira definiramo kao zbroj koeficijenata krutosti svih greda okvira u pripadnoj etaži, pomnoženih sa 4:

$$k_{i,g} = \sum_j 4 k_{\{i_j, i_{j+1}\}} = 4 \sum_j k_{\{i_j, i_{j+1}\}}. \quad (71)$$

Koeficijente krutosti stupova poluokvira definiramo kao zbroj koeficijenata stupova okvira u pripadnoj etaži:

$$k_{\{i-1, i\}} = \sum_j k_{\{i_j-1, i_j\}}. \quad (72)$$

Sada su razdjelni koeficijenti:

$$\begin{aligned} \mu_{i,g} &= \frac{3 k_{i,g}}{k_i^W} = \frac{12 \sum_j k_{\{i_j, i_{j+1}\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i, i-1} &= \frac{k_{\{i-1, i\}}}{k_i^W} = \frac{\sum_j k_{\{i_j-1, i_j\}}}{k_i^W}, \\ \mu_{i, i+1} &= \frac{k_{\{i, i+1\}}}{k_i^W} = \frac{\sum_j k_{\{i_j, i_{j+1}\}}}{k_i^W}, \end{aligned} \quad (73)$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_i^W &= 3 k_{i,g} + k_{\{i-1, i\}} + k_{\{i, i+1\}} \\ &= 12 \sum_j k_{\{i_j, i_{j+1}\}} + \sum_j k_{\{i_j-1, i_j\}} + \sum_j k_{\{i_j, i_{j+1}\}}. \end{aligned} \quad (74)$$

U našem su primjeru:

koeficijenti krutosti greda poluokvira:

$$k_{1,g} = 4 k_{\{1,1,2\}} + 4 k_{\{1,2,1,3\}} = 5,68 EI,$$

$$k_{2,g} = 4 k_{\{2,2,3\}} = 2,16 EI;$$

koeficijenti krutosti stupova:

$$k_{\{0,1\}} = k_{\{0,1,1\}} + k_{\{0,2,1,2\}} + k_{\{0,3,1,3\}} = 0,96 EI,$$

$$k_{\{1,2\}} = k_{\{1,2,2,2\}} + k_{\{1,3,2,3\}} = 0,72 EI;$$

koeficijenti krutosti čvorova i razdjelni koeficijenti:

u čvoru 1:

$$k_1^W = 3 k_{1,g} + k_{\{0,1\}} + k_{\{1,2\}} = 18,72 EI,$$

$$\mu_{1,g} = \frac{3 k_{1,g}}{k_1^W} = 0,91,$$

$$\mu_{1,0} = \frac{k_{\{0,1\}}}{k_1^W} = 0,05,$$

$$\mu_{1,2} = \frac{k_{\{1,2\}}}{k_1^W} = 0,04,$$

u čvoru 2:

$$k_2^W = 3 k_{2,g} + k_{\{1,2\}} = 7,20 EI,$$

$$\mu_{2,g} = \frac{3 k_{2,g}}{k_2^W} = 0,90,$$

$$\mu_{2,1} = \frac{k_{\{1,2\}}}{k_2^W} = 0,10.$$

Razdjelne koeficijente upisujemo u kvadratiće u čvorovima sheme sistema na kojoj ćemo provesti proračun (slika 44.).

Vrijednosti momenata upetosti u stupovima poluokvira izračunavamo prema izrazu (57) izvedenom na stranici 61.:

$$\bar{M}_{i,i-1} = \bar{M}_{i-1,i} = \frac{1}{2} T_i h_i,$$

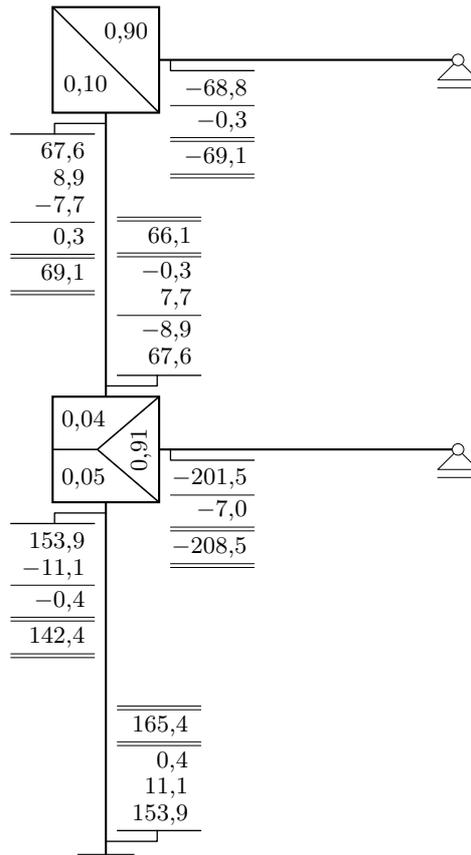
gdje su  $T_i$  vrijednosti poprečnih sila u stupovima poluokvira dane izrazom (58):

$$T_i = \sum_{j=i}^e H_j.$$

U našem su primjeru te vrijednosti

$$T_1 = H_1 + H_2 = 25,0 + 48,3 = 73,3 \text{ kN},$$

$$T_2 = H_2 = 48,3 \text{ kN},$$



Slika 44.

pa su vrijednosti momenata upetosti

$$\bar{M}_{1,0} = \bar{M}_{0,1} = \frac{1}{2} \cdot 73,3 \cdot 4,2 = 153,9 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{2,1} = \bar{M}_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot 48,3 \cdot 2,8 = 67,6 \text{ kNm}.$$

Relaksacijski proračun poluokvira provodimo na isti način kao proračun po Crossu, uz prijenosni koeficijent  $-1$  (slika 44.). Zbroj vrijednosti momenata upetosti na krajevima 1 stupova  $\{0, 1\}$  i  $\{1, 2\}$  je  $153,9 + 67,6 = 221,5$ . Taj je zbroj veći od zbroja vrijednosti na kraju 2 stupa  $\{1, 2\}$ , te relaksaciju započinjemo u čvoru 1; raspodjeljujemo vrijednost  $-221,5$ :

$$\Delta M_{1,g}^{(1)} = \mu_{1,g} \cdot (-221,5) = 0,91 \cdot (-221,5) = -201,6,$$

$$\Delta M_{1,0}^{(1)} = \mu_{1,0} \cdot (-221,5) = 0,05 \cdot (-221,5) = -11,1,$$

$$\Delta M_{1,2}^{(1)} = \mu_{1,2} \cdot (-221,5) = 0,04 \cdot (-221,5) = -8,9,$$

$$\underline{\underline{-221,6.}}$$

Budući da se zbog zaokruživanja zbroj raspodijeljenih vrijednosti ( $-221,6$ ) razlikuje od vrijednosti koji raspodjeljujemo ( $-221,5$ ), prije upisivanja u shemu prilagodit ćemo vrijednost momenta čiji je intenzitet najveći:  $\Delta M_{1,g}^{(1)} = -201,5$ , osiguravajući time ravnotežu čvora.

Na kraj 0 stupa  $\{0, 1\}$  prenosimo vrijednost  $-1 \cdot \Delta M_{1,0}^{(1)} = -1 \cdot (-11,1) = 11,1$ , a na kraj 2 stupa  $\{1, 2\}$  vrijednost  $-1 \cdot \Delta M_{1,2}^{(1)} = -1 \cdot (-8,9) = 8,9$ .

U sljedećem koraku uravnotežujemo čvor 2, a potom još jednom čvor 1 i čvor 2. Vidimo da proračun vrlo brzo konvergira; naime, pri svakom uravnoteženju najveći dio vrijednosti momenta „ostaje” na gredi.

Nakon svakoga su relaksacijskog koraka, pa onda i na kraju proračuna, zadovoljeni uvjeti ravnoteže horizontalnih sila, jer se poprečne sile u stupovima ne mijenjaju.

Dobivene momente raspodjeljujemo na odgovarajuće elemente okvira u omjeru njihovih krutosti:

$$M_{2,2,23}^* = M_{2,3,22}^* = \frac{1}{2} M_{2,g} = \frac{1}{2} \cdot (-69,1) = -34,5 \text{ kNm},$$

$$M_{2,2,12}^* = \frac{k_{\{1,2,22\}}}{k_{\{1,2,22\}} + k_{\{1,3,23\}}} M_{2,1} = \frac{0,36}{0,36 + 0,36} \cdot 69,1 = 34,5 \text{ kNm},$$

$$M_{2,3,13}^* = \frac{k_{\{1,3,23\}}}{k_{\{1,2,22\}} + k_{\{1,3,23\}}} M_{2,1} = \frac{0,36}{0,72} \cdot 69,1 = 34,5 \text{ kNm},$$

$$M_{1,2,22}^* = M_{1,3,23}^* = \frac{0,36}{0,72} M_{1,2} = \frac{0,36}{0,72} \cdot 66,1 = 33,0 \text{ kNm},$$

$$\begin{aligned} M_{1,1,12}^* = M_{1,2,11}^* &= \frac{k_{\{1,1,12\}}}{2k_{\{1,1,12\}} + 2k_{\{1,2,13\}}} M_{1,g} = \frac{0,72}{2 \cdot 0,72 + 2 \cdot 0,72} \cdot (-208,5) \\ &= -52,1 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$M_{1,2,13}^* = M_{1,3,12}^* = \frac{k_{\{1,2,13\}}}{2k_{\{1,1,12\}} + 2k_{\{1,2,13\}}} M_{1,g} = \frac{0,72}{2,88} \cdot (-208,5) = -52,1 \text{ kNm},$$

$$M_{1,1,01}^* = \frac{k_{\{0,1,11\}}}{k_{\{0,1,11\}} + k_{\{0,2,12\}} + k_{\{0,3,13\}}} M_{1,0} = \frac{0,24}{0,24 + 0,48 + 0,24} \cdot 142,4 = 35,6 \text{ kNm},$$

$$M_{1,2,02}^* = \frac{k_{\{0,2,12\}}}{k_{\{0,1,11\}} + k_{\{0,2,12\}} + k_{\{0,3,13\}}} M_{1,0} = \frac{0,48}{0,96} \cdot 142,4 = 71,2 \text{ kNm},$$

$$M_{1,3,03}^* = \frac{k_{\{0,3,13\}}}{k_{\{0,1,11\}} + k_{\{0,2,12\}} + k_{\{0,3,13\}}} M_{1,0} = \frac{0,24}{0,96} \cdot 142,4 = 35,6 \text{ kNm},$$

$$M_{0,1,11}^* = M_{0,3,13}^* = \frac{0,24}{0,96} M_{1,0} = \frac{0,24}{0,96} \cdot 165,4 = 41,4 \text{ kNm},$$

$$M_{0,2,12}^* = \frac{0,48}{0,96} M_{1,0} = \frac{0,48}{0,96} \cdot 165,4 = 82,7 \text{ kNm}.$$

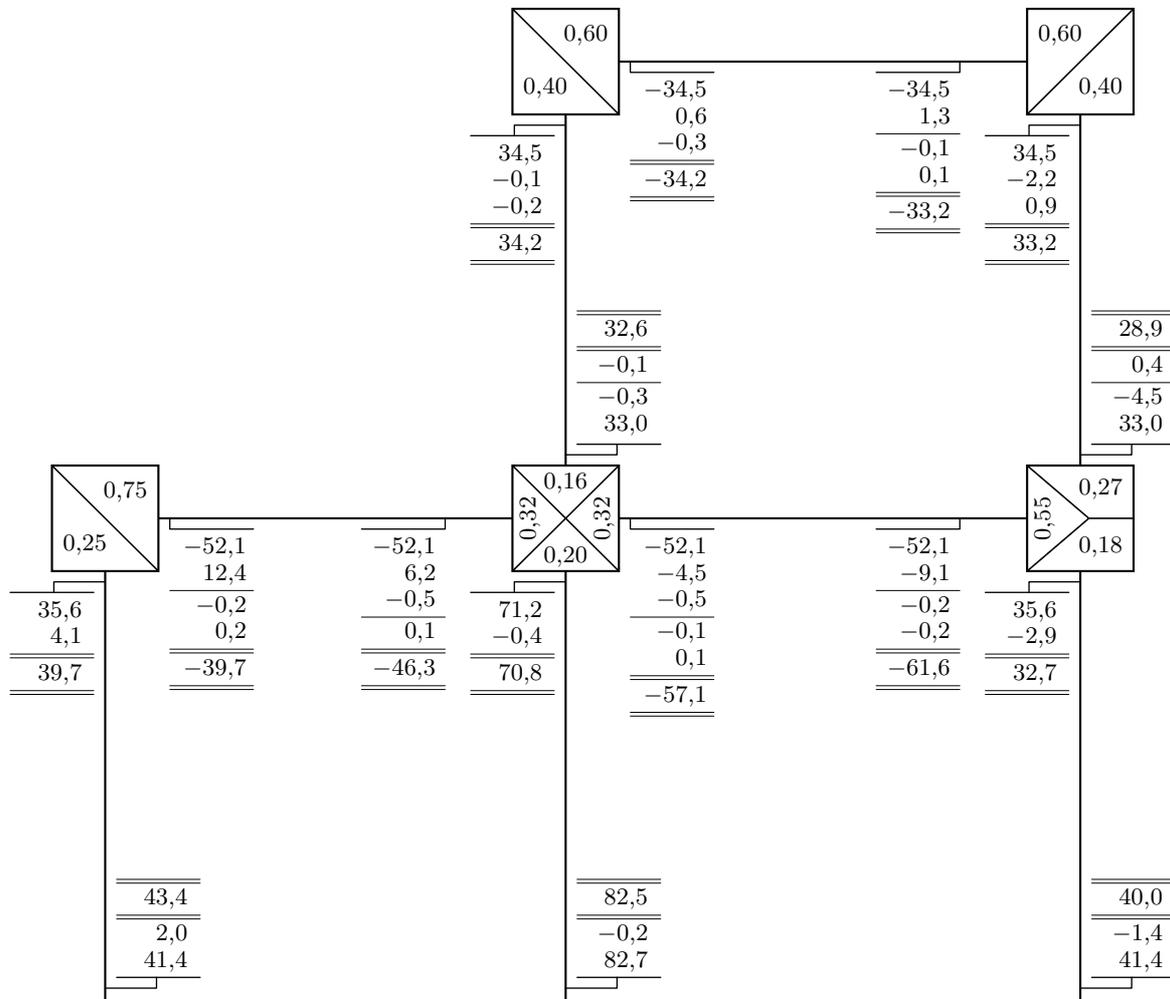
Tako raspodijeljeni momenti nisu u svim čvorovima u ravnoteži:

$$\begin{aligned} M_{2,2,12}^* + M_{2,2,23}^* &= 34,5 - 34,5 = 0, \\ M_{2,3,22}^* + M_{2,3,13}^* &= -34,5 + 34,5 = 0, \\ M_{1,1,01}^* + M_{1,1,12}^* &= 35,6 - 52,1 = -16,5 \neq 0, \end{aligned}$$

$$M_{1_2,1_1}^* + M_{1_2,0_2}^* + M_{1_2,1_3}^* + M_{1_2,2_2}^* = -52,1 + 71,2 - 52,1 + 33,0 = 0,$$

$$M_{1_3,1_2}^* + M_{1_3,0_3}^* + M_{1_3,2_3}^* = -52,1 + 35,6 + 33,0 = 16,5 \neq 0,$$

pa ćemo ih uravnotežiti Crossovim postupkom. Redosljed je obilaženja čvorova u proračunu na slici 45.: 1<sub>1</sub>, 1<sub>3</sub>, 2<sub>3</sub>, 1<sub>2</sub>, 2<sub>2</sub>, 2<sub>3</sub>, 1<sub>1</sub>, 1<sub>3</sub>, 1<sub>2</sub>.



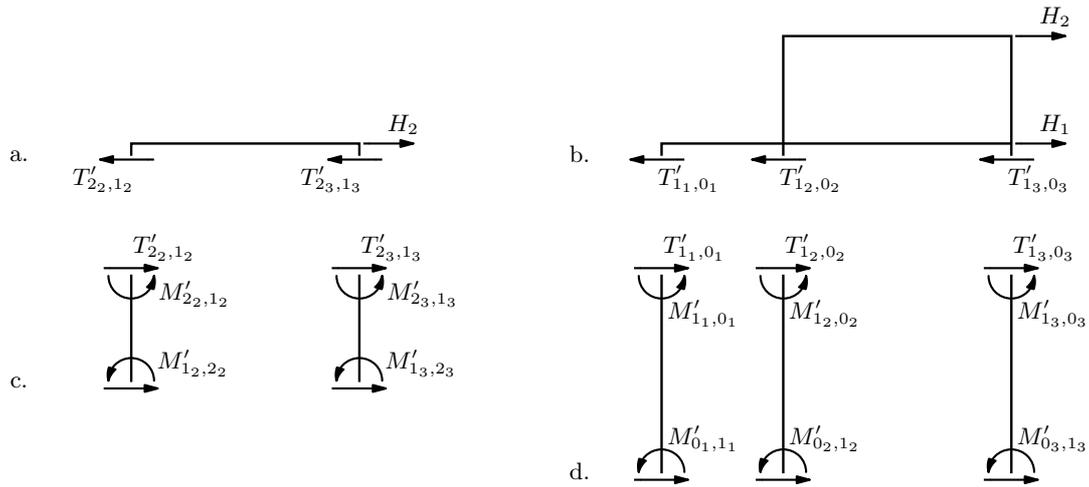
Slika 45.

Poprečne su sile u stupovima nakon uravnoteženja momenata (slike 46.c. i d.)

$$T'_{2_2,1_2} = \frac{1}{h_{\{1,2\}}} (M'_{2_2,1_2} + M'_{1_2,2_2}) = \frac{1}{2,8} (34,2 + 32,6) = 23,9 \text{ kN},$$

$$T'_{2_3,1_3} = \frac{1}{h_{\{1,2\}}} (M'_{2_3,1_3} + M'_{1_3,2_3}) = \frac{1}{2,8} (33,2 + 28,9) = 22,2 \text{ kN},$$

$$T'_{1_1,0_1} = \frac{1}{h_{\{0,1\}}} (M'_{1_1,0_1} + M'_{0_1,1_1}) = \frac{1}{4,2} (39,7 + 43,4) = 19,8 \text{ kN},$$



Slika 46.

$$T'_{12,02} = \frac{1}{h_{\{0,1\}}} (M'_{12,02} + M'_{02,12}) = \frac{1}{4,2} (70,8 + 82,5) = 36,5 \text{ kN},$$

$$T'_{13,03} = \frac{1}{h_{\{0,1\}}} (M'_{13,03} + M'_{03,13}) = \frac{1}{4,2} (32,7 + 40,0) = 17,3 \text{ kN}.$$

Te sile, međutim, nisu u ravnoteži sa silama  $H_i$  (slike 46.a. i b.):

$$\begin{aligned} -T'_{22,12} - T'_{23,13} + H_2 &= 2,2 \neq 0, \\ -T'_{11,01} - T'_{12,02} - T'_{13,03} + H_1 + H_2 &= -0,3 \neq 0; \end{aligned}$$

drugim riječima, uravnoteženjem momenata po Crossu narušili smo ravnotežu horizontalnih sila koja je bila zadovoljena tijekom Werner–Csonkina postupka.

Za zbroj vrijednosti poprečnih sila u stupovima jedne etaže okvira nakon uravnoteženja momenata uvest ćemo oznaku  $T'_i$ :

$$T'_1 = T'_{11,01} + T'_{12,02} + T'_{13,03} = 73,6 \text{ kN},$$

$$T'_2 = T'_{22,12} + T'_{23,13} = 46,1 \text{ kN}.$$

Neposredno nakon raspodjele vrijednosti momenata s poluokvira na okvir — prije njihova uravnoteženja — zbroj je vrijednosti poprečnih sila u stupovima etaže jednak vrijednosti poprečne sile u odgovarajućem stupu poluokvira. Vrijednosti su poprečnih sila u stupovima poluokvira, znamo,  $T_1 = H_1 + H_2$  i  $T_2 = H_2$ , pa uvrštavanje u prethodne izraze daje

$$\begin{aligned} -T'_{11,01} - T'_{12,02} - T'_{13,03} + H_1 + H_2 &= T_1 - T'_1, \\ -T'_{22,12} - T'_{23,13} + H_2 &= T_2 - T'_2. \end{aligned}$$

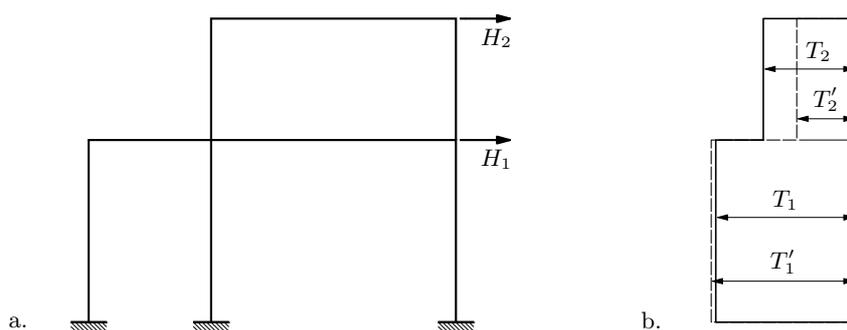
Prema tome, vrijednosti neuravnoteženih horizontalnih sila jednake su razlikama vrijednosti poprečnih sila u stupovima poluokvira i zbroja vrijednosti poprečnih sila u stu-

povima odgovarajućih etaža okvira nakon uravnoteženja momenata. Te ćemo razlike označiti sa  $\Delta T_i$ :

$$\Delta T_1 = T_1 - T'_1 = -0,3 \text{ kN},$$

$$\Delta T_2 = T_2 - T'_2 = 2,2 \text{ kN};$$

u prvoj je etaži, dakle, zbroj vrijednosti poprečnih sila veći nego što bi za odražavanje ravnoteže trebao biti, dok je u drugoj etaži manji. Na slici 47.b. skicirani su dijagrami ukupnih poprečnih sila u stupovima okvira prije uravnoteženja momenata (puna linija) i nakon njega (crtkano); kako su razlike vrijednosti razmjerno male u odnosu na vrijednosti sila, prikaz je karikiran.



Slika 47.

Relativne su pogreške

$$\epsilon_1 = \frac{|\Delta T_1|}{|T_1|} = \frac{0,3}{73,3} = 0,004 = 0,4 \%,$$

$$\epsilon_2 = \frac{|\Delta T_2|}{|T_2|} = \frac{2,2}{48,3} = 0,046 = 4,6 \%.$$

(Veličine  $|\Delta T_i|$  nazivamo apsolutnim pogreškama.) U prvoj je etaži pogreška doduše zanemarivo mala, ali zbog znatno veće pogreške u drugoj etaži rezultate nećemo smatrati konačnima.

U prvoj etaži treba zbroj vrijednosti poprečnih sila smanjiti, a u drugoj povećati. Dobile su vrijednosti takve su kao da na okvir umjesto sila čije su vrijednosti  $H_1 = 25,0 \text{ kN}$  i  $H_2 = 48,3 \text{ kN}$  djeluju sile s vrijednostima

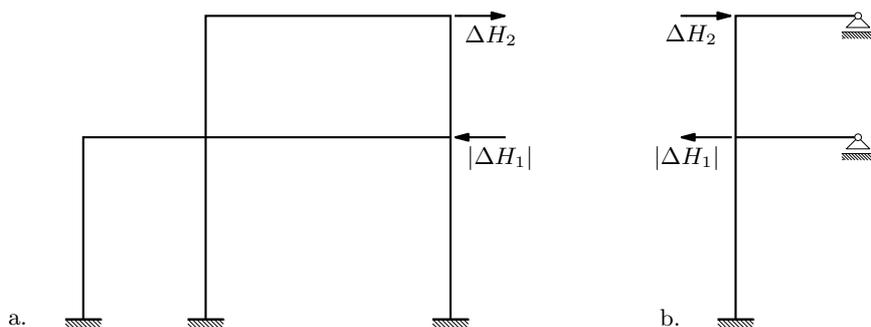
$$H'_2 = T'_{22,12} + T'_{23,13} = 46,1 \text{ kN},$$

$$H'_1 = T'_{11,01} + T'_{12,02} + T'_{13,03} - H'_2 = 27,5 \text{ kN};$$

slikovito rečeno, kao da smo prvu etažu okvira prejako gurnuli, a drugu preslabo. Stoga drugu etažu moramo dalje gurnuti, a prvu malo vratiti — okvir ćemo opteretiti kao na slici 48.a., gdje su

$$\Delta H_1 = H_1 - H'_1 = -2,5 \text{ kN},$$

$$\Delta H_2 = H_2 - H'_2 = 2,2 \text{ kN},$$



Slika 48.

i proći kroz još jedan ciklus sastavljen od proračuna na poluokviru Wernerovim postupkom (slika 48.b.) i uravnoteženja momenata Crossovim postupkom.

Vrijednosti  $\Delta H_1$  i  $\Delta H_2$  u stvari ne treba računati — u izraze za vrijednosti momenata upetosti na poluokviru ulaze samo vrijednosti silama  $\Delta \vec{H}_1$  i  $\Delta \vec{H}_2$  izazvanih poprečnih sila u stupovima poluokvira, a to su poznate nam vrijednosti  $\Delta T_1$  i  $\Delta T_2$  [dokažite!]:

$$\begin{aligned}\bar{M}'_{1,0} &= \bar{M}'_{0,1} = \frac{1}{2} \Delta T_1 h_1 = \frac{1}{2} \cdot (-0,3) \cdot 4,2 = -0,6 \text{ kNm}, \\ \bar{M}'_{2,1} &= \bar{M}'_{1,2} = \frac{1}{2} \Delta T_2 h_2 = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \cdot 2,8 = 3,1 \text{ kNm}.\end{aligned}$$

Relaksacija na poluokviru prikazana je na slici 49. Započeli smo u čvoru 2, a nakon uravnoteženja čvora 1 još smo se jednom vratili u čvor 2. Nakon prenošenja vrijednosti momenata s poluokvira na okvir uravnotežujemo ih Crossovim postupkom (slika 50.). Započnemo li sa čvorovima 1<sub>1</sub> i 1<sub>3</sub>, svaki je čvor dovoljno jednom uravnotežiti.

Sada su ukupne vrijednosti poprečnih sila u stupovima:

$$\begin{aligned}T_1'' &= T_{1,0_1}'' + T_{1_2,0_2}'' + T_{1_3,0_3}'' = 0 - 0,14 - 0,14 = -0,28 \text{ kN}, \\ T_2'' &= T_{2_2,1_2}'' + T_{2_3,1_3}'' = 1,1 + 1,0 = 2,1 \text{ kN},\end{aligned}$$

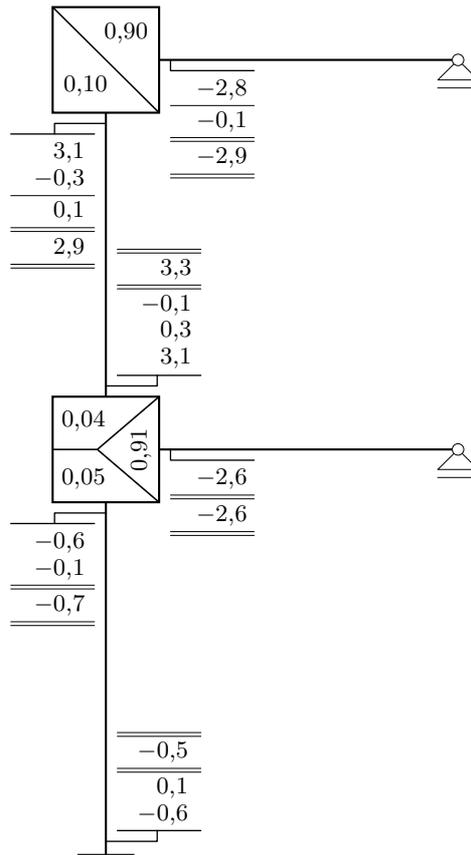
pa su vrijednosti neuravnoteženih horizontalnih sila

$$\begin{aligned}\Delta T_1' &= \Delta T_1 - T_1'' = -0,3 - (-0,28) = -0,02 \text{ kN}, \\ \Delta T_2' &= \Delta T_2 - T_2'' = 2,2 - 2,1 = 0,1 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Te vrijednosti imaju različite predznake, pa se na prvi pogled čini da smo ponovo u jednoj etaži otišli predaleko, a u drugoj nedovoljno daleko. Međutim, sile  $\Delta \vec{T}_1$  i  $\Delta \vec{T}_2$  imaju suprotne orijentacije, odnosno, u parovima  $\Delta \vec{T}_1, \vec{T}_1''$  i  $\Delta \vec{T}_2, \vec{T}_2''$  obje sile imaju iste orijentacije. U oba su slučaja intenziteti sila  $\vec{T}_i''$  manji od intenziteta sila  $\Delta \vec{T}_i$ , što znači da u obje etaže te intenzitete treba povećati.

Uvest ćemo popravni koeficijent

$$\alpha = \frac{|\Delta T_1| h_1 + |\Delta T_2| h_2}{|T_1''| h_1 + |T_2''| h_2} = \frac{0,3 \cdot 4,2 + 2,2 \cdot 2,8}{0,28 \cdot 4,2 + 2,1 \cdot 2,8} = 1,05$$



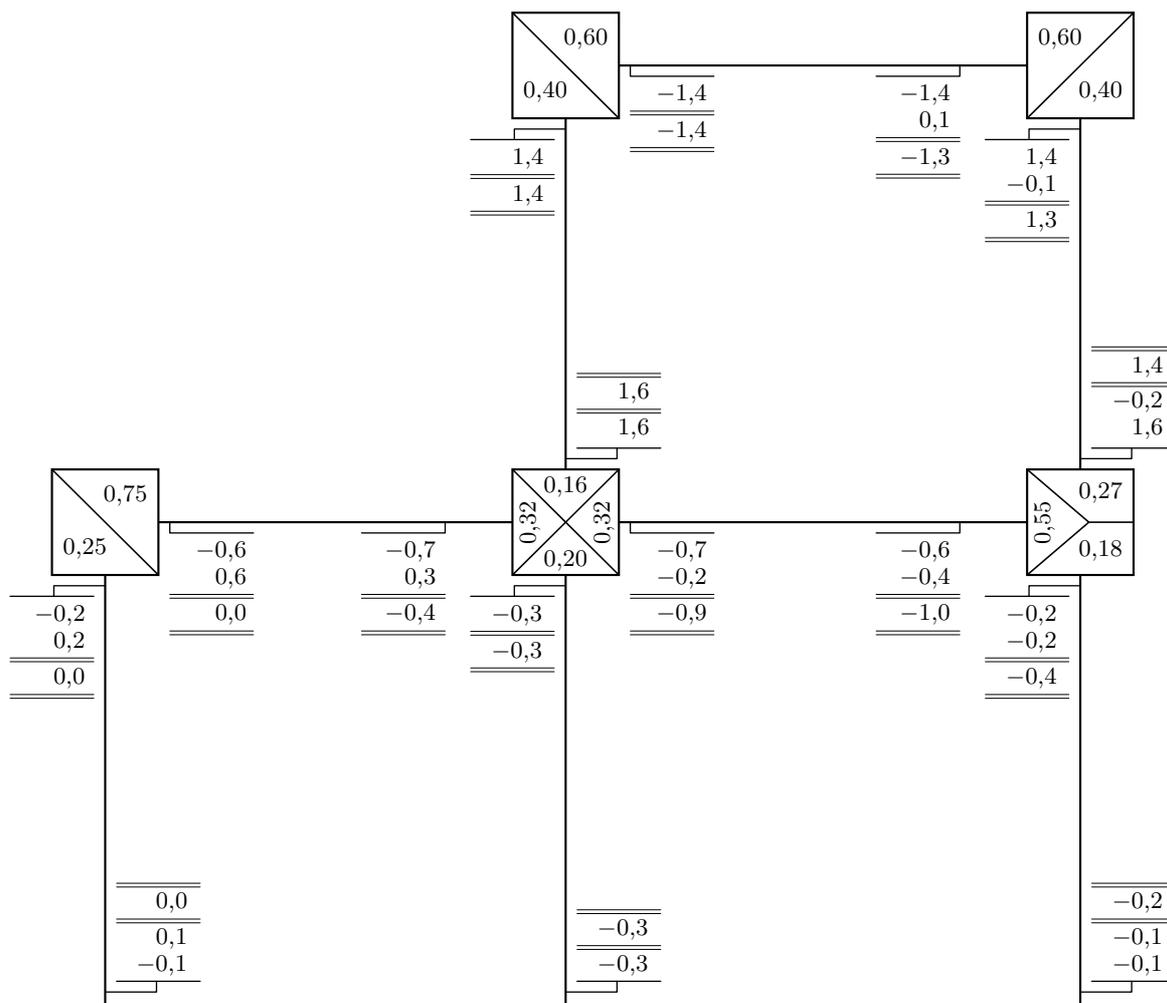
Slika 49.

i njime pomnožiti vrijednosti momenata izračunane na slici 50. Time će se povećati i intenziteti poprečnih sila. Uvjeti ravnoteže horizontalnih sila još uvijek neće biti zadovoljeni, ali će vrijednosti neuravnoteženih sila biti znatno manje — zanemarive u okvirima točnosti tražene u „praktičnim” proračunima.

Vrijednosti momenata dobivene u prvom ciklusu — u proračunu na slikama 44. i 45. — nismo mogli pomnožiti popravnim koeficijentom zato što je tada intenzitet jedne sile trebalo povećati, a intenzitet druge smanjiti. Da je trebalo oba intenziteta povećati ili oba smanjiti, množenjem vrijednosti momenata odgovarajućim popravnim koeficijentim mogli smo izbjeći drugi ciklus proračuna.

U općem se slučaju može pojaviti samo jedna od spomenute dvije mogućnosti. Neka, neovisno o tome o kojem je ciklusu riječ,  $\mathcal{T}_i$  označava vrijednost poprečne sile u  $i$ -tom stupu poluokvira, a  $\mathcal{T}'_i$  zbroj vrijednostî poprečnih sila u stupovima  $i$ -te etaže okvira nakon uravnoteženja momenata. (Nakon prvoga su ciklusa  $\mathcal{T}_i = T_i$  i  $\mathcal{T}'_i = T'_i$ , a nakon drugog  $\mathcal{T}_i = \Delta T_i$  i  $\mathcal{T}'_i = T''_i$ .)

Prva je mogućnost: razlike  $|\mathcal{T}_i| - |\mathcal{T}'_i|$  imaju isti predznak za sve  $i$ . To znači da treba intenzitete svih sila povećati (predznak '+') ili smanjiti (predznak '-'). To se najčešće s dovoljnom točnošću može, čak i nakon prvoga ciklusa, napraviti množenjem vrijednostî



Slika 50.

(uravnoteženih) momenata koeficijentom

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^e |\mathcal{T}_i| h_i}{\sum_{i=1}^e |\mathcal{T}'_i| h_i}, \quad (75)$$

pa ne treba nastavljati proračun ulaskom u novi ciklus. Rekosmo već, horizontalne sile neće biti u ravnoteži, ali će vrijednosti neuravnoteženih sila biti zanemarivo male. (Te vrijednosti treba provjeriti. Ne zadovoljavaju li zahtijevanu točnost, treba ipak provesti još jedan ciklus proračuna.)

U posebnom slučaju, ako su

$$\frac{|\mathcal{T}_i|}{|\mathcal{T}'_i|} = \text{const} = \alpha_a \quad \forall i,$$

to jest, ako su dijagrami  $\mathcal{T}_i$  i  $\mathcal{T}'_i$  međusobno afini, množenjem vrijednosti momenata s  $\alpha_a$  dobivamo točne vrijednosti poprečnih sila i, time, ravnotežu horizontalnih sila.



### 3. Utjecajne funkcije i utjecajne linije — izračunavanje i crtanje

#### 3.1. Statički određeni nosači

Utjecajne funkcije i utjecajne linije naučili ste primjenjivati u *Građevnoj statici 1*. Prikazat ćemo sada statički postupak određivanja utjecajnih funkcija na jednostavnim statički određenim grednim nosačima: jednostavno oslonjenoj gredi, konzoli i gredi s prepustima.

Riječ je o ravnim, vodoravno položenim gredama, a pretpostavit ćemo da je opterećenje koje na njih djeluje vertikalno. Jedinična sila koju ćemo upotrijebiti za određivanje utjecajnih funkcija bit će stoga usporedna s osi  $z$  globalnoga koordinatnog sustava. Osim pravca — paralele s osi  $z$  kroz točku  $x$  — odabrati treba i smisao njezina djelovanja. O tom će izboru ovisiti predznak vrijednosti utjecajne funkcije, odnosno predznak ordinata utjecajne linije. Vertikalna opterećenja građevinskih konstrukcija najčešće djeluju „prema dolje”, u pozitivnom smislu osi  $z$ , pa ćemo taj smisao odabrati i za smisao djelovanja jedinične sile; time se izbjegava učestalo uvrštavanje negativnih vrijednosti sila i opterećenja u izraze za izračunavanje njihova utjecaja, izvedene u poglavlju 14. bilježaka s predavanja *Građevne statike 1*. [27].

Pri vertikalnom se opterećenju u vodoravnim ravnim gredama javljaju momenti savijanja i poprečne sile, dok su uzdužne sile jednake nuli; reakcije tih greda su vertikalne.

Jedinična sila nalazi se u po volji odabranoj točki  $x$  na gredi. Iz uvjeta ravnoteže grede ili njezina pogodno odabranog dijela izrazit ćemo traženu statičku veličinu kao funkciju položaja  $x$  jedinične sile.

##### 3.1.1. Jednostavno oslonjena greda

Promatrat ćemo jednostavno oslonjenu gredu raspona  $\ell$  smještenu u koordinatni sustav tako da se njezin lijevi ležaj nalazi u ishodištu, a os grede poklapa s osi  $x$ . Lijevi ćemo ležaj označiti s A, a desni s B. [Nacrtajte skicu! Popratite crtežima sve izvode koji slijede! Nacrtajte grafove utjecajnih funkcija — utjecajne linije]

**Utjecajne funkcije za reakcije.** Reakcije u ležajima A i B kao funkcije položaja jedinične sile označavamo s  $\eta_A$  i  $\eta_B$ . Pozitivan smisao djelovanja reakcija dogovorno je „prema gore”, dakle, negativan smisao osi  $z$ .

Iz uvjeta ravnoteže momenata oko ležaja B,

$$-\eta_A(x) \cdot \ell + 1 \cdot (\ell - x) = 0,$$

dobivamo

$$\eta_A(x) = \frac{\ell - x}{\ell} \quad \text{za } 0 \leq x \leq \ell, \quad (76)$$

a iz uvjeta ravnoteže momenata oko ležaja A,

$$-1 \cdot x + \eta_B(x) \cdot \ell = 0,$$

slijedi

$$\eta_B(x) = \frac{x}{\ell} \quad \text{za } 0 \leq x \leq \ell. \quad (77)$$

Obje su funkcije linearne. Za crtanje utjecajnih linija, koje su dijelovi pravaca iznad segmenta  $[0, \ell]$ , potrebne su po dvije točke — vrijednosti utjecajnih funkcija treba izračunati u po dvije točke<sup>15</sup>:  $\eta_A(0) = -1$  i  $\eta_A(\ell) = 0$  te  $\eta_B(0) = 0$  i  $\eta_B(\ell) = -1$ . Utjecajna linija  $\eta_A$  prolazi, dakle, točkama  $(0, -1)$  i  $(\ell, 0)$ , a  $\eta_B$  točkama  $(0, 0)$  i  $(\ell, -1)$ .

**Utjecajna funkcija za moment savijanja.** Odredit ćemo izraze za utjecajnu funkciju za moment savijanja u općem presjeku  $x_t$ ,  $0 < x_t < \ell$ . Ti će izrazi ovisiti o tome nalazi li se jedinična sila lijevo ili desno od presjeka  $x_t$  — napišemo li, primjerice, jednadžbu ravnoteže za lijevi dio nosača, jedinična će sila ući u tu jednadžbu ako se nalazi na njemu, ali ne i ako djeluje na desnom dijelu.

Nalazi li se jedinična sila na lijevome dijelu nosača ( $0 \leq x \leq x_t$ ), izdvojiti ćemo desni dio, na koji djeluju reakcija u ležaju B te moment savijanja i poprečna sila u presjeku  $x_t$ , i postaviti uvjet ravnoteže momenata oko točke  $x_t$ :

$$-\eta_{M_t}(x) + \eta_B(x) (\ell - x_t) = 0.$$

Iz te jednadžbe dobivamo

$$\eta_{M_t}(x) = \eta_B(x) (\ell - x_t). \quad (78)$$

Ako pak jedinična sila djeluje na desnome dijelu nosača ( $x_t \leq x \leq \ell$ ), izdvajamo lijevi dio. Za taj je dio jednadžba ravnoteže momenata oko  $x_t$

$$-\eta_A(x) x_t + \eta_{M_t}(x) = 0,$$

a iz nje slijedi

$$\eta_{M_t}(x) = \eta_A(x) x_t. \quad (79)$$

Uvrstimo li u izvedene izraze za  $\eta_B$  i  $\eta_A$  izraze (77) i (76), dobit ćemo

$$\eta_{M_t}(x) = \begin{cases} \frac{\ell - x_t}{\ell} x & \text{za } 0 \leq x \leq x_t, \\ \frac{x_t}{\ell} (\ell - x) & \text{za } x_t < x \leq \ell. \end{cases} \quad (80)$$

Oba podizraza prikazuju linearne funkcije. Za  $x = x_t$  oba podizraza daju istu vrijednost,  $\eta_{M_t}(x_t) = x_t(\ell - x_t)/\ell$ , pa područja mogu biti i  $0 \leq x < x_t$ ,  $x_t \leq x \leq \ell$ , a možemo i, doduše matematički ne posve korektno, pisati  $0 \leq x \leq x_t$ ,  $x_t \leq x \leq \ell$ .

<sup>15</sup> Pojam *točka* upotrebljavamo u dva značenja: točka  $x$  na osi nosača i točka u ravnini, na grafu funkcije:  $(x, \eta_{\mathfrak{F}}(x))$ . Odgovarajuće će značenje, vjerujemo, biti jasno iz konteksta.

Naravno, iste bismo izraze dobili da smo za jediničnu silu na lijevom dijelu promatrali ravnotežu lijevoga dijela, a za silu na desnom dijelu ravnotežu desnoga dijela. Primjerice, za lijevi dio, sa silom na njemu, jednadžba je ravnoteže momenata oko točke  $x_t$

$$-\eta_A(x) x_t + 1(x_t - x) + \eta_{M_t}(x) = 0,$$

iz čega, nakon uvrštavanja (76) i sređivanja, slijedi gornji podizraz u (80).

Nacrtajmo sada utjecajnu liniju za moment savijanja u presjeku  $x_t$  proste grede, odabranom po volji. Izraz (80) pokazuje da je ta utjecajna linija sastavljena od dva pravčasta odsječka, nad intervalima  $[0, x_t]$  i  $\langle x_t, \ell \rangle$ . Za crtanje tih odsječaka potrebne su, znamo, po dvije točke. Pri odabiru tih točaka ne moramo se ograničiti na  $x$  iz pripadnih intervala — odgovarajuće odsječke možemo 'izrezati' nakon što nacrtamo pravce na kojima leže.

Za izraz (80) prvi odsječak utjecajne linije leži na pravcu koji prolazi kroz točke  $(0, 0)$  i  $(\ell, \ell - x_t)$ , a drugi na pravcu kroz  $(0, x_t)$  i  $(\ell, 0)$ . U  $x_t$  su ordinate obje grane utjecajne linije jednake (što se također može iskoristiti pri crtanju — kako?).

**Greenove funkcije.** Utjecajne funkcije mogu se smatrati funkcijama dviju varijabli: mjesta na nosaču (točke  $x_t$ ) u kojem se izračunava promatrana veličina i položaja  $x$  jedinične sile:

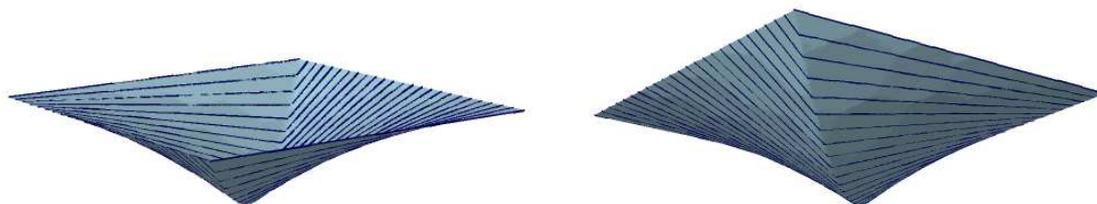
$$\eta_{\mathfrak{F}} : (x_t, x) \mapsto \eta_{\mathfrak{F}}(x_t, x).$$

Matematička je formalizacija tako shvaćenog pojma utjecajne funkcije *Greenova funkcija*.

Utjecajna funkcija  $\eta_M$  za moment savijanja na jednostavno oslonjenoj gredi definirana je, dakle, na  $[0, \ell] \times [0, \ell]$ :

$$\eta_M(x_t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell}(\ell - x_t)x & \text{za } 0 \leq x \leq x_t \leq \ell, \\ \frac{1}{\ell}x_t(\ell - x) & \text{za } 0 \leq x_t < x \leq \ell \end{cases}$$

Graf te funkcije je ploha prikazana na slici 52.



Slika 52.

U nastavku ćemo mjesto  $x_t$  u kojemu izračunavamo traženu veličinu zadati unaprijed, pa kao varijabla ostaje samo položaj  $x$  jedinične sile. Utjecajne su linije krivulje ili, kao u našem primjeru, pravci nastali presijecanjem Greenove plohe ravninama  $x_t = \text{const}$ .

**Utjecajna funkcija za poprečnu silu.** Nalazi li se jedinična sila lijevo od presjeka,  $x < x_t$ , postavljamo uvjet ravnoteže sila koje djeluju na desni dio usporedno s osi  $z$ ,

$$-\eta_{T_t}(x) - \eta_B(x) = 0,$$

te dobivamo

$$\eta_{T_t}(x) = -\eta_B(x).$$

Za jediničnu silu desno od presjeka,  $x > x_t$ , uvjet ravnoteže sila koje djeluju na lijevi dio usporedno sa  $z$ ,

$$-\eta_A(x) + \eta_{T_t}(x) = 0,$$

daje

$$\eta_{T_t}(x) = \eta_A(x).$$

Uvrštavanjem izraza (77) i (76) za  $\eta_B$  i  $\eta_A$ , dobivamo

$$\eta_{T_t}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\ell} & \text{za } 0 \leq x < x_t, \\ \frac{\ell - x}{\ell} & \text{za } x_t < x \leq \ell. \end{cases} \quad (81)$$

Oba su podizraza linearna. Za  $x = x_t$  ti podizrazi daju različite vrijednosti; stoga je funkcija  $\eta_{T_t}$  u toj točki nedefinirana.

Za crtanje utjecajne linije izračunat ćemo vrijednosti podizraza u  $x = 0$  i  $x = \ell$ . Iz izraza (81) dobivamo da odsječak utjecajne linije „nad” intervalom  $[0, x_t]$  leži na pravcu koji prolazi kroz točke  $(0, 0)$  i  $(\ell, -1)$ , a odsječak „nad” intervalom  $\langle x_t, \ell]$  na pravcu koji prolazi točkama  $(0, 1)$  i  $(\ell, 0)$ . Koeficijenti smjerova tih pravaca su jednaki:  $-1/\ell$ , što znači da su pravci međusobno paralelni. Nalazi li se jedinična sila neposredno lijevo od presjeka  $x_t$ , formalno  $x = x_t^-$ , ordinatu utjecajne linije izračunavamo uvrštavanjem  $x = x_t$  u prvi podizraz izraza (81):  $\eta_{T_t}(x_t^-) = -x_t/\ell$ . Za silu neposredno desno od presjeka,  $x = x_t^+$ , ordinatu utjecajne linije izračunavamo uvrštavanjem  $x = x_t$  u drugi podizraz:  $\eta_{T_t}(x_t^+) = (\ell - x_t)/\ell$ . Pri prijazu preko  $x = x_t$  utjecajna linija ima skok za

$$\frac{\ell - x_t}{\ell} - \left(-\frac{x_t}{\ell}\right) = 1.$$

### 3.1.2. Konzola

Konzolu upetu na lijevom kraju (u točki A) nazivamo desnom, a konzolu upetu na desnom kraju (u točki B) lijevom konzolom. U oba slučaja ishodište koordinatnoga sustava postavljamo u lijevi kraj (u točku A), a os  $x$  podudara se s osi konzole. Duljina konzole je  $\ell$ .

Kao i kod jednostavno oslonjene grede, izrazi za utjecajne funkcije za unutarnje sile u općem presjeku  $x_t$  ovisit će o tome s koje strane toga presjeka jedinična sila djeluje.

**Desna konzola.** Ako jedinična sila djeluje lijevo od presjeka  $x_t$ , na desni dio djeluju samo poprečna sila i moment savijanja u presjeku  $x_t$ . Taj će dio biti u ravnoteži samo ako su i sila i moment jednaki nuli:

$$\eta_{M_t}(x) = 0 \quad \& \quad \eta_{T_t}(x) = 0.$$

Nalazi li se jedinična sila desno od presjeka  $x_t$ , na desni dio, osim poprečne sile i momenta savijanja u presjeku, djeluje i ta jedinična sila. Uvjeti ravnoteže momenata oko presjeka  $x_t$  i ravnoteže vertikalnih sila daju

$$\eta_{M_t}(x) = -1(x - x_t) \quad \& \quad \eta_{T_t}(x) = 1.$$

Konačni su izrazi za utjecajne funkcije, prema tome:

$$\eta_{M_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq x \leq x_t, \\ x_t - x & \text{za } x_t < x \leq \ell; \end{cases} \quad (82)$$

$$\eta_{T_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq x < x_t, \\ 1 & \text{za } x_t < x \leq \ell. \end{cases} \quad (83)$$

**Lijeva konzola.** Slični izvodi [provedite ih!] daju

$$\eta_{M_t}(x) = \begin{cases} x - x_t & \text{za } 0 \leq x \leq x_t, \\ 0 & \text{za } x_t < x \leq \ell; \end{cases} \quad (84)$$

$$\eta_{T_t}(x) = \begin{cases} -1 & \text{za } 0 \leq x < x_t, \\ 0 & \text{za } x_t < x \leq \ell. \end{cases} \quad (85)$$

**Reakcije.** Uvrstimo li  $x_t = 0$  i  $x_t = \ell$  u izraze (82) i (84), dobit ćemo izraze za utjecajne funkcije za reaktivne momente u ležajevima:

- za desnu konzolu:

$$\eta_{M_A}(x) = -x \quad \text{za } 0 \leq x \leq \ell;$$

- za lijevu konzolu:

$$\eta_{M_B}(x) = x - \ell \quad \text{za } 0 \leq x \leq \ell.$$

Isto tako, iz izraza (83) i (85) možemo dobiti izraze za vertikalne reakcije:

- za desnu konzolu:

$$\eta_A(x) = 1 \quad \text{za } 0 \leq x \leq \ell;$$

- za lijevu konzolu:

$$\eta_B(x) = 1 \quad \text{za } 0 \leq x \leq \ell.$$

Do promjene predznaka u izrazu za  $\eta_B$ , u odnosu na (83), došlo je zbog toga što su, dogovorno, reakcije pozitivne ako djeluju u negativnom smislu osi  $z$ , dok je pozitivan smisao djelovanja poprečne sile u presjeku s pozitivno orijentiranom normalom pozitivan smisao osi  $z$ .

### 3.1.3. Greda s prepustima

Gredu s prepustima smjestit ćemo u koordinatni sustav tako da je njezin lijevi ležaj (točka A) u ishodištu i da joj se os poklapa s osi  $x$ . Neka je razmak ležajeva  $\ell$ , duljina lijevoga prepusta  $\ell_a$ , a duljina desnoga prepusta  $\ell_b$ .

**Reakcije.** Nije teško pokazati [kako?] da će izrazi za utjecajne funkcije za reakcije biti

$$\eta_A(x) = \frac{\ell - x}{\ell} \quad \text{za } -\ell_a \leq x \leq \ell + \ell_b, \quad (86)$$

$$\eta_B(x) = \frac{x}{\ell} \quad \text{za } -\ell_a \leq x \leq \ell + \ell_b. \quad (87)$$

Usporedba s izrazima (76) i (77) pokazuje da su izrazi za utjecajne funkcije za reakcije na gredi s prepustima jednaki izrazima za utjecajne funkcije za reakcije na jednostavno oslonjenoj gredi; razlika je samo u područjima definicije tih funkcija. Ako se jedinična sila nalazi na lijevom prepustu,  $-\ell_a \leq x < 0$ , bit će  $\eta_A(x) > 1$  i  $\eta_B(x) < 0$ ; dakle, reakcija  $A$  će imati isti smisao, ali će po apsolutnoj vrijednosti biti veća nego pri djelovanju sile između ležajeva, dok će reakcija  $B$  promijeniti smisao djelovanja. S druge strane, nalazi li se jedinična sila na desnom prepustu,  $\ell < x \leq \ell + \ell_b$ , bit će  $\eta_A(x) < 0$  i  $\eta_B(x) > 1$ .

[Izvedite izraze za utjecajne linije za moment savijanja i za popračnu silu u presjeku između ležajeva te u presjecima na prepustima! Analizirajte statičko značenje tih izraza!]

## 3.2. Statički neodređeni nosači

Utjecajne funkcije za statičke veličine na statički neodređenim sistemima najčešće su nelinearne funkcije, pa su i utjecajne linije ponajčešće sastavljene od dijelova krivulja. Teorem Müller–Breslaua pruža nam slikovito objašnjenje te tvrdnje: utjecajna je linija jednaka progibnoj liniji nosača zbog pogodno odabranoga prisilnog pomaka određene njezove točke. (Zadovoljit ćemo se za sada površnim iskazom; teoremom ćemo se cjelovitije i iscrpnije pozabaviti pri opisu kinematičkoga postupka.)

Primjerima utjecajnih funkcija i utjecajnih linija za reaktivne sile i reaktivni moment u desnom ležaju obostrano upete grede (slika 53.a.) uvest ćemo statički i kinematički postupak izvođenja funkcijskih izraza i crtanja njihovih grafova.

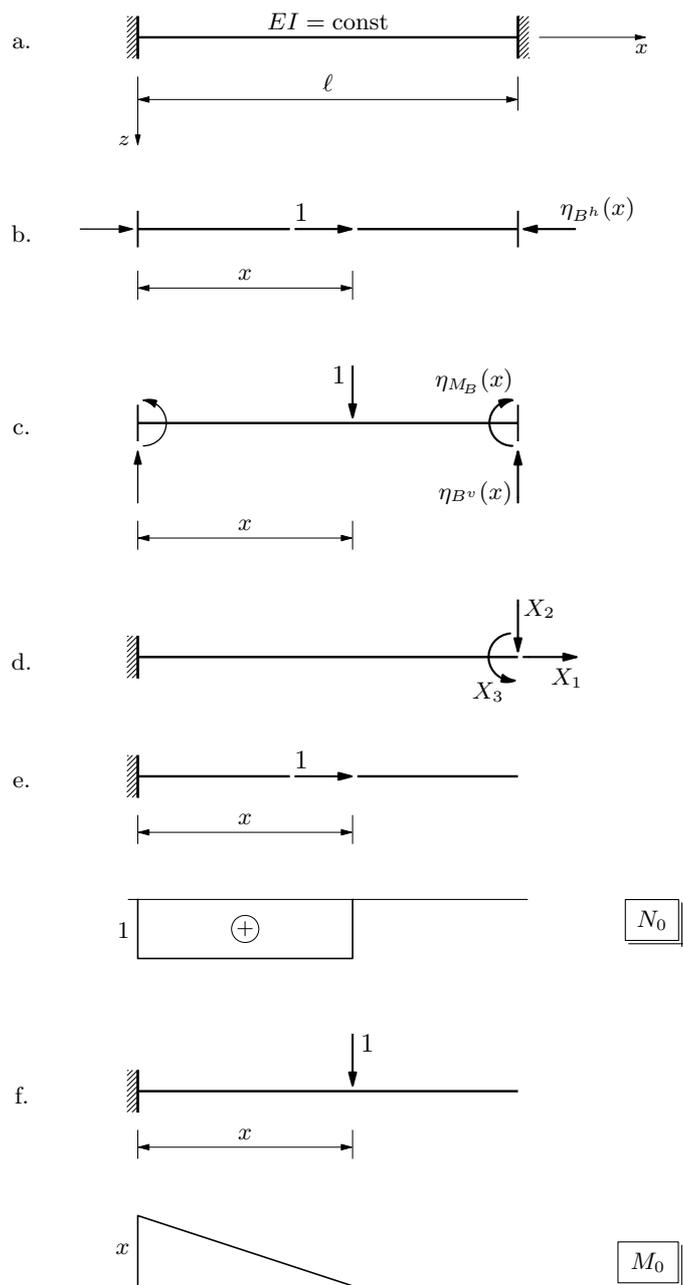
### 3.2.1. Statički postupak

U statičkomu postupku utjecajne funkcije nalazimo, u skladu s njihovom definicijom, kao funkcije apscise  $x$  hvatišta jediničnih sila koje se kao opterećenje „kreću” po gredi. Budući da su na ravnome štapu, kao što znamo, uzdužna i poprečna djelovanja međusobno neovisna, pogodno je na gredu postaviti zasebice jediničnu silu koja djeluje na pravcu njezine osi (slika 53.b.) i jediničnu silu koja djeluje okomito na os (slika c.).

Odaberemo li kao osnovni sistem za metodu sila konzolu s prekobrojnim silama orijentiranim kao na slici d., bit će  $\vec{X}_1 = -\vec{B}^h$ ,  $\vec{X}_2 = -\vec{B}^v$  i  $\vec{X}_3 = -\vec{M}_B$ , a time i  $\eta_{B^h} = -\eta_{X_1}$ ,  $\eta_{B^v} = -\eta_{X_2}$  te  $\eta_{M_B} = -\eta_{X_3}$ . Taj smo osnovni sistem uveli u pododjeljku 11.7.4. odjeljka *Matrica popustljivosti ravnoga štapa* bilježaka s predavanja *Građevne statike 1.* [27], pa sada možemo iskoristiti tamo izvedene izraze za komponente inverzne matrice  $\mathbf{D}^{-1}$  matrice popustljivosti  $\mathbf{D}$ , navedene u izrazu (290) na stranici 264.

Jasno je da vrijednosti unutarnjih sila u osnovnom sistemu ovise o položajima jediničnih sila (slike 53.e. i f.), tako da su i „slobodni” članovi u jednadžbama neprekinutosti funkcije tih položaja:

$$\begin{aligned}\delta_{1,0}(x) &= \frac{x}{EA}, \\ \delta_{2,0}(x) &= \frac{x^2(3\ell - x)}{6EI}, \\ \delta_{3,0}(x) &= -\frac{x^2}{2EI}.\end{aligned}$$



Slika 53.

I te smo izraze već izveli (na istoj stranici), s drugačijim oznakama, doduše: apscise hvatištâ sila označavamo sada, kao promjenjive veličine, s  $x$ , a prije smo ih smatrali unaprijed zadanim i stoga označili s  $a$ ; k tomu su još, dakako,  $P_x = 1$  i  $P_z = 1$ .

Kako je prva jednadžba neprekinutosti, koja se odnosi na uzdužni smjer, neovisna o ostale dvije, iz nje je neposredno

$$\eta_{X_1}(x) = \frac{1}{\delta_{1,1}} \cdot [-\delta_{1,0}(x)] = k_{1,1} \cdot [-\delta_{1,0}(x)] = \frac{EA}{\ell} \cdot \left(-\frac{x}{EA}\right) = -\frac{x}{\ell}.$$

Za poprečni pak smjer raspisivanjem izraza  $\mathbf{X}_\perp = \mathbf{D}_\perp^{-1} \mathbf{d}_\perp$ , gdje je  $\mathbf{d}_\perp = [-\delta_{2,0} \quad -\delta_{3,0}]^T$ , dobivamo

$$\eta_{X_2}(x) = \frac{12 EI}{\ell^3} \cdot \left( -\frac{x^2 (3\ell - x)}{6 EI} \right) + \frac{6 EI}{\ell^2} \cdot \frac{x^2}{2 EI} = -\frac{x^2 (3\ell - 2x)}{\ell^3},$$

$$\eta_{X_3}(x) = \frac{6 EI}{\ell^2} \cdot \left( -\frac{x^2 (3\ell - x)}{6 EI} \right) + \frac{4 EI}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2 EI} = -\frac{x^2 (\ell - x)}{\ell^2}.$$

(Izrazi za  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ , izvedeni u odjeljku o matrici popustljivosti, na stranici 265., postaju izrazima za  $\eta_{X_1}$ ,  $\eta_{X_2}$  i  $\eta_{X_3}$  uvrstimo li u njih  $a = x$  te  $P_x = 1$  ili  $P_z = 1$ .)

Strogo govoreći, rješavali smo dva sustava jednadžbi neprekinutosti: u prvome su, za jediničnu silu na pravcu osi grede (slika 53.e.), slobodni članovi  $\delta_{1,0}^\parallel = \delta_{1,0}$  i  $\delta_{2,0}^\parallel = \delta_{3,0}^\parallel = 0$ , a u drugom su sustavu, za jediničnu silu koja je okomita na taj pravac (slika f.),  $\delta_{1,0}^\perp = 0$ ,  $\delta_{2,0}^\perp = \delta_{2,0}$  i  $\delta_{3,0}^\perp = \delta_{3,0}$ . Rješenja prvoga sustava utjecajne su funkcije  $\eta_{X_1}^\parallel$ ,  $\eta_{X_2}^\parallel$  i  $\eta_{X_3}^\parallel$  za izračunavanje vrijednosti reakcija izazvanih silama koje djeluju na pravcu osi, dok su rješenja drugoga funkcije  $\eta_{X_1}^\perp$ ,  $\eta_{X_2}^\perp$  i  $\eta_{X_3}^\perp$  s pomoću kojih se izračunavaju vrijednosti reakcija zbog sila okomitih na os i zbog momenata. Ali, zbog neovisnosti smjerova djelovanja su  $\eta_{X_2}^\parallel = 0$ ,  $\eta_{X_3}^\parallel = 0$  i  $\eta_{X_1}^\perp = 0$ , tako da možemo pisati  $\eta_{X_1}^\parallel = \eta_{X_1}$ ,  $\eta_{X_2}^\perp = \eta_{X_2}$  i  $\eta_{X_3}^\perp = \eta_{X_3}$ .

Tražene su utjecajne funkcije za reakcije:

$$\eta_{B^h}(x) = -\eta_{X_1}(x) = \frac{x}{\ell} \quad \text{za } x \in [0, \ell], \quad (88)$$

$$\eta_{B^v}(x) = -\eta_{X_2}(x) = \frac{x^2 (3\ell - 2x)}{\ell^3} \quad \text{za } x \in [0, \ell], \quad (89)$$

$$\eta_{M_B}(x) = -\eta_{X_3}(x) = \frac{x^2 (\ell - x)}{\ell^2} \quad \text{za } x \in [0, \ell]. \quad (90)$$

Da se prisjetimo smisla i svrhe utjecajnih funkcija, pretpostavit ćemo da u točki u dvije trećine raspona obostrano upete grede djeluje sila  $\vec{F} = -25 \vec{i} + 50 \vec{k}$  [kN]. Uvrstimo li  $x = 2\ell/3$  u prethodne izraze, dobivamo  $\eta_{B^h}(2\ell/3) = 2/3$ ,  $\eta_{B^v}(2\ell/3) = 20/27$  i  $\eta_{M_B}(2\ell/3) = 4\ell/27$ , pa su

$$B^h = \eta_{B^h} F_x = \frac{2}{3} 25 = 16,67 \text{ kN},$$

$$B^v = \eta_{B^v} F_z = \frac{20}{27} 50 = 37,04 \text{ kN},$$

$$M_B = \eta_{M_B} F_z = \frac{4}{27} \cdot 50 \cdot \ell = 7,41 \ell \text{ kNm},$$

i, za  $\ell = 5 \text{ m}$ ,  $M_B = 37,04 \text{ kNm}$ .

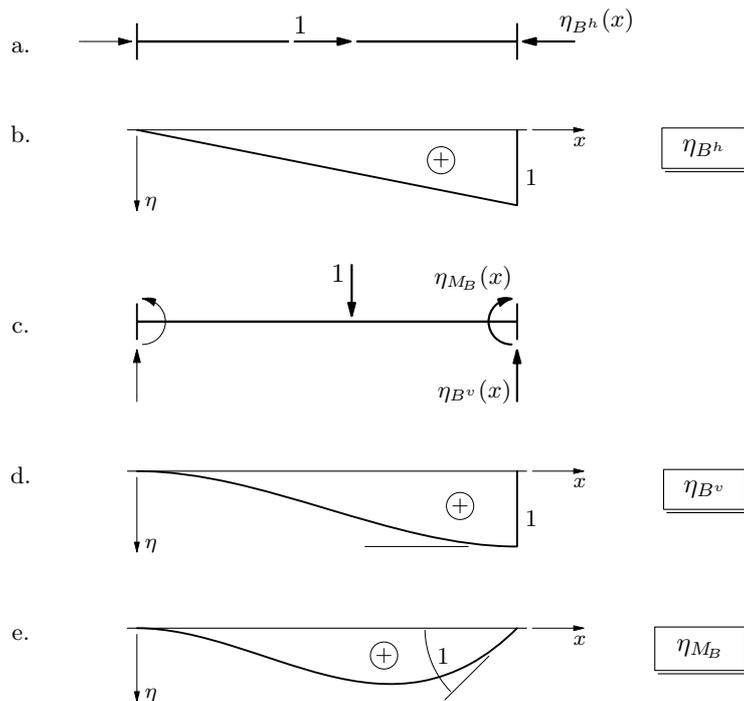
Djeluje li pak okomito na os grede jednoliko raspodijeljeno opterećenje vrijednosti  $q_0$ , bit će

$$B^v = \int_0^\ell q(x) \eta_{B^v}(x) dx = q_0 \int_0^\ell \eta_{B^v}(x) dx = q_0 \left( \frac{1}{2} \ell \right),$$

$$M_B = \int_0^{\ell} q(x) \eta_{M_B}(x) dx = q_0 \int_0^{\ell} \eta_{M_B}(x) dx = q_0 \left( \frac{1}{12} \ell^2 \right),$$

pa su, za  $q_0 = 25 \text{ kN/m}$  i  $\ell = 5 \text{ m}$ ,  $B^v = 62,50 \text{ kN}$  i  $M_B = 52,08 \text{ kNm}$ .

Slike 54.b., d. i e. crteži su grafova utjecajnih funkcija — utjecajne linije. Na slikama a. i c. naznačene su pretpostavljene pozitivne orijentacije zadanih sila i reakcija.



Slika 54.

Funkcija  $\eta_{B^h}$  je linearna, pa su nam za crtanje njezina grafa dovoljne dvije točke:

$$\eta_{B^h}(0) = 0 \quad \text{i} \quad \eta_{B^h}(\ell) = 1.$$

Druge su dvije utjecajne funkcije dijelovi polinomâ trećega stupnja. Za crtanje utjecajne linije  $\eta_{B^v}$  izračunat ćemo vrijednosti u presjecima  $x = 0$ ,  $x = \ell/2$  i  $x = \ell$ :

$$\eta_{B^v}(0) = 0, \quad \eta_{B^v}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \eta_{B^v}(\ell) = 1.$$

Pogodno je izračunati i nagibe tangenata u presjecima  $x = 0$  i  $x = \ell$ ; uvrštavanjem u

$$\eta'_{B^v}(x) = \frac{6x(\ell - x)}{\ell^3} \quad (91)$$

dobivamo

$$\eta'_{B^v}(0) = 0 \quad \text{i} \quad \eta'_{B^v}(\ell) = 0.$$

Slično ćemo postupiti i pri crtanju utjecajne linije  $\eta_{M_B}$ . U odabranim su točkama vrijednosti funkcije:

$x$	0	$\frac{\ell}{4}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{3\ell}{4}$	$\ell$
$\eta_{M_B}$	0	$\frac{3\ell}{64}$	$\frac{\ell}{8}$	$\frac{9\ell}{64}$	0

a iz izraza za derivaciju

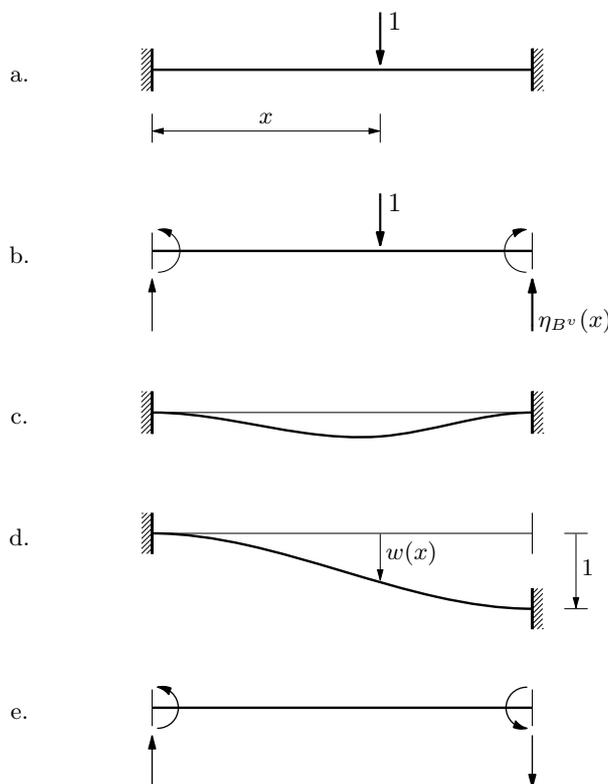
$$\eta'_{M_B}(x) = \frac{x(2\ell - 3x)}{\ell^2} \quad (92)$$

nalazimo i

$$\eta'_{M_B}(0) = 0 \quad \text{te} \quad \eta'_{M_B}(\ell) = -1.$$

### 3.2.2. Kinematički postupak

Statički postupak izvođenja izrazâ za utjecajne funkcije na neodređenim nosačima i crtanje utjecajnih linija kao grafova tih funkcija imaju ipak ponajviše teorijski i edukacijski značaj. U većini slučajeva utjecajne ćemo linije konstruirati kinematičkim postupkom.



Slika 55.

Valjanost postupka—*teorem Heinricha Müller-Breslawa*—„dokazat” ćemo na primjeru funkcije  $\eta_{B^v}$  i pripadne utjecajne linije. Polazište je poznati *teorem Enrica Bettija o uzajamnosti radova* sila u dva različita ravnotežna stanja. U prvome na gredu u nekoj točki  $x$ , okomito na njezinu os, djeluje jedinična sila (slika 55.a.). U drugom je pak stanju zadan prisilni jedinični pomak desnoga ležaja po pravcu okomitom na os grede (slika 55.d.).

Na slici 55.b. skicirane su sve vanjske sile koje u prvom stanju djeluju na gredu: zadana jedinična sila u općem položaju te uravnotežujuće reaktivne sile i uravnotežujući reaktivni momenti. Za primjenu Bettijeva teorema zamišljamo da te sile rade na pomacima drugoga stanja. U tom se stanju (slika d.) ležajevi ne zaokreću, a lijevi je ležaj uz to nepomičan, pa rade samo sila  $\eta_{B^v}(x)$  i jedinična sila. Obje sile djeluju na pravcima po kojima se odvijaju pomaci njihovih hvatišta, a kako su vrijednosti tih pomaka 1 i  $w(x)$ , pri čemu je smisao jediničnoga pomaka suprotan smislu djelovanja sile  $\eta_{B^v}(x)$ , rad je sila prvoga stanja na pomacima drugog stanja

$$-\eta_{B^v}(x) \cdot 1 + 1 \cdot w(x).$$

Prema Bettijevu teoremu rad je sila prvoga stanja na pomacima drugog jednak radu sila drugoga na pomacima prvog stanja. U drugom stanju, međutim, postoje samo reakcije (slika 55.e.), a u prvom pak stanju nema ni pomaka ni zaokreta ležajeva (progibna linija obostrano upete grede zbog djelovanja jedinične sile skicirana je na slici c.), tako da je rad sila drugog stanja na pomacima prvoga jednak nuli. Iz Bettijeva teorema stoga slijedi

$$-\eta_{B^v}(x) \cdot 1 + 1 \cdot w(x) = 0,$$

pa je

$$\eta_{B^v}(x) = w(x). \quad (93)$$

Prema tome, problem određivanja utjecajne funkcije svodi se na problem određivanja funkcijskoga izraza za progibnu liniju. Drugim riječima, treba riješiti dobro nam znanu diferencijalnu jednadžbu

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}, \quad (94)$$

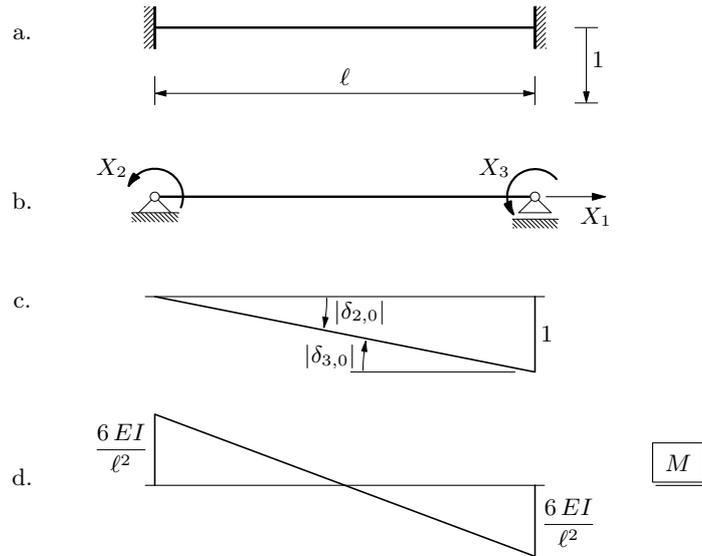
gdje je  $M$  funkcija koja opisuje vrijednosti momenata savijanja izazvanih prisilnim jediničnim pomakom desnoga ležaja „prema dolje” (slika 56.a.), u smislu, dakle, suprotnom od pozitivnoga smisla djelovanja sile za koju tražimo utjecajnu funkciju. Izraz za funkciju  $M$  izvest ćemo, recimo, metodom sila.

Za osnovni sistem sa slike 56.b., uz dijagram projekcija pomakâ na vertikalnu os sa slike c., sustav je jednadžbi neprekinutosti

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Iz prve jednadžbe, koja je neovisna o ostale dvije, odmah slijedi  $X_1 = 0$ . Vrijednosti pak nepoznanica  $X_2$  i  $X_3$  izračunavamo iz

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\perp^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} \end{bmatrix},$$



Slika 56.

pa su

$$X_2 = \frac{6EI}{\ell^2} \quad \text{i} \quad X_3 = \frac{6EI}{\ell^2}, \quad (95)$$

tako da je

$$M(x) = X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x) = \frac{6EI}{\ell^2} \cdot \left(-1 + \frac{x}{\ell}\right) + \frac{6EI}{\ell^2} \cdot \frac{x}{\ell} = \frac{6EI}{\ell^3} \cdot (-\ell + 2x);$$

dijagrame  $m_2$  i  $m_3$  možete naći na slikama 153.f. i h. na stranici 256. u bilješkama s predavanja *Građevne statike 1.* [27], a konačni je dijagram  $M$  prikazan na slici 56.d. na prethodnoj stranici.

Uvrštavanjem u (94) dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$w''(x) = \frac{6}{\ell^3} \cdot (\ell - 2x).$$

Prvo integriranje daje

$$w'(x) = \frac{6}{\ell^3} \cdot (\ell x - x^2) + C_1,$$

a iz rubnoga uvjeta  $\varphi(0) = -w'(0) = 0$  slijedi  $C_1 = 0$ . Još jednim integriranjem dobivamo

$$w(x) = \frac{6}{\ell^3} \cdot \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

I  $C_2 = 0$ , jer je  $w(0) = 0$ . Funkcijski je izraz za progibnu liniju, dakle, nakon sređivanja

$$w(x) = \frac{x^2(3\ell - 2x)}{\ell^3};$$

njegova je desna strana jednaka desnoj strani izraza (89) na stranici 85., što potvrđuje zaključak Müller-Breslaua da je  $\eta_{B^v} = w$ .

I u desnomu ležaju postoje dva rubna uvjeta:  $w(\ell) = 1$  i  $\varphi(\ell) = -w'(\ell) = 0$ . Za određivanje dviju integracijskih konstanata dovoljni su bili uvjeti u lijevom ležaju, pa uvjete u desnom možemo upotrijebiti za provjeru izvoda:

$$w'(\ell) = \frac{6}{\ell^3} (\ell \cdot \ell - \ell^2) = 0 \quad \text{i} \quad w(\ell) = \frac{\ell^2 (3\ell - 2\ell)}{\ell^3} = 1.$$

Sva će nam četiri rubna uvjeta trebati započnemo li s diferencijalnom jednadžbom

$$w^{IV}(x) = \frac{q(x)}{EI},$$

odnosno, budući da je zadan samo prisilni pomak, s homogenom jednadžbom

$$w^{IV}(x) = 0. \quad (96)$$

(Polazeći od te jednadžbe izbjegavamo prethodno traženje funkcije  $M$ .) Nakon trećega i četvrtog integriranja dobivamo

$$w'(x) = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$w(x) = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz uvjetâ  $\varphi(0) = -w'(0) = 0$  i  $w(0) = 0$  neposredno slijedi  $C_3 = 0$  i  $C_4 = 0$ . Preostala dva uvjeta,  $\varphi(\ell) = -w'(\ell) = 0$  i  $w(\ell) = 1$ , daju sustav

$$\frac{\ell^2}{2} C_1 + \ell C_2 = 0,$$

$$\frac{\ell^3}{6} C_1 + \frac{\ell^2}{2} C_2 = 1,$$

čija su rješenja

$$C_1 = -\frac{12}{\ell^3} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{6}{\ell^2},$$

te ponovo, nakon uvrštavanja i sređivanja, dobivamo već poznati izraz za  $w = \eta_{Bv}$ .

Samo je u jednostavnijim slučajevima, poput našega primjera, funkcijski izraz za progibnu liniju razmjerno lako, analitičkim rješavanjem diferencijalnih jednadžbi (94) ili (96), izvesti u zatvorenu obliku. Češće ćemo, nakon što na neki način nađemo dijagram momenata savijanja, odmah crtati progibnu liniju postupkom utemeljenim na *Mohrovoj analogiji*<sup>16</sup>. Tražene vrijednosti utjecajne funkcije tada očitavamo na utjecajnoj liniji koja, kao što smo netom dokazali, nije ništa drugo doli ta progibna linija.

<sup>16</sup> Otto Mohr je uočio (godine 1868.) da diferencijalna jednadžba ravnotežne konfiguracije niti

$$w''(x) = -\frac{q(x)}{H}$$

(u kojoj su funkcijom  $q$  zadane vrijednosti vertikalne distribuirane sile, a  $H$  je vrijednost napetosti niti), ima jednaku strukturu kao diferencijalna jednadžba progibne linije (94). Kako se ravnotežna konfiguracija niti, koja vam je vjerojatno poznatija pod nazivom veržne krivulje, može smatrati dijagramom momenata savijanja u gredi istoga raspona i pod istom distribuiranom silom, jer je diferencijalna jednadžba ravnoteže

$$M''(x) = -q(x)$$

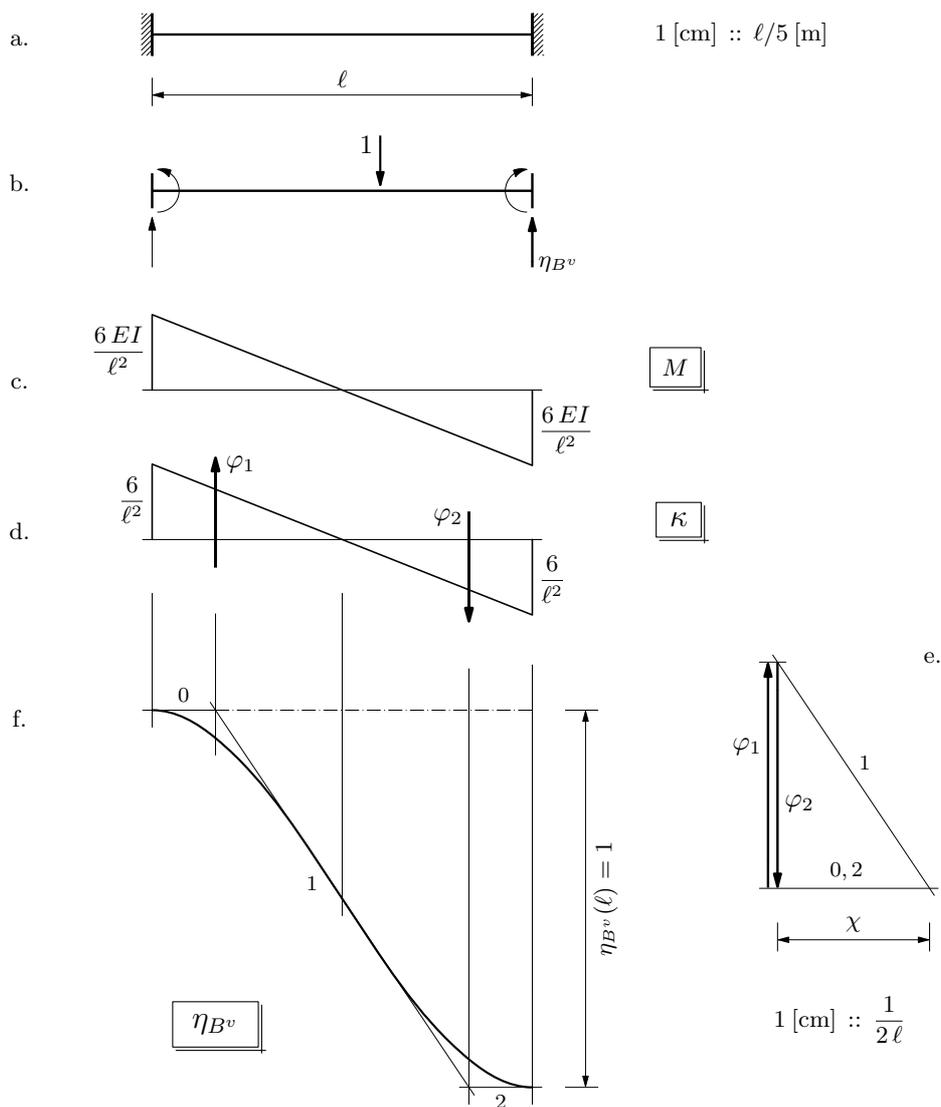
treća jednadžba jednake strukture, Mohr je zaključio da se progibna linija grede može nacrtati kao dijagram momenata izazvanih zamišljenom distribuiranom silom čije su vrijednosti opisane funkcijom  $\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI}$ .

Za očitavanje vrijednosti moraju mjerila na crtežu biti definirana. Progibnu/utjecajnu liniju nacrtat ćemo za gredu općega raspona  $\ell$ . Ako je crtež grede duljine  $\tilde{\ell} = k$  cm, onda je mjerilo rasponâ

$$1 \text{ [cm]} :: \ell/k \text{ [m]}.$$

Uvest ćemo i oznaku  $m = \ell/k$ . Za naš ćemo primjer uzeti da je  $k=5$ , pa je duljina crteža grede  $\tilde{\ell} = 5$  cm (slika 57.a.), a mjerilo je raspona

$$1 \text{ [cm]} :: \ell/5 \text{ [m]}.$$



Slika 57.

Za primjenu Mohrove analogije gredu, kojoj, vidjet ćemo, ležajni uvjeti ne trebaju biti definirani, „opterećujemo” zamišljenom „distribuiranom silom” čije su vrijednosti zadane funkcijom

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI};$$

njezin je graf prikazan na slici 57.d.

Verižnu krivulju za zadanu distribuiranu silu crtamo tako da je „upišemo” u njezin tangenti poligon — verižni poligon za sustav koncentriranih sila koji je statički ekvivalentan distribuiranoj sili: dijelove površine između grafa distribuirane sile i njegove apscisne osi, između dviju ordinala, zamjenjujemo koncentriranim silama čije su vrijednosti jednake orijentiranim ploštinama tih dijelova, a pravci djelovanje prolaze njihovim težištima.

No, funkcija  $\kappa$  po svom je stvarnom kinematičkom značenju funkcija koja opisuje zakrivljenost osi grede:  $\kappa = -w''$ . Orijetirana ploština površine između njezina grafa i osi  $x$ , između dviju ordinala, jednaka je stoga, kao vrijednost određenoga integrala, kutu  $\varphi$  koji zatvaraju tangente na progibnu liniju u točkama s pripadnim apscisama. Dakle, zamišljene „koncentrirane sile” za koje crtamo verižni poligon s kinematičkoga su gledišta vektori čije su vrijednosti jednake kutovima između tangenata na progibnu liniju.

U našem ćemo primjeru umjesto distribuirane zakrivljenosti  $\kappa$  uvesti vektore kutova  $\bar{\varphi}_1$  i  $\bar{\varphi}_2$  u težištima trokutâ od kojih je sastavljen njezin dijagram (slika 57.d.). Intenziteti tih vektora jednaki su površinama trokutâ:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{6}{\ell^2} = \frac{3}{2\ell}.$$

Pri konstruiranju tangentsnoga poligona s vektorima kutova postupamo kao s koncentriranim silama pri konstruiranju verižnoga poligona. Za crtež poligona vektorâ kutova (slika 57.e.) odabrat ćemo mjerilo kutova

$$1 [\text{cm}] :: \frac{1}{2\ell}.$$

U tom će mjerilu duljine nacrtanih vektorâ kutova biti  $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 3 \text{ cm}$ . Uz to, odabrat treba i udaljenost  $\chi$  pola od pravca na kojemu leže vektori kutova ( $\chi$  je također, kinematički, kut) i položaj pola na paraleli s tim pravcem.

O udaljenosti  $\chi$  ovisi mjerilo u kojemu očitavamo duljine pomakâ / vrijednosti utjecajne funkcije. Ako je  $\chi = 1$ , kutovi koje zatvaraju zrake poligona vektorâ kutova, a time i kutovi koje zatvaraju stranice nacrtanoga tangentsnoga poligona, jednaki su kutovima između tangenata na progibnu liniju, tako da su i duljine odsječaka na ordinalama između zaključne linije i verižne krivulje jednake duljinama progibâ u mjerilu rasponâ. Uzmemo li pak da je  $\chi = 1/n$ , kutovi između zrakâ povećat će se  $n$  puta, pa će i duljine odsječaka na ordinalama biti  $n$  puta veće. Ako je  $\tilde{\eta}(x)$  izmjerena duljina odsječka, stvarna će duljina pomaka / vrijednost utjecaja biti

$$\eta(x) = \frac{m}{n} \cdot \tilde{\eta}(x) = \frac{\ell}{kn} \cdot \tilde{\eta}(x).$$

Uzet ćemo da je  $\chi = 1/\ell$ , pa je na crtežu  $\tilde{\chi} = 2 \text{ cm}$ . Pol ćemo postaviti tako da početna, nulta zraka bude paralelna s osi grede, što znači da će i stranica 0 tangentsnoga poligona biti paralelna s osi grede i, stoga, horizontalna. Budući da su u lijevome ležaju sprijećeni i pomak i zaokret osi, zaključna linija tangentsnoga poligona progibne linije (linija od koje mjerimo pomake) mora se poklopiti s nultom stranicom — našim smo izborom položaja pola, prema tome, odmah dobili horizontalnu zaključnu liniju (slika 57.f.).

Tangentsni poligon progibne/utjecajne linije crtamo na isti način kao i verižni poligon.

Duljine vektorâ  $\vec{\varphi}_1$  i  $\vec{\varphi}_2$  jednake su, pa se zraka 2 poligona vektorâ kutova poklapa sa zrakom 0, a to pak znači da su stranice 0 i 2 tangentsnoga poligona usporedne. Drugim riječima, i stranica 2 je horizontalna — možemo zaključiti da tangentsni poligon zadovoljava jedan od rubnih uvjeta u desnome ležaju: os grede se nije zaokrenula.

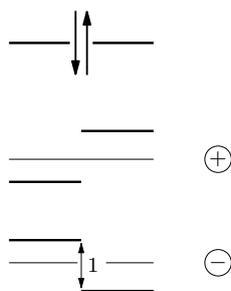
Preostaje još da „provjerimo” drugi rubni uvjet u desnome ležaju. Izmjerena je duljina odsječka na odgovarajućoj ordinali  $\tilde{\eta}_{B^v}(\ell) = 5$  cm. Iz  $\chi = 1/\ell$  slijedi  $n = \ell$ , pa je, na kraju,

$$\eta_{B^v}(\ell) = \frac{\ell}{5\ell} \cdot 5 = 1.$$

### 3.2.3. Primjeri

**Obostrano upeta greda, poprečna sila u presjeku.** Nacrtat ćemo utjecajnu liniju  $\eta_{T_{t-t}}$  za poprečnu silu u presjeku  $t-t$  s apscisom  $x_t$ .

Točke osi grede neposredno lijevo i neposredno desno od presjeka treba pomaknuti po pravcima okomitima na os suprotno od smisla djelovanja poprečnih sila tako da njihov razmak na kraju bude 1 (slika 58.). Riječ je, dakle, o relativnomu pomaku.



Slika 58.

Za osnovni sistem (za metodu sila) uzet ćemo konzulu desni kraj koje je upet (slika 59.b.). Utjecaj je zadanoga pomaka prikazan na slici c., tako da je  $\delta_{2,0} = 1$ .

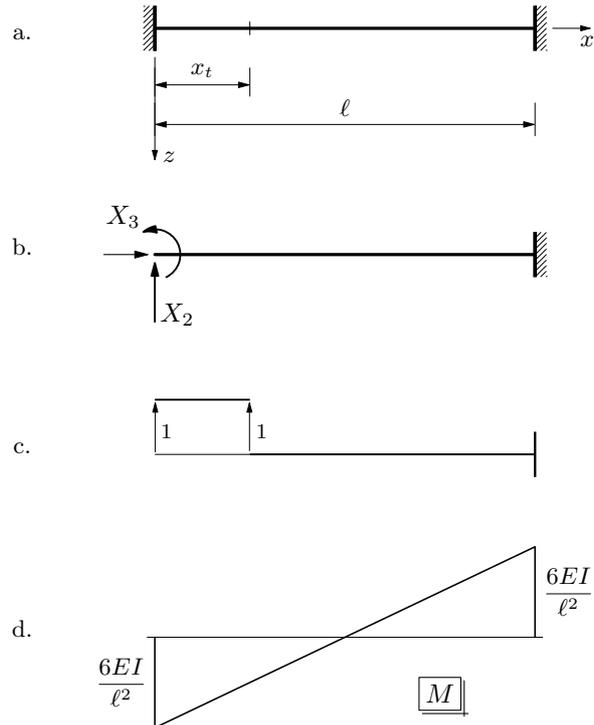
Očito je da je  $X_1 = 0$ . Za druge je dvije nepoznanice sustav jednadžbi kompatibilnosti

$$\mathbf{D}_\perp \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3EI} & -\frac{\ell^2}{2EI} \\ -\frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Njegovo je rješenje

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\perp^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix}.$$

[Izvedite izraze za komponente matrice popustljivosti  $\mathbf{D}$ ! Primjenom programa *SageMath* (ili drugoga nekog programa za simboličku matematiku) nađite  $\mathbf{D}^{-1}$ !]



Slika 59.

Slijedi

$$M_A = X_3 = -\frac{6EI}{\ell^2} \quad \text{i} \quad A^v = X_2 = -\frac{12EI}{\ell^3}$$

te, potom, iz  $\sum M_{(B)} = M_A - \ell \cdot A^v + M_B = 0$ ,

$$M_B = -M_A + \ell \cdot A^v \cdot \ell = -\frac{6EI}{\ell^2};$$

momentni je dijagram prikazan na slici 58.d.

Pri crtanju utjecajne linije uzet ćemo, kao i ranije, za mjerilo duljina  $1 \text{ [cm]} :: \ell/5 \text{ [m]}$ . Neka je  $x_t = \ell/4$  (slika 60.a.).

Dijagram zakrivljenosti  $\kappa$  podijelit ćemo na četiri dijela, u točkama s apscisama  $\ell/4$ ,  $\ell/2$  i  $3\ell/4$  (slika 60.b.). Kutovi, jednaki orijentiranim ploštinama dijelova između dijagrama i osi apscisa, između ordinala u susjednim točkama, su

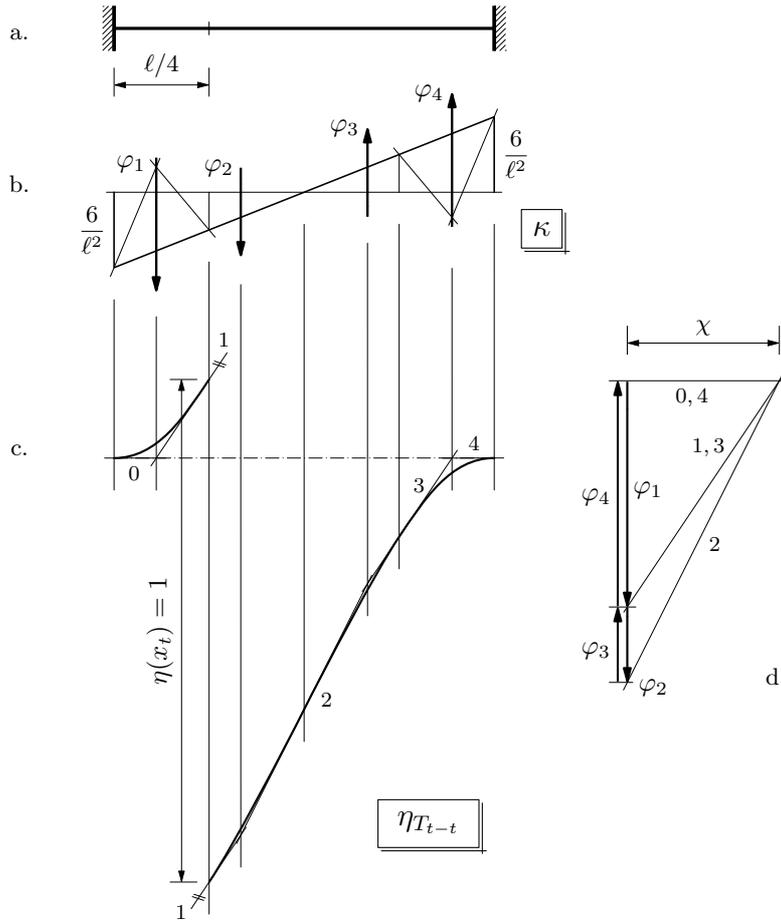
$$\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \frac{3}{\ell^2} = \frac{3}{8\ell},$$

$$\varphi_1 = \varphi_4 = 3\varphi_2 = \frac{9}{8\ell}.$$

Vektori kutova orijentirani su kao na slici b., a njihovi pravci prolaze težištima dijelova kojima su „statički ekvivalentni”.

Odaberemo li za mjerilo kutova

$$1 \text{ [cm]} :: \frac{3}{8\ell},$$



Slika 60.

duljine nacrtanih vektorâ kutova u poligonu vektorâ kutova (slika 60.d.) bit će

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_4 = 3 \text{ cm},$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_3 = 1 \text{ cm}.$$

Uzet ćemo da je na crtežu  $\tilde{\chi} = 2 \text{ cm}$ , što znači da je  $\chi = \frac{3}{4\ell}$ , pa je  $n = 1/\chi = 4\ell/3$ .

Pol ćemo ponovno postaviti tako da nulta zraka poligona vektorâ kutova bude horizontalna; i zaključna će linija tangentnoga poligona (slika 60.c.) tada biti horizontalna.

U točki s apscisom  $x_t$  utjecajna linija ima jedinični skok: stranicu 1 tangentnoga poligona treba na tom mjestu prekinuti i paralelno pomaknuti prema dolje za

$$\tilde{\eta}(x_t) = \frac{n}{m} \cdot 1 = \frac{k n}{\ell} \cdot 1 = \frac{5 \cdot (4\ell/3)}{\ell} \cdot 1 = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ cm}.$$

Na kraju, stranica 4 tangentnoga poligona mora se, kao i stranica 0, poklopiti s njegovom zaključnom linijom.

Veza je između izmjerenih duljina odsječaka na ordinalama i duljina pomakâ / vrijednosti utjecaja

$$\eta(x) = \frac{m}{n} \tilde{\eta}(x) = \frac{\ell}{k n} \tilde{\eta}(x) = \frac{\ell}{5 \cdot (4\ell/3)} \tilde{\eta}(x) = \frac{3}{20} \tilde{\eta}(x).$$

**Obostrano upeta greda, ležajni moment.** Inicijalni je pomak za crtanje utjecajne linije  $\eta_{M_A}$  za reaktivni moment u lijevomu ležaju jedinični zaokret toga ležaja u smislu vrtnje kazaljke na satu, pa je za osnovni sistem sa slike 61.b.  $\bar{\delta}_3 = -1$ . Sustav je jednadžbi kompatibilnosti za nepoznate vrijednosti sila  $X_2$  i  $X_3$  stoga

$$\mathbf{D}_\perp \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

a njegovo je rješenje

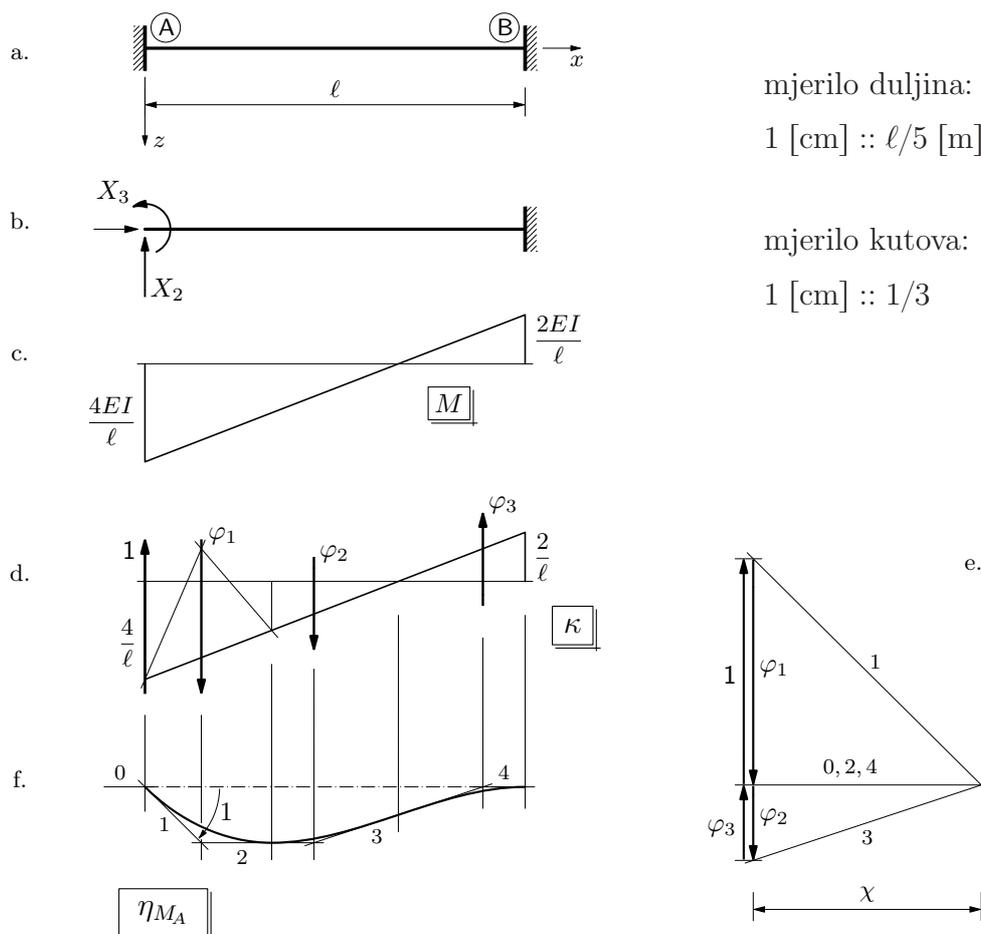
$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\perp^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix},$$

pa su

$$A^v = X_2 = -\frac{6EI}{\ell^2} \quad \text{i} \quad M_A = X_3 = -\frac{4EI}{\ell}$$

te, potom,

$$M_B = -M_A + A^v \cdot \ell = -\frac{2EI}{\ell}.$$



Slika 61.

Dijeljenjem momentnoga dijagrama (slika 61.c.) s  $EI$  dobivamo dijagram  $\kappa$ . Dijelove površine između dijagrama  $\kappa$  i njegove apscisne osi zamjenjujemo vektorima kutova na pravcima kroz težišta tih dijelova (slika d.). Kutovi su jednaki ploštinama dijelova:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{2}{\ell} = \frac{1}{3},$$

$$\varphi_1 = 3\varphi_2 = 1.$$

Jedinični zaokret u lijevomu ležaju ostvarit ćemo dodavanjem vektora jediničnoga kuta na pravcu kroz taj ležaj.

U odabranomu su mjerilu kutova

$$\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_3 = 1 \text{ cm},$$

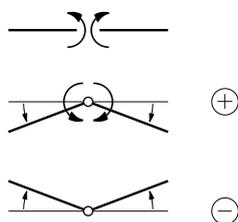
$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\mathbf{i}} = 3 \text{ cm}.$$

Uzet ćemo da je  $\chi = 1$ , odnosno  $\tilde{\chi} = 3 \text{ cm}$  (slika 61.e.); tada je

$$\eta(x) = \frac{m}{n} \tilde{\eta}(x) = \frac{\ell}{k} \tilde{\eta}(x) = \frac{\ell}{5} \tilde{\eta}(x).$$

Utjecajna je linija prikazana na slici 61.f.

**Obostrano upeta greda, moment savijanja u presjeku.** Za crtanje utjecajne linije  $\eta_{M_{t-t}}$  za moment savijanja u nekom presjeku  $x_t$  inicijalni je pomak jedinični zaokret osi grede neposredno lijevo od presjeka u odnosu na os neposredno desno od njega u smislu suprotnom od smisla vrtnje pozitivnoga momenta (slika 62.).



Slika 62.

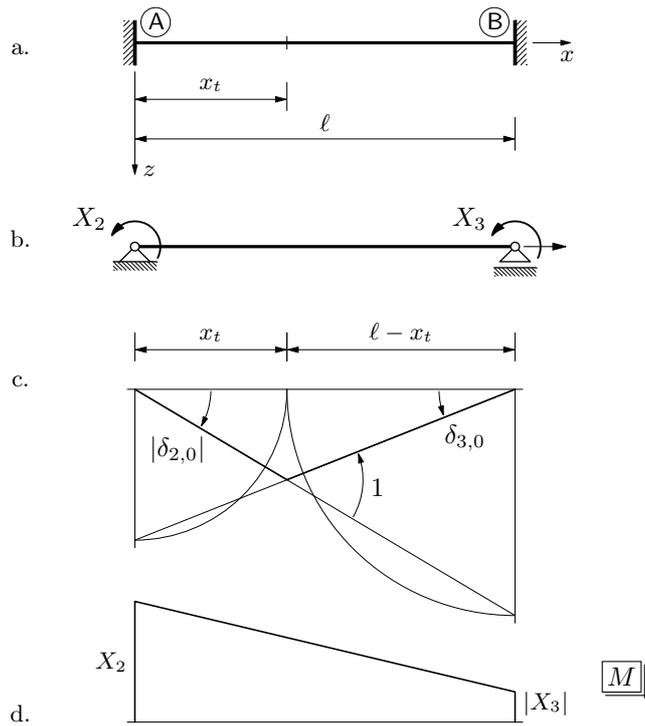
Za osnovni ćemo sistem uzeti jednostavno oslonjenu gredu (slika 63.b.); izraze za komponente matrica  $\mathbf{D}_{\perp}$  i  $\mathbf{D}_{\perp}^{-1}$  izveli smo u odjeljku 11.7. bilježaka [27], stranice 257–260. Dijagram projekcija pomaka na vertikalnu os zbog jediničnoga zaokreta na osnovnom sistemu prikazan je na slici 63.c. Prema slici su

$$\delta_{2,0} = -\frac{\ell - x_t}{\ell} \quad \text{i} \quad \delta_{3,0} = \frac{x_t}{\ell}.$$

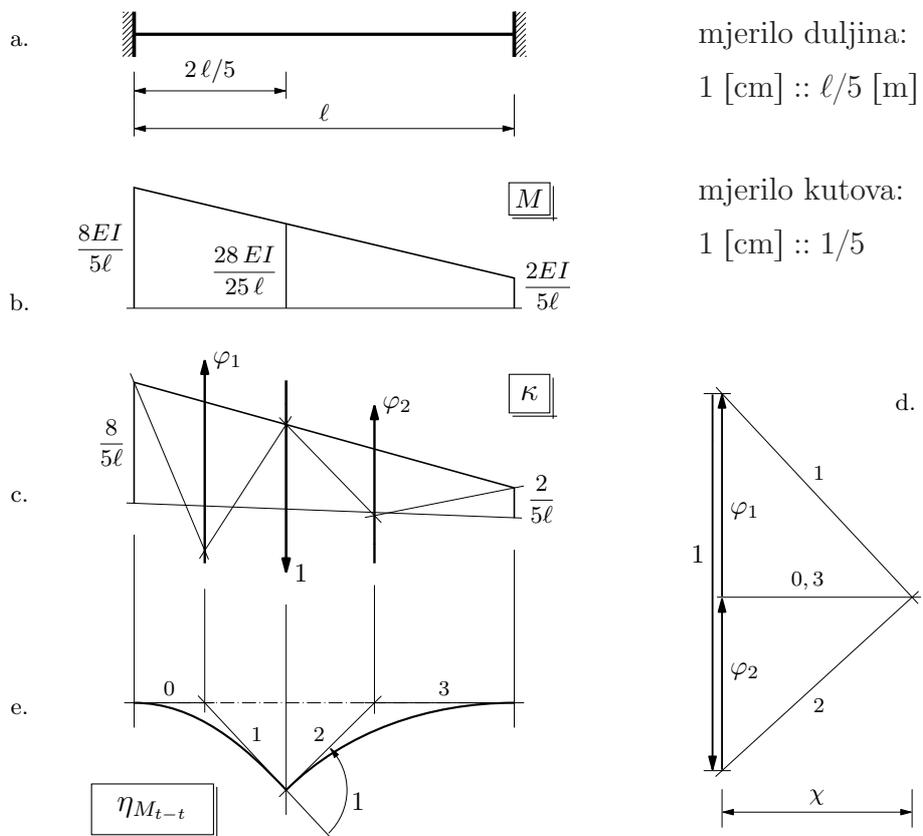
Vrijednosti  $X_2$  i  $X_3$  statički neodređenih momenata su

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{\perp}^{-1} \begin{bmatrix} -\delta_{1,0} \\ -\delta_{2,0} \end{bmatrix} = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} -4\delta_{1,0} - 2\delta_{2,0} \\ -2\delta_{1,0} - 4\delta_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EI(2\ell - 3x_t)}{\ell^2} \\ \frac{2EI(\ell - 3x_t)}{\ell^2} \end{bmatrix};$$

kvalitativna je skica momentnoga dijagrama prikazana na slici 63.d.



Slika 63.



Slika 64.

Za  $x_t = 2\ell/5$  su  $\delta_{1,0} = -3/5$  i  $\delta_{2,0} = 2/5$  te

$$X_2 = \frac{8EI}{5\ell} \quad \text{i} \quad X_2 = -\frac{2EI}{5\ell}.$$

Momentni je dijagram prikazan na slici 64.b., dok je dijagram zakrivljenosti s vektorima kutova  $\vec{\varphi}_1$  i  $\vec{\varphi}_2$  koji zamjenjuju dijelove površine ispod dijagrama lijevo i desno od točke  $x_t$  prikazan na slici c. Kutovi su

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5\ell} \cdot \frac{2\ell}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{25\ell} \cdot \frac{2\ell}{5} = 0,54,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{25\ell} \cdot \frac{3\ell}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5\ell} \cdot \frac{3\ell}{5} = 0,46.$$

Ucrtan je i vektor jediničnoga kuta pomoću kojega ćemo na crtežu ostvariti traženi zaokret u točki  $x_t$ .

Neka je  $\chi = 1/2$ . U odabranomu su mjerilu kutova duljine vektora kutova u poligonu kutova (slika 64.d.)

$$\tilde{\varphi}_1 = 0,54 \cdot 5 = 2,7 \text{ cm},$$

$$\tilde{\varphi}_2 = 0,46 \cdot 5 = 2,3 \text{ cm},$$

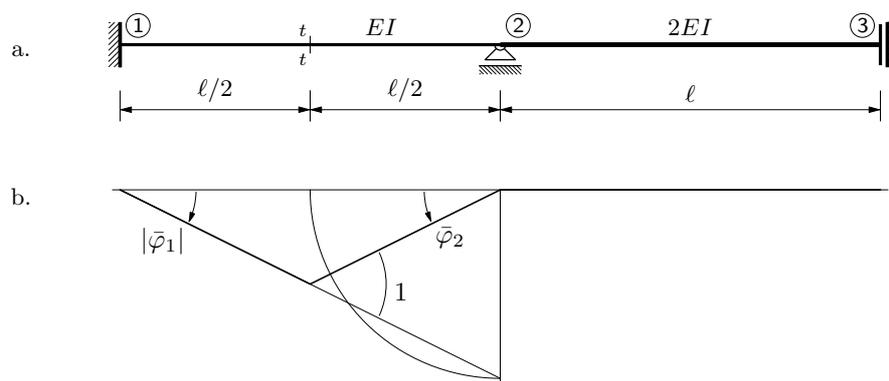
$$\tilde{1} = 1 \cdot 5 = 5 \text{ cm},$$

$$\tilde{\chi} = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ cm}.$$

Utjecajna je linija prikazana na slici 64.e. Kako je  $n = 1/\chi = 2$ , bit će

$$\eta(x) = \frac{m}{n} \tilde{\eta}(x) = \frac{\ell}{5 \cdot 2} \tilde{\eta} = \frac{\ell}{10} \tilde{\eta}(x).$$

**Složeniji nosač, moment savijanja u presjeku.** Nacrtat ćemo utjecajnu liniju  $\eta_{M_{t-t}}$  za moment savijanja u polovini lijevoga raspona nosača prikazana na slici 65.a.



Slika 65.

Vrijednosti momenata za crtanje momentnoga dijagrama izračunat ćemo inženjerskom metodom pomakâ. Na slici 65.b. prikazan je plan pomakâ s pomoću kojega ćemo odrediti

vrijednosti momenata upetosti. Mehanizam za koji crtamo plan pomaka nastaje tako da se u zglobnoj shemi zadanoga sistema spriječe svi neovisni translacijski pomaci, ako postoje, i omogući inicijalni pomak za utjecajnu liniju; u našem je slučaju to relativni jedinični zaokret osi u točki  $x_t$ . Kutovi zaokreta dijelova osi lijevo i desno od točke  $x_t$  su

$$\bar{\varphi}_1 = -\frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2},$$

pa su momenti upetosti

$$\bar{M}_{1,2} = -4k_{\{1,2\}}\bar{\varphi}_1 - 2k_{\{1,2\}}\bar{\varphi}_2 = -4k\left(-\frac{1}{2}\right) - 2k\left(\frac{1}{2}\right) = k,$$

$$\bar{M}_{2,1} = -2k_{\{1,2\}}\bar{\varphi}_1 - 4k_{\{1,2\}}\bar{\varphi}_2 = -2k\left(-\frac{1}{2}\right) - 4k\left(\frac{1}{2}\right) = -k,$$

gdje su

$$k = k_{\{1,2\}} = \frac{EI}{\ell} \quad \text{i} \quad k_{\{2,3\}} = \frac{2EI}{\ell} = 2k.$$

Na slici 66.a. prikazan je osnovni sistem za proračun inženjerskom pomakâ; nepoznane su kut zaokreta čvora 2,  $\varphi_2$ , i duljina  $w_3$  neovisnoga translacijskog pomaka. Prema planu pomaka zglobne sheme (slika b.) kut je zaokreta štapa  $\{2, 3\}$  kao krutoga tijela

$$\psi_{\{2,3\}} = -\frac{w_3}{\ell}.$$

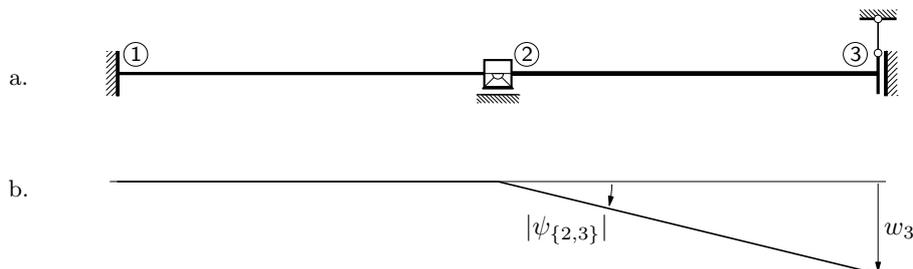
pa su izrazi za vrijednosti momenata na krajevima štapova

$$M_{1,2} = 2k_{\{1,2\}}\varphi_2 + \bar{M}_{1,2} = 2k\varphi_2 + k,$$

$$M_{2,1} = 4k_{\{1,2\}}\varphi_2 + \bar{M}_{2,1} = 4k\varphi_2 - k,$$

$$M_{2,3} = 4k_{\{2,3\}}\varphi_2 - 6k_{\{2,3\}}\psi_{\{2,3\}} = 4(2k)\varphi_2 - 6(2k)\left(-\frac{w_3}{\ell}\right) = 8k\varphi_2 + \frac{12k}{\ell}w_3,$$

$$M_{3,2} = 2k_{\{2,3\}}\varphi_2 - 6k_{\{2,3\}}\psi_{\{2,3\}} = 2(2k)\varphi_2 - 6(2k)\left(-\frac{w_3}{\ell}\right) = 4k\varphi_2 + \frac{12k}{\ell}w_3.$$



Slika 66.

Jednadžba je ravnoteže momenata u čvoru 2,

$$-M_{2,1} - M_{2,3} = 0, \quad \text{to jest,} \quad M_{2,1} + M_{2,3} = 0.$$

Uvrstimo li izraze za  $M_{2,1}$  i  $M_{2,3}$ ,

$$\left[ 4k\varphi_2 - k \right] + \left[ 8k\varphi_2 + \frac{12k}{\ell}w_3 \right] = 0,$$

nakon sređivanja dobivamo

$$12k\varphi_2 + \frac{12k}{\ell}w_3 = k.$$

Jednadžba je virtualnih radova

$$(M_{2,3} + M_{3,2})\delta\psi_{\{2,3\}} = 0.$$

Budući da za sistem u ravnoteži ta jednadžba mora biti zadovoljena za svaki  $\delta\psi_{\{2,3\}}$ , slijedi

$$M_{2,3} + M_{3,2} = 0$$

i, nakon uvrštavanja i sređivanja,

$$\frac{12k}{\ell}\varphi_2 + \frac{24k}{\ell^2}w_3 = 0.$$

Rješenje je dobivenoga sustava jednadžbi

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \quad \text{i} \quad w_3 = -\frac{\ell}{12},$$

pa su vrijednosti momenata na krajevima štapova

$$M_{1,2} = 2k\varphi_2 + k = 2k \cdot \frac{1}{6} + k = \frac{4}{3}k,$$

$$M_{2,1} = 4k\varphi_2 - k = 4k \cdot \frac{1}{6} - k = -\frac{1}{3}k,$$

$$M_{2,3} = 8k\varphi_2 + \frac{12k}{\ell}w_3 = 8k \cdot \frac{1}{6} + \frac{12k}{\ell} \cdot \left(-\frac{\ell}{12}\right) = \frac{1}{3}k,$$

$$M_{3,2} = 4k\varphi_2 + \frac{12k}{\ell}w_3 = 4k \cdot \frac{1}{6} + \frac{12k}{\ell} \cdot \left(-\frac{\ell}{12}\right) = -\frac{1}{3}k.$$

Kondenziramo li statički pomak  $\bar{w}_3$  na štapu  $\{2,3\}$ , kao jedina nepoznanica ostaje  $\varphi_3$ . Izrazi za momente na krajevima štapa  $\{1,2\}$  ne mijenjaju se, a „kondenzirani” su izrazi za momente na krajevima štapa  $\{2,3\}$

$$M_{2,3}^c = k_{\{2,3\}}\varphi_2 = 2k\varphi_2,$$

$$M_{3,2}^c = -k_{\{2,3\}}\varphi_2 = -2k\varphi_2.$$

Za izračunavanje kuta  $\varphi_2$  dovoljna je sada jedna jednadžba, jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 2,

$$-M_{2,1} - M_{2,3}^c = 0.$$

Uvrštavanje izrazâ za vrijednosti momenata i sređivanje daju jednadžbu

$$6 k \varphi_2 = k$$

kojoj je rješenje

$$\varphi_2 = \frac{1}{6}$$

pa su vrijednosti momenata

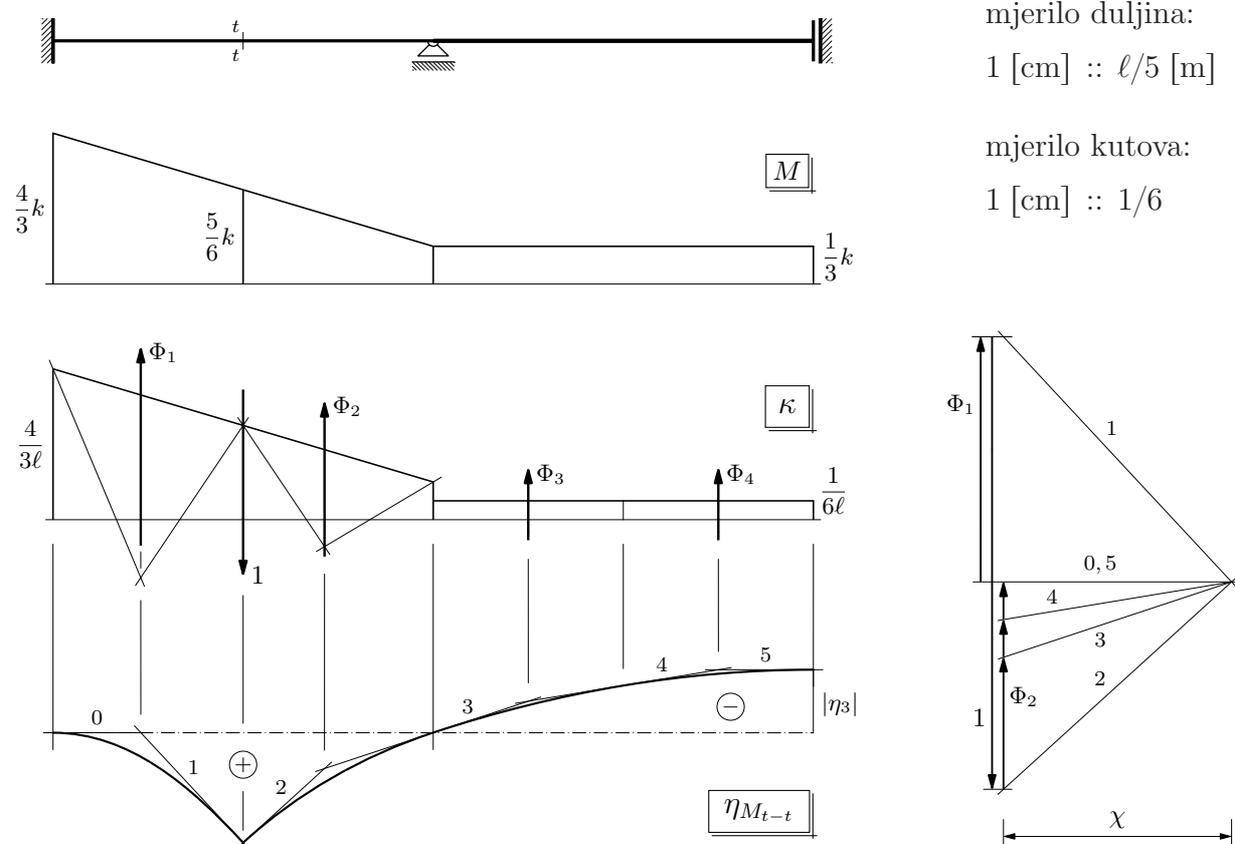
$$M_{1,2} = 2 k \varphi_2 + k = 2 k \cdot \frac{1}{6} + k = \frac{4}{3} k,$$

$$M_{2,1} = 4 k \varphi_2 - k = 4 k \cdot \frac{1}{6} - k = -\frac{1}{3} k,$$

$$M_{2,3}^c = 2 k \varphi_2 = 2 k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} k = M_{2,3},$$

$$M_{3,2}^c = -2 k \varphi_2 = -2 k \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} k = M_{3,2}.$$

Postupak je crtanja utjecajne linije poznat. Na slici 67. redom su ispod skice nosača prikazani dijagram momenata, dijagram zakrivljenosti s vektorima kutova između tangenata i vektorom jediničnoga kuta u točki  $x_t$  te, na dnu, tangentni poligon s upisanom utjecajnom linijom, a zděsna je poligon vektorâ kutova.



Slika 67.

Zakrivljenosti su

$$\begin{aligned}\kappa_{1,2} &= \frac{M_{1,2}}{EI} = \frac{\frac{4EI}{3\ell}}{EI} = \frac{4}{3\ell}, \\ \kappa_{2,1} &= \frac{M_{2,1}}{EI} = \frac{-\frac{EI}{3\ell}}{EI} = -\frac{1}{3\ell}, \\ \kappa_{2,3} &= \frac{M_{2,3}}{2EI} = \frac{\frac{EI}{3\ell}}{2EI} = \frac{1}{6\ell}, \\ \kappa_{3,2} &= \frac{M_{3,2}}{2EI} = \frac{-\frac{EI}{3\ell}}{2EI} = -\frac{1}{6\ell}.\end{aligned}$$

Kutovi su između tangenata

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3\ell} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{24} = \frac{13}{24}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6\ell} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{5}{24} + \frac{1}{12} = \frac{7}{24}, \\ \Phi_3 &= \Phi_4 = \frac{1}{6\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24},\end{aligned}$$

a duljine su pripadnih vektora u poligonu vektorâ kutova

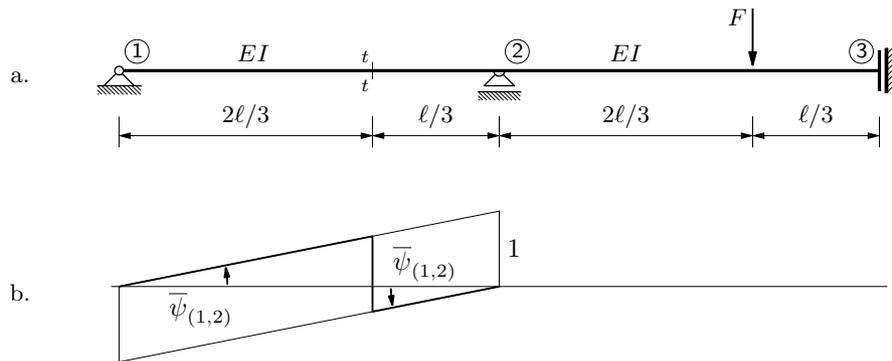
$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1 &= \frac{13}{24} \cdot 6 = 3,25 \text{ cm}, \\ \tilde{\Phi}_2 &= \frac{7}{24} \cdot 6 = 1,75 \text{ cm}, \\ \tilde{\Phi}_3 &= \tilde{\Phi}_4 = \frac{2}{24} \cdot 6 = 0,5 \text{ cm}, \\ \tilde{1} &= 1 \cdot 6 = 6,0 \text{ cm}, \\ \tilde{\chi} &= \frac{1}{2} \cdot 6 = 3,0 \text{ cm} \quad \text{za odabrani } \chi = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Kako je  $n = 1/\chi = 2$ , bit će  $m/n = (\ell/5)/2 = \ell/10$ , pa je mjerilo utjecajnih koeficijenata  $1 \text{ [cm]} :: \ell/10$ . Na desnomu je kraju, primjerice,

$$|\eta_3| = \frac{m}{n} \tilde{\eta}_3 = \frac{\ell}{10} \cdot 8 \frac{1}{3} \text{ [mm]} = \frac{\ell}{10} \cdot 0,833, = \frac{\ell}{12} = |w_3|.$$

**Složeniji nosač, poprečna sila u presjeku.** Nacrtat ćemo još utjecajnu liniju  $\eta_{T_t-t}$  za poprečnu silu u odabranu presjeku  $t-t$  nosača sa slike 68.a. i s pomoću nje izračunati vrijednost te sile za opterećenje zadanom silom  $\vec{F}$  vrijednosti  $F = 125 \text{ kN}$ .

Potrebne vrijednosti momenata izračunat ćemo Crossovim postupkom.



Slika 68.

Vrijednost momenta upetosti na kraju 2 štapa {1, 2} određujemo s pomoću plana pomakâ prikazana na slici 68.b.:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{2,1}^c &= \bar{M}_{2,1} - \frac{1}{2} \bar{M}_{1,2} = -6 k_{\{1,2\}} \bar{\psi}_{\{1,2\}} - \frac{1}{2} \left( -6 k_{\{1,2\}} \bar{\psi}_{\{1,2\}} \right) \\ &= -6 k \cdot \frac{1}{\ell} + \frac{1}{2} \left( 6 k \cdot \frac{1}{\ell} \right) = -3 \cdot \frac{k}{\ell}, \end{aligned}$$

pri čemu je  $k = k_{\{1,2\}} = k_{\{2,3\}} = EI/\ell$ .

Uz statičku kondenzaciju zaokreta  $\bar{\varphi}_1$  na štapu {1, 2} i pomaka  $\bar{w}_3$  na štapu {2, 3} koeficijent je krutosti čvora 2

$$k_2 = 3 k_{\{1,2\}} + k_{\{2,3\}} = 3 k + k = 4 k,$$

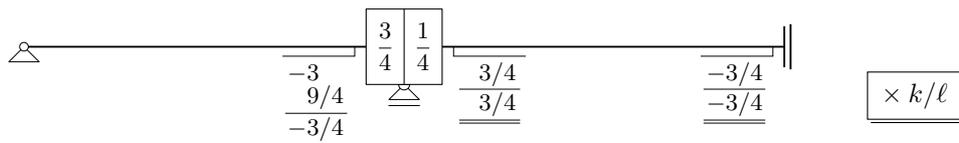
pa su razdjelni koeficijenti u tom čvoru

$$\begin{aligned} \mu_{2,1} &= \frac{3 k_{\{1,2\}}}{k_2} = \frac{3 k}{4 k} = \frac{3}{4}, \\ \mu_{2,3} &= \frac{k_{\{2,3\}}}{k_2} = \frac{k}{4 k} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Prijenosni su pak koeficijenti

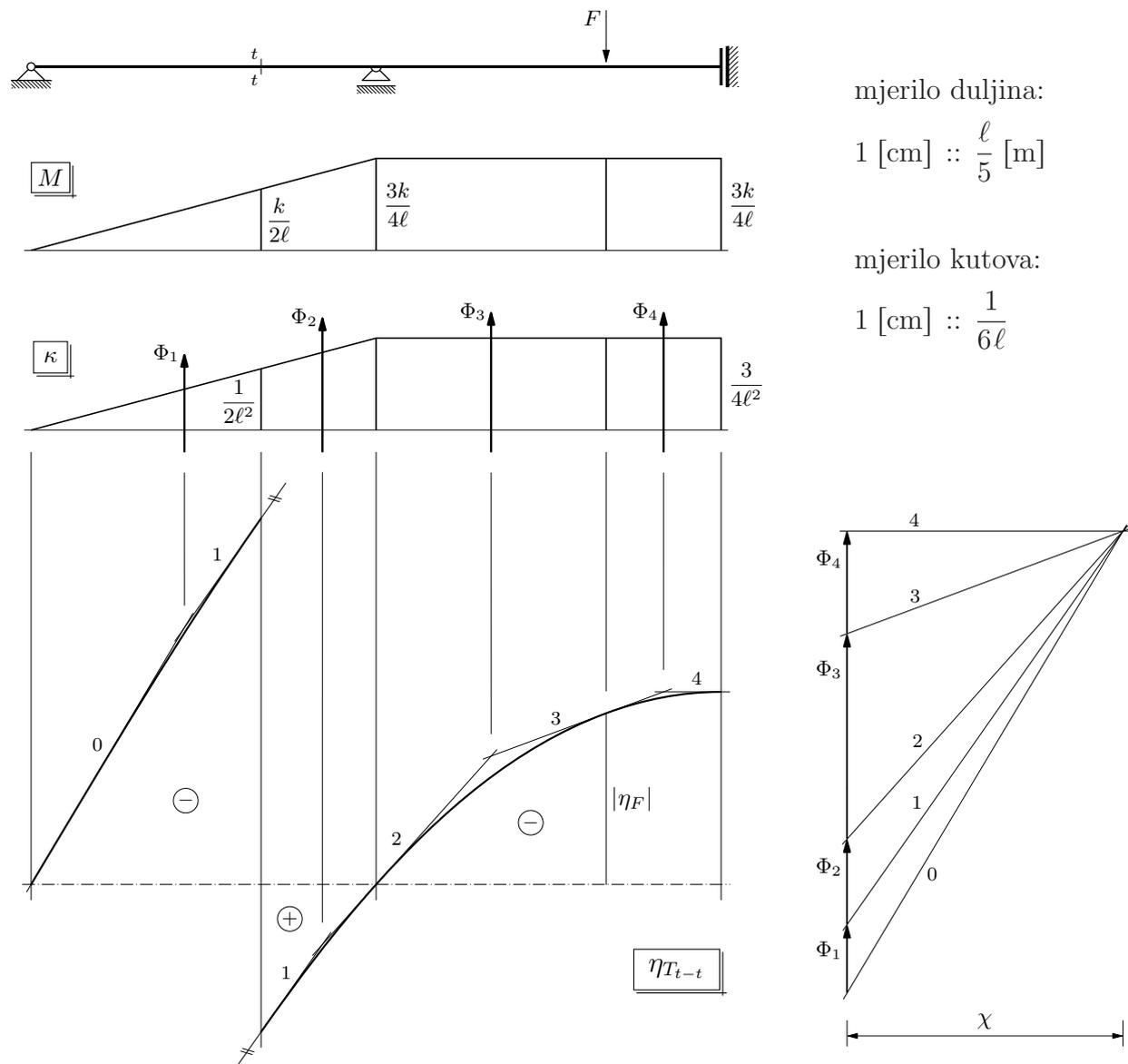
$$\begin{aligned} 2 \rightarrow 1 &: 0 \\ 2 \rightarrow 3 &: -1 \end{aligned}$$

Crossov postupak u ovom primjeru nije iteracijski: svodi se na jednu razdiobu vrijednosti momenata u čvoru 2 i jedno prenošenje vrijednosti iz čvora 2 u čvor 3 (slika 69.).



Slika 69.

Momentni dijagram, dijagram zakrivljenosti s vektorima kutova, tangenti poligon s upisanom utjecajnom linijom i poligon vektorâ kutova prikazani su na slici 70.



Slika 70.

Kutovi su između tangenata

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\ell^2} \cdot \frac{2\ell}{3} = \frac{1}{6\ell},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\ell^2} \cdot \frac{\ell}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4\ell^2} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{1}{12\ell} + \frac{1}{8\ell} = \frac{5}{24\ell},$$

$$\Phi_3 = \frac{3}{4\ell^2} \cdot \frac{2\ell}{3} = \frac{1}{2\ell},$$

$$\Phi_4 = \frac{3}{4\ell^2} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{1}{4\ell};$$

odabrano je  $\chi = \frac{2}{3\ell}$ . U poligonu vektorâ kutova duljine su

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{1}{6\ell} \cdot 6\ell = 1,0 \text{ cm},$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{5}{24\ell} \cdot 6\ell = 1,25 \text{ cm},$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \frac{1}{2\ell} \cdot 6\ell = 3,0 \text{ cm},$$

$$\tilde{\Phi}_4 = \frac{1}{4\ell} \cdot 6\ell = 1,5 \text{ cm},$$

$$\tilde{\chi} = \frac{2}{3\ell} \cdot 6\ell = 4,0 \text{ cm}.$$

Mjerilo je utjecajnih koeficijenata  $1 \text{ [cm]} :: 2/15$ , jer su  $m = \ell/5$ ,  $n = 1/\chi = 3\ell/2$  i  $m/n = 2/15$ .

Na crtežu utjecajne linije duljina je jediničnoga skoka u presjeku  $t-t$

$$\tilde{1} = \frac{n}{m} \cdot 1 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}.$$

Budući da smo pri zamjeni „distribuirane” zakrivljenosti „koncentriranim” kutovima dijagram zakrivljenosti podijelili na ordinali koja prolazi hvatištem sile  $\vec{F}$ , diralište tangente 3, između kutova  $\Phi_3$  i  $\Phi_4$ , leži na toj ordinali. Izmjerena je duljina utjecajnoga koeficijenta  $|\tilde{\eta}_F| = 2,5 \text{ cm}$ , pa je

$$|\eta_F| = \frac{2}{15} |\tilde{\eta}_F| = \frac{2}{15} \cdot 2,5 = 0,333.$$

Slijedi

$$T_t = F \cdot \eta_F = 125,0 \cdot (-0,333) = -41,625 \text{ kN}.$$

## 4. Zidovi s otvorima

K. F., SANJA HAK & MARTA ŠAVOR NOVAK

AMY: I will let the walls crumble. Why should I worry  
To keep the tiles on the roof, combat the endless weather,  
Resist the wind? ...  
It is no concern of the body in the tomb  
To bother about the upkeep. Let the wind and the rain do that.

T. S. Eliot: *The Family Reunion*

Zidovi s otvorima konstrukcijski su sistemi sastavljeni od punih zidova u istoj ravnini, međusobno spojenih gredama krutosti kojih su razmjerno male u odnosu na krutosti zidova, ali ne tako male da je njihovo sudjelovanje u povećanju nosivosti sistema zanemarivo. Puni zidovi, razdvojeni susjednim nizovima otvora, nazivaju se i posmičnim zidovima. Budući da su posmični zidovi gredama povezani u sustav u kojem djeluju tako da je nosivost sklopa veća od zbroja nosivosti pojedinih zidova, zidovi s otvorima nazivaju se i povezanim zidovima, dok se nazivom spojne grede naglašava uloga koju one imaju.

Zidove s otvorima ćemo analizirati kao nosive elemente armiranobetonskih objekata visokogradnje, namijenjene preuzimanju ekvivalentnih statičkih horizontalnih djelovanja (vjetra i potresa, primjerice) u svojoj ravnini. Horizontalna se opterećenja u zidove s otvorima najčešće unose kao koncentrirane sile u razinama stropnih ploča.

Razvoj numeričkih postupaka — ponajprije metode konačnih elemenata — i njihovih programskih realizacija, kao i brzih računala s velikim memorijskim prostorom, omogućili su proračun armiranobetonskih objekata visokogradnje kao cjelovitih prostornih sklopova. Zidove najčešće modeliramo primjenom konačnih elemenata ljuske, a svi čvorovi modela imaju šest stupnjeva slobode — tri translacijska i tri rotacijska.

Iz cjeline zidove izdvajamo samo radi provjere ili analize dobivenih rezultata te radi dimenzioniranja ili, ako je postupak dimenzioniranja automatiziran, radi provjere armature. No, ako je dispozicija zgrade klasična, sa zidovima tlocrtno svrstanima u dva simetrična, međusobno okomita niza, povezana stropnim pločama krutima u njihovim ravninama, i s jasnim hijerarhijskim slijedom prijenosa opterećenja između nosivih elemenata, pojedini se zidovi mogu bez veće pogreške s pripadnim opterećenjima i rubnim uvjetima izdvojiti i analizirati primjenom modela utemeljena na ravninskome stanju naprezanja. Štoviše, usporedbe rezultata proračuna pokazuju da ravninski štapni modeli izdvojenih zidova s otvorima daju rezultate visoke točnosti, usporedive s modelima s ravninskim konačnim elementima, iako, primjerice, štapni model deveteroetažnoga zida s jednim nizom otvora

ima u metodi sila 27 nepoznanica (po tri nepoznate vrijednosti unutarnjih sila u svakoj gredi), a u općoj metodi pomaka 54 nepoznanice (18 slobodnih čvorova s po tri stupnja slobode), dok je broj nepoznanica u modelu s konačnim elementima obično veći od 10000.

Postupcima predloženima u vrijeme ručnih proračuna potpomognutih „šiberom” cilj je bio ostvarivanje zadovoljavajuće točnosti uz smanjenje opsega proračuna, pa su se tražila rješenja u zatvorenu obliku kako trajanje proračuna ne bi ovisilo o broju nepoznanica. Široku je primjenu našao postupak u kojem se diskretne veze zidova spojnim gredama „razmazuju” u zamjenjujuću neprekinutu elastičnu vezu. Posmična sila u njoj nepoznanica je diferencijalne jednadžbe. Korijeni su postupka u radovima A. Ržanjićina o spojenim gredama, a razvio ga je i iscrpno razradio R. Rosman u nizu članaka u domaćim i inozemnim časopisima te u knjižici [57]. Taj je postupak opisan u knjigama poput [70] i [67], a ušao je i u predavanja predmeta *Visoke građevine* na smjeru Konstrukcije diplomskoga studija na Građevinskom fakultetu u Zagrebu [56].

Rješenje u zatvorenu obliku izveo je i Veselin Simović. No, on je zadržao diskretne veze zidova, tako da je jednadžba koju rješava diferencijska, a ne diferencijalna. Taj je postupak zbog svoje diskretne prirode intuitivno prihvatljiviji od postupka s neprekinutom vezom između stupova, a izrazi kojima su dana rješenja diferencijskih jednadžbi jednostavniji su (rješenja diferencijalnih jednadžbi sadrže hiperbolne funkcije ili trigonometrijske redove), tako da je i provedba postupka lakša i brža.

Vjerujemo da Simovićev postupak nije zastario niti da bi ga „moderniji” postupci trebali potisnuti u zaborav, kao, uostalom, ni mnoge druge „ručne” — približne ili grafičke — postupke.

Ručni postupci omogućavaju nalaženje približnih vrijednosti unutarnjih sila i pomaka za potvrdu valjanosti rješenja dobivenih proračunima uporabom računalnih programa. Računalni se programi danas rutinski primjenjuju u svakodnevnoj projektantskoj praksi, a njihova je uporaba neophodna za smanjivanje netočnosti uzrokovanih pojednostavnjenjima bez kojih je ručni proračun neprovediv, ali će oprezan inženjer provjeriti prihvatljivost opsežnih rezultata računalne analize usporedbom s približnim, ručno izračunanim vrijednostima. Jednostavnost opisa konstrukcije u grafičkom sučelju uz automatsko generiranje mreže konačnih elemenata, brzina kojom računala provode proračune i barokni prikaz rezultata ne smiju dati lažnu sigurnost da se računalni program može upotrebljavati bez poznavanja i bez razumijevanja teorijske podloge i algoritama kojima je ta podloga u programu realizirana te da su rezultati ispravni i da je konstrukcija „dobra” samim time što je proračun proveden računalnim programom. Jednako brzo kao ispravno rješenje računalo može zbog pogreške u ulaznim podacima ili zbog pogrešnoga algoritma ili zbog pogreške u programskom kôdu ili zbog gomilanja pogrešaka zaokruživanja ili zbog neke druge predvidive ili nepredvidive pogreške dati pogrešne rezultate . . . pogrešne, ali često ne tako pogrešne da bi to bilo jasno uočljivo. Inženjer mora znati kako ispravno rješenje „izgleda”, a to znači da mora znati oblikovati i (bez računala) proračunati pojednostavnjeni model konstrukcije. U ručnom proračunu inženjer ima neposrednu i potpunu kontrolu nad svakim korakom i nad svakim međurezultatom.

Osim neovisne potvrde valjanosti rješenja dobivenih proračunima uporabom računalnih programa, u knjizi [70] navedena su još dva razloga primjene približnih postupaka: razmjerno brza provjera i prilagodba probnih, na temelju inženjerskoga iskustva odabra-

nih dimenzija konstrukcijskih elemenata te razmjerno brz odabir manjeg broja s konstrukcijskoga ili s ekonomskog gledišta povoljni(ji)h konstrukcijskih sklopova koje će imati smisla točnije proračunati.

#### 4.1. Postupak Veselina Simovića

Za doprinos proračunu zidova s otvorima V. Simoviću je godine 1973. dodijeljena Republička nagrada Nikola Tesla za znanstveni rad. Postupak proračuna primjenom diferencijskih jednadžbi, koji je V. Simović predložio u svojoj disertaciji [63] u travnju 1969. godine te potom potpunije i podrobnije razradio u prvom, opsežnijem dijelu knjige [64], objavljene krajem 1971. godine, izveden je iz metode sila. Postupak je podoban i za provođenje na računalu, pa je, iako su to još bili rani dani primjene računala u građevinarstvu, Heinrich Werner izradio računalni program ZID-E, koji je upotrijebljen u proračunu više stotina visokih zgrada u Hrvatskoj, u drugim republikama tadašnje države i u inozemstvu [19]. Kasnije je, početkom osamdesetih godina, Zvonimir Žagar napisao program za džepno računalo (u to vrijeme popularan TI 59) za proračun zidova s jednim nizom otvora [66].

Proračunska je shema zida s otvorima štapni sistem, ali su, za razliku od „običnoga” okvira, samo dijelovi greda između otvora, duljina  $2b$ , elastični, dok se njihovi dijelovi „unutar” posmičnih zidova, duljina  $a_1$  i  $a_2$ , uzimaju krutima (slika 71.). Stupovi etaža, u koje su posmični zidovi podijeljeni po visini, po cijeloj su svojoj duljini elastični.

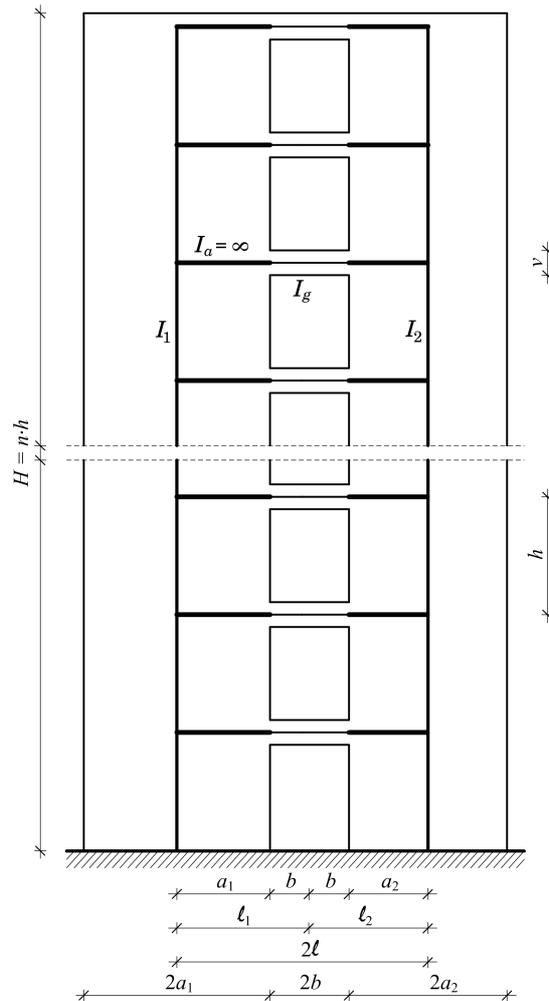
Pri savijanju posmičnih zidova i greda poprečni presjeci ostaju ravni, ali ne i okomiti na savijene osi. Pretpostavka o ravnim presjecima opravdana je i za zidove zato što su njihove visine višestruko veće od širina, a progibne su im linije bliske konzolnima, jer znatno mekše grede ne mogu značajnije ograničiti zaokretanja u spojevima sa zidovima.

Primjena metode sila u osnovnoj formulaciji dovodi do razmjerno velikih sustava linearnih jednadžbi: za zid sa  $e$  etaža i  $n$  nizova otvora broj je nepoznanica  $3en$ . U predračunalno vrijeme, pa i u vrijeme ograničene (i skupe) uporabe računala koja su zauzimala cijele sobe, rješavanje je većih sustava jednadžbi zahtijevalo mnogo vremena i usredotočenosti: broj računskih operacija potrebnih za rješavanje sustava koji sadrži  $m$  linearnih jednadžbi s  $m$  nepoznanica proporcionalan je s  $m^3$ . Kako su koeficijenti u jednadžbama metode sila koeficijenti popustljivosti, i samo oblikovanje sustava jednadžbi može biti dugotrajno, pa i podložno pogreškama, posebno ako se dijagrami unutarnjih sila u jediničnim stanjima „protežu” po većem dijelu sistema. Uz nekoliko pretpostavaka i, time, pojednostavnjenja, V. Simović je sustav jednadžbi metode sila preveo u linearne diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Mehaničke su pretpostavke:

- grede su uzdužno krute;
- u polovištima elastičnih dijelova greda su točke infleksije njihovih progibnih linija, što znači da su u tim polovištima momenti savijanja jednaki nuli;
- progibne linije posmičnih zidova međusobno su jednake po cijeloj visini zida.

Prema teoriji sastavljenih greda iz treće pretpostavke slijedi da su vrijednosti momenata savijanja u pojedinim posmičnim zidovima u horizontalnom presjeku kroz cijeli zid na



Slika 71.

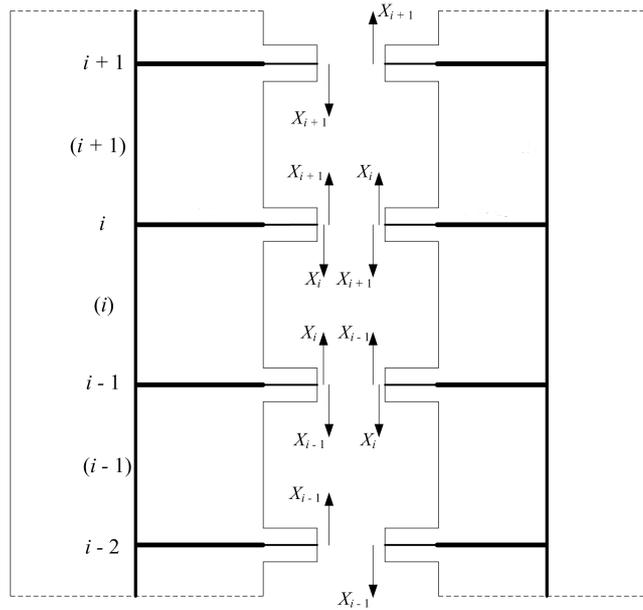
visini  $z$  jednake vrijednosti ukupnoga momenta savijanja u tom presjeku pomnoženoj omjerima fleksijskih krutosti posmičnih zidova i zbroja tih krutosti, odnosno, omjerima momenata tromosti  $I_j$  zidova i njihova zbroja  $I_z$ :

$$M_j(z) = M(z) \frac{I_j}{I_z}. \quad (97)$$

Kako bi se omogućio prijevod u diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima, pretpostaviti treba i stanovitu pravilnost: po visini zida se, na dijelovima koji obuhvaćaju nekoliko etaža (u graničnom slučaju barem jednu), moduli elastičnosti i posmika, debljine zidova i greda, visine etaža, širine otvora, kao ni visine greda ne mijenjaju.

#### 4.1.1. Zid s jednim nizom otvora

**Osnovno rješenje.** Osnovne zamisli postupka prikazat ćemo u (gotovo) najjednostavnijem slučaju: pretpostavit ćemo da su netom navedene geometrijske i materijalne karakteristike jednake na cijeloj visini zida.



Slika 72.

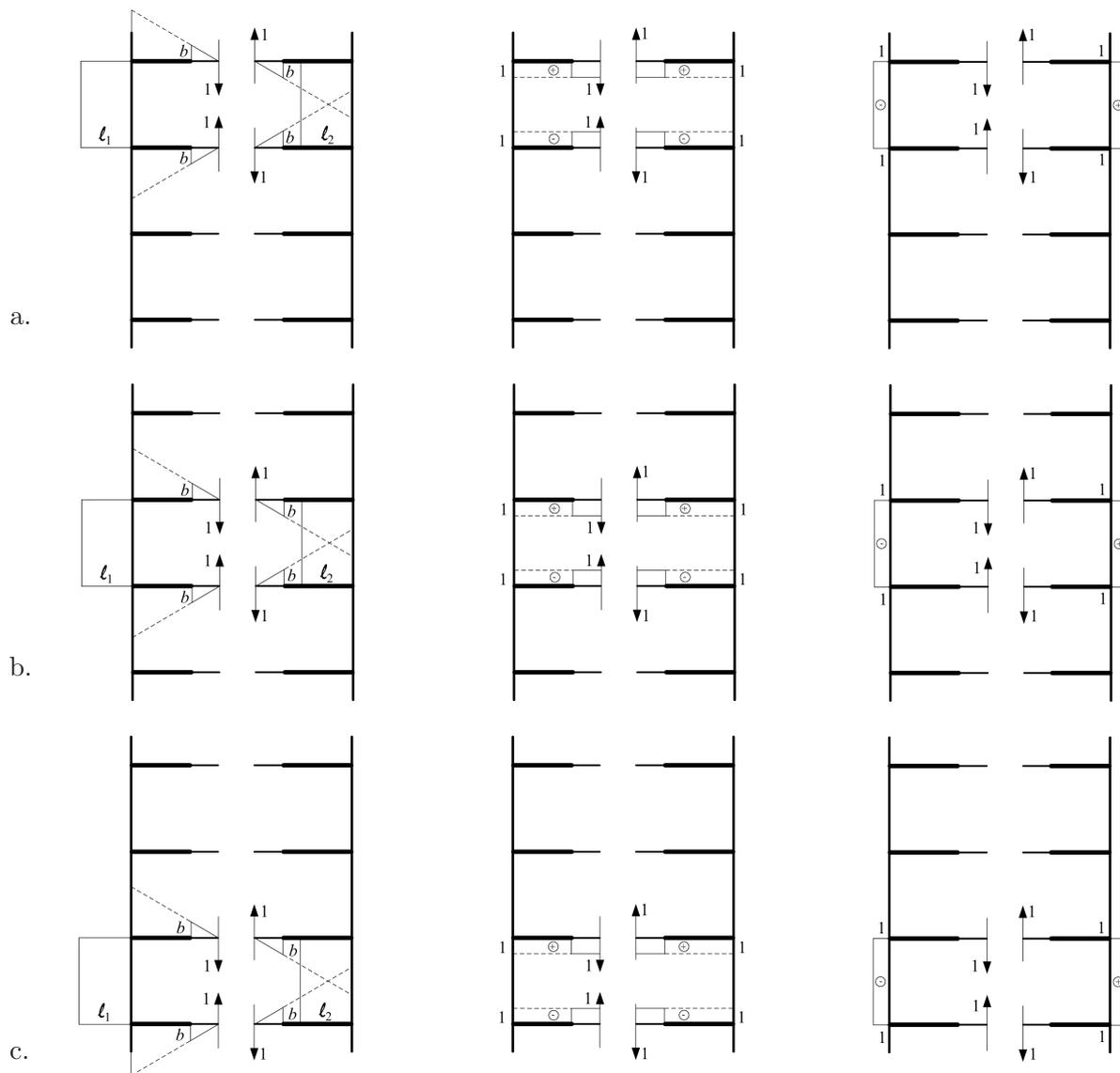
Raskidanjem svih greda u polovini njihova raspona dobiven je osnovni sistem sastavljen od dviju vertikalnih konzola s horizontalnim istakama. Uz prve dvije mehaničke pretpostavke, u presjecima kao statički neodređene ostaju samo poprečne sile. Te su neodređene sile grupirane: umjesto jednoga para suprotno orijentiranih sila neodređenoj vrijednosti  $X_i$  pridružena je grupa djelovanja koja sadržava dva para sila (slika 72.). I, s druge strane, raskinuta veza nije „zamijenjena” jednim, nego dvama parovima sila koji pripadaju grupama pridruženima dvjema neodređenim vrijednostima,  $X_i$  i  $X_{i+1}$ . U općem slučaju, grupa djelovanja može sadržavati nekoliko parova sila ili parova momenata ili i parova sila i parova momenata, a neodređena je vrijednost, kojoj je grupa pridružena, koeficijent kojim je izražen doprinos svih djelovanja grupe stvarnom stanju izvornoga neodređenog sistema.

Grupu  $i$ , silama i momentima koje su dane pogodno odabrane vrijednosti (koje mogu, ali i ne moraju biti jedinične), nazvat ćemo  $i$ -tom osnovnom grupom, a stanje u kojem se osnovni sistem nalazi pri njezinu djelovanju  $i$ -tim osnovnim stanjem (ako su vrijednosti jedinične, uvrješeni je naziv jedinično stanje).

Ukupan broj neodređenih vrijednosti — dakle, broj grupa statički neodređenih djelovanja — jednak je, kao i u osnovnoj formulaciji metode sila, stupnju statičke neodređenosti izvornoga sistema.

Neodređena se djelovanja grupiraju radi (računske) ortogonalizacije ili radi lokalizacije [77]. Osnovna stanja  $i$  i  $j$  nazivaju se ortogonalnima ako pripadni koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$  iščezava. Pri potpunoj ortogonalizaciji iščezavaju svi koeficijenti za koje je  $i \neq j$ , tako da je sustav jednadžbi neprekinutosti dijagonalan. Iako je tada rješavanje sustava trivijalno ( $X_i = -\delta_{i,0}/\delta_{i,i}$ ), provedba potpune ortogonalizacije često traži složen(ij)e grupe, a time i dugotrajnije izračunavanje preostalih koeficijenata  $\delta_{i,i}$  i slobodnih članova  $\delta_{i,0}$ . Lokalizacijom se pak utjecaj grupe djelovanja ograničava na

razmjerno mali dio sistema (drugim riječima, na razmjerno velikom dijelu sistema ta djelovanja ne uzrokuju unutarnje sile), pa se time najčešće postiže i stanoviti stupanj ortogonalnosti.



Slika 73.

Kao što se na jediničnim dijagramima prikazanim na slici 73. može se vidjeti, provedenim je grupiranjem neodređenih sila ostvarena značajna lokalizacija: utjecaj grupe  $i$  proteže se samo na stupove i gredu  $i$ -te etaže i na gredu etaže  $i-1$ . Zahvaćeni dio sistema nazvat ćemo  $i$ -tim poljem. Susjedna polja dijele gredu, a polja koja nisu susjedna nemaju ništa zajedničko, tako da je  $\delta_{i,j} \neq 0$  ako i samo ako su  $i$  i  $j$  susjedna polja, to jest, ako je  $j = i-1$  ili  $j = i+1$ . Stoga su jednadžbe neprekinutosti za raskinute veze u kojima djeluju sile grupa  $i = 2, \dots, n-1$  tročlane jednadžbe:

$$\delta_{i,i-1} X_{i-1} + \delta_{i,i} X_i + \delta_{i,i+1} X_{i+1} + \delta_{i,0} = 0. \quad (98)$$

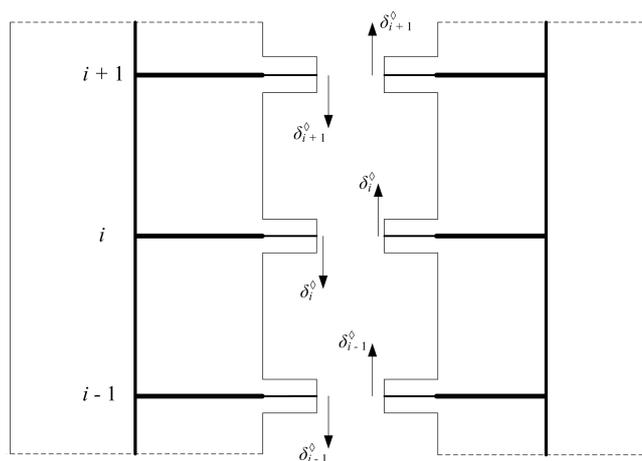
Za raskinute veze u kojima djeluju sile prve grupe jednadžba je neprekinutosti

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = 0, \quad (99)$$

dok je za veze u kojima djeluju sile  $n$ -te grupe jednadžba

$$\delta_{n,n-1} X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,0} = 0. \quad (100)$$

Parovi neodređenih sila  $i$ -te grupe djeluju u raskidima u gredama  $i-1$  i  $i$ , tako da su, kinematički, koeficijenti popustljivosti  $\delta_{i,j}$  i slobodni član  $\delta_{i,0}$  stanovite linearne kombinacije orijentiranih duljina relativnih pomaka u tim raskidima, izazvanih djelovanjima parova sila osnovnih grupa  $j$  i djelovanjem vanjskoga opterećenja, a  $i$ -ta pak jednadžba neprekinutosti iskazuje iščezavanje linearne kombinacije orijentiranih duljina pomaka u tim raskidima. Primjenom teorema o virtualnim silama može se pokazati da su koeficijenti u linearnoj kombinaciji jednaki vrijednostima sila  $i$ -te osnovne grupe, uzevši u obzir orijentacije sila i pomaka. Označimo li orijentirane duljine relativnih pomaka u raskidima grede  $i-1$  i  $i$  sa  $\delta_{i-1}^\diamond$  i  $\delta_i^\diamond$ , linearna kombinacija koja odgovara  $i$ -toj grupi sila bit će  $\delta_i = -1 \cdot \delta_{i-1}^\diamond + 1 \cdot \delta_i^\diamond$ . Naime, uzeli smo da su sile u osnovnim grupama jedinične, a orijentacije relativnih pomaka prikazane na slici 74. smatrat ćemo pozitivnima, tako da par sila  $i$ -te osnovne grupe u raskidu grede  $i$  djeluje u pozitivnom smislu relativnih pomaka, dok je u raskidu grede  $i-1$  smisao djelovanja sila suprotan od pozitivnoga smisla pomaka.



Slika 74.

Prema slici 73.b. koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,i}$  sadržava doprinose momenata savijanja i poprečnih sila u gornjoj i donjoj gredi  $i$ -toga polja, te doprinose momenata savijanja i uzdužnih sila u stupovima tog polja: U proračunskoj je shemi (slika 71.) duljina grede  $2\ell = \ell_1 + \ell_2 = (a_1 + b) + (b + a_2)$ . Njihovi su dijelovi unutar stupova, duljina  $a_1$  i  $a_2$ , međutim, kruti, tako da su  $1/(EI_a) = 1/\infty = 0$  i  $1/(GA_a) = 1/\infty = 0$ , pa koeficijentima popustljivosti doprinose samo unutarnje sile u elastičnim dijelovima grede, duljina  $2b$ . Prema tome, doprinos je momenata savijanja u jednoj gredi, primjenom Vereščaginova teorema,

$$2 \left[ \frac{1}{EI_g} \left( \frac{1}{2} b b \right) \left( \frac{2}{3} b \right) \right] = \frac{2b^3}{3EI_g},$$

pa su doprinosi momenata u donjoj i gonjoj gredi polja

$$2 \cdot \frac{2b^3}{3EI_g} = \frac{4b^3}{3EI_g}.$$

Doprinosi su poprečnih sila u tim dvjema gredama

$$2 \left[ \frac{k}{GA_g} (1 \cdot 2b) \cdot 1 \right] = 2 \cdot \frac{2kb}{GA_g},$$

gdje je  $k$  koeficijent prosječne raspodjele posmičnih naprezanja; za pravokutne je presjeke njegova vrijednost 1,2, pa je, uz  $G = E/[2(1 + \nu)]$ ,

$$2 \cdot \frac{2kb}{GA_g} = 2 \cdot \frac{4,8b(1 + \nu)}{EA_g} = \frac{9,6b(1 + \nu)}{EA_g}.$$

(V. Simović navodi da se u okviru točnosti cijeloga postupka može za armiranobetonske konstrukcije uzeti da je vrijednost Poissonova koeficijenta  $\nu$  nula, tako da za doprinose poprečnih sila u gredama uzima  $9,6b/(EA_g)$ .)

Vrijednosti ukupnih momenata savijanja u stupovima polja  $i$  dijelimo na stupove množenjem omjerima momenata tromosti zidova i njihova zbroja. Vrijednost je ukupnog momenta savijanja u stupovima polja  $i$ , izazvanoga parovima sila  $i$ -te osnovne grupe,  $1 \cdot \ell_1 + 1 \cdot \ell_2 = 2\ell$ , pa su vrijednosti momenata u stupovima  $2\ell I_1/I_z$  i  $2\ell I_2/I_z$ . Njihov je doprinos koeficijentu  $\delta_{i,i}$

$$\frac{1}{EI_1} \left( 2\ell \frac{I_1}{I_z} \cdot h \right) \ell_1 + \frac{1}{EI_2} \left( 2\ell \frac{I_2}{I_z} \cdot h \right) \ell_2 = \frac{1}{EI_z} (2\ell h) (\ell_1 + \ell_2) = \frac{4\ell^2 h}{EI_z}.$$

Doprinosi su uzdužnih sila u dijelovima lijevoga i desnog stupa u polju  $i$

$$\frac{1}{EA_1} (1 \cdot h) \cdot 1 = \frac{h}{EA_1} \quad \text{i} \quad \frac{1}{EA_2} (1 \cdot h) \cdot 1 = \frac{h}{EA_2},$$

tako da je konačno

$$\delta_{i,i} = \frac{4b^3}{3EI_g} + \frac{9,6b(1 + \nu)}{EA_g} + \frac{4\ell^2 h}{EI_z} + \frac{h}{EA_1} + \frac{h}{EA_2} \quad (101)$$

Pretpostavili smo da se moduli elastičnosti i posmika, kao ni geometrijske karakteristike zidova i greda ne mijenjaju po visini, pa  $\delta_{i,i}$  ne ovisi o  $i$  za  $i = 2, \dots, n$ , odnosno,  $\delta_{2,2} = \delta_{3,3} = \dots = \delta_{n,n}$ . Razlikuje se samo  $\delta_{1,1}$ , jer najdonje polje ima samo jednu, gornju gredu:

$$\delta_{1,1} = \frac{2b^3}{3EI_g} + \frac{4,8b(1 + \nu)}{EA_g} + \frac{4\ell^2 h}{EI_z} + \frac{h}{EA_1} + \frac{h}{EA_2} \quad (102)$$

ili

$$\delta_{1,1} = \delta_{i,i} - \left( \frac{2b^3}{3EI_g} + \frac{2b}{GA_g} \right). \quad (103)$$

Dvama su susjednim poljima zajedničke unutarne sile u gredi koju dijele, pa koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,i-1}$  sadržava doprinose momenata savijanja i poprečnih sila u gredi  $i$ ,

zajedničkoj poljima  $i - 1$  i  $i$  (slike 73.a. i b.), a koeficijent  $\delta_{i,i+1}$  doprinose momenata savijanja i poprečnih sila u gredi  $i + 1$  između polja  $i$  i  $i + 1$  (slike 73.b. i c.):

$$\delta_{i,i-1} = \delta_{i,i+1} = -\left(\frac{2b^3}{3EI_g} + \frac{2b}{GA_g}\right); \quad (104)$$

vrijednost je negativna zato što su dijagrami u parovima stanja  $i - 1$  i  $i$  te  $i$  i  $i + 1$  na različitim stranama osi grede. Kako su moduli elastičnosti i posmika, rasponi i poprečni presjeci svih greda jednaki,  $\delta_{i,i-1}$  i  $\delta_{i,i+1}$  ne ovise o  $i$ : svi su  $\delta_{i,i-1}$  i  $\delta_{i,i+1}$  međusobno jednaki.

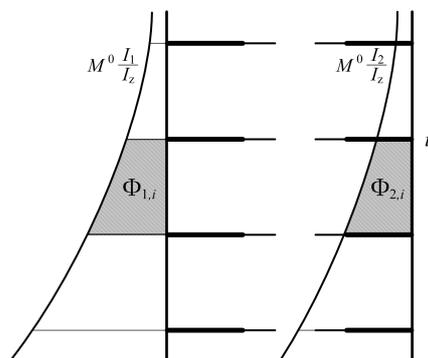
Vrijednosti  $M_j^0$  momenata savijanja u stupovima, izazvanih vanjskim opterećenjem, izračunavamo modelirajući cijeli zid kao konzolu. Označimo li sa  $\Phi_i$  ploštinu dijela površine tako dobivenoga dijagrama koja pripada polju  $i$ , bit će

$$\Phi_{i,1} = \Phi_i \frac{I_1}{I_z} \quad \text{i} \quad \Phi_{i,2} = \Phi_i \frac{I_2}{I_z},$$

pa je slobodni član, prema slikama 73.b. i 75.,

$$\delta_{i,0} = \frac{1}{EI_1} \Phi_{i,1} \ell_1 + \frac{1}{EI_2} \Phi_{i,2} \ell_2 = \frac{1}{EI_z} \Phi_i (\ell_1 + \ell_2) = \frac{2\ell}{EI_z} \Phi_i. \quad (105)$$

Ploštine  $\Phi_{i,1}$ ,  $\Phi_{i,2}$  i  $\Phi_i$  smatrat ćemo „orijentiranim” veličinama: uzet ćemo da su ploštine dijelova površina s lijeve strane osi stupova pozitivne, a da su ploštine dijelova desno od osi negativne.



Slika 75.

Da istaknemo neovisnost koeficijenata popustljivosti o  $i$ , uvest ćemo oznake  $\bar{\delta} = \delta_{i,i}$  za  $i = 2, \dots, n$  i  $\bar{\bar{\delta}} = \delta_{i,i-1} = \delta_{i,i+1}$ , pa jednadžbe neprekinutosti (98), (99) i (100) prelaze u

$$\bar{\bar{\delta}} X_{i-1} + \bar{\delta} X_i + \bar{\bar{\delta}} X_{i+1} + \delta_{i,0} = 0, \quad (106)$$

$$\delta_{1,1} X_1 + \bar{\bar{\delta}} X_2 + \delta_{1,0} = 0, \quad (107)$$

$$\bar{\bar{\delta}} X_{n-1} + \bar{\delta} X_n + \delta_{n,0} = 0. \quad (108)$$

Uzmemo li da su nepoznanice  $X_i$  članovi niza  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ , jednadžbu (106) možemo smatrati *nehomogenom linearnom diferencijskom jednadžbom drugoga reda s konstantnim*

koeficijentima. Mehaničko značenje grupa djelovanja imaju, naravno, samo članovi niza za  $i = 1, \dots, n$ .

Diferencijska jednadžba je jednadžba koja sadržava nekoliko članova nepoznatoga niza indeksi kojih su opći brojevi. Takva se jednadžba naziva i *rekurzijskom relacijom* [51], jer je njome opći član niza definiran rekurzivno, pomoću prethodnih članova, što postaje očiti(ji)m napišemo li jednadžbu (106) u obliku

$$X_{i+1} = -X_{i-1} - \bar{\delta} X_i / \bar{\delta} - \delta_{i,0} / \bar{\delta}.$$

Osim članova  $X_i$  nepoznatoga niza  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$  u jednadžbi (106) se u slobodnome članu, koji prema (105) možemo pisati u obliku  $\delta_{i,0} = \varpi \Phi_i$ , pojavljuje i član  $\Phi_i$  niza  $\{\Phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Članovi tog niza, međutim, vrijednosti su poznate funkcije

$$\Phi : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi : i \mapsto \Phi(i), \quad (109)$$

jer je, rekosmo,  $\Phi_i = \Phi(i)$  orijentirana ploština dijela površine dijagrama ukupnih momenata savijanja izazvanih poznatim vanjskim opterećenjem. Primjerice, na slici 76. prikazan je dijagram ukupnih momenata izazvanih djelovanjem jedinične horizontalne koncentrirane sile na vrhu zida, po osi  $n$ -te grede, orijentirane slijeva nadesno. Vrijednosti momenata u razinama grede  $i-1$  i  $i$  su

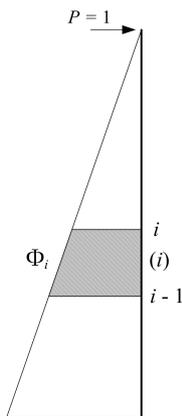
$$M_{i-1}^0 = -[n - (i - 1)] h = -(n - i + 1) h \quad \text{i} \quad M_i^0 = -(n - i) h.$$

Polju  $i$  pripada stoga trapez čija je ploština

$$\frac{1}{2} [(n - i + 1) h + (n - i) h] h = -h^2 i + \left(n + \frac{1}{2}\right) h^2,$$

pa je

$$\Phi_i = \Phi(i) = -h^2 i + \left(n + \frac{1}{2}\right) h^2. \quad (110)$$



Slika 76.

Jednadžbu (106) najčešće pišemo u obliku

$$\bar{\delta} X_{i-1} + \bar{\delta} X_i + \bar{\delta} X_{i+1} = -\varpi \Phi_i, \quad (111)$$

sa slobodnim članom s desne strane znaka jednakosti. Ako je njezin slobodni član jednak nuli, jednadžba je *homogena*, dok je jednadžba s od nule različitim slobodnim članom *nehomogena*.

Ako su svi njezini pribrojnici, koji sadržavaju članove  $X_i$  nepoznatoga niza, monomi prvoga stupnja (ako su oblika  $\beta_j X_j$ , a ne, recimo,  $\beta_j X_j^2$ ,  $\beta_j/X_j$ ,  $X_j X_k$ ,  $\beta_j \sin X_j, \dots$ ), diferencijska je jednadžba linearna. U jednadžbi (111) koeficijent  $\bar{\delta}$  uz  $X_i$ , kao ni koeficijenti  $\bar{\delta}$  uz  $X_{i-1}$  i  $X_{i+1}$ , nisu funkcije varijable  $i$ , pa je riječ o jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Red diferencijske jednadžbe razlika je najvećega i najmanjeg indeksa članova niza koji se u njoj pojavljuju. Kako je  $(i+1) - (i-1) = 2$ , jednadžba (111) drugog je reda.

Riješiti diferencijsku jednadžbu znači pronaći funkciju

$$X : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X : i \mapsto X(i) \quad (112)$$

kojom su članovi niza  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$  definirani neposredno, u ovisnosti o svojim indeksima,  $X_i = X(i)$ . Naime, za poznavanje  $n$ -toga člana niza zadanog diferencijskom jednadžbom na prvi bi pogled trebalo bi poznavati svih prethodnih  $n-1$  članova. Neka je, primjerice, niz definiran rekurijskom relacijom

$$x_{i+1} = r x_i, \quad (113)$$

gdje je  $r$  unaprijed zadana konstantna vrijednost. Zanima li nas, recimo, peti član niza (kako prvi član ima indeks 0, indeks je petoga člana 4), moramo izračunati redom sve prethodne članove:

$$\begin{aligned} x_1 &= r x_0, \\ x_2 &= r x_1 = r(r x_0) = r^2 x_0, \\ x_3 &= r x_2 = r(r^2 x_0) = r^3 x_0, \\ x_4 &= r x_3 = r(r^3 x_0) = r^4 x_0. \end{aligned}$$

U ovom primjeru nije teško, na temelju posljednjih podizraza u pojedinim recima, uočiti obrazac

$$x_i = r^i x_0 \quad (114)$$

koji daje rješenje diferencijske jednadžbe, funkciju

$$x : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x : i \mapsto r^i x_0, \quad (115)$$

tako da je  $x_i = x(i)$ . Odredbenu funkciju  $x$  i njome zadani niz  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  možemo poistovjetiti — matematičari će ionako reći da niz jest funkcija cjelobrojne varijable te da je indeksni zapis  $x_i$  samo sažetiji oblik „funkcijskoga” zapisa  $x(i)$ .

Dobiveni je niz *opće rješenje* diferencijske jednadžbe: za različite vrijednosti  $x_0$  dobit ćemo različite nizove. *Posebno rješenje* dobivamo odabirom jedne od njih. Unaprijed zadana vrijednost  $x_0 = \bar{x}_0$  naziva se *početnim uvjetom*. Možemo, u stvari, zadati bilo koji (ali samo jedan) član niza: zadamo li, primjerice,  $x_m = \bar{x}_m$ , iz (114) neposredno slijedi  $x_0 = \bar{x}_m / r^m$ .

Ako je diferencijska jednadžba  $n$ -toga reda, njezino će opće rješenje sadržavati  $n$  neodređenih koeficijenata poput  $x_0$  u (114). Za izdvajanje posebnoga rješenja treba zadati

$n$  članova niza. Ako je to prvih  $n$  članova  $x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_{n-1} = \bar{x}_{n-1}$  (ili, općenitije, bilo kojih  $n$  uzastopnih članova  $x_m = \bar{x}_m, x_{m+1} = \bar{x}_{m+1}, \dots, x_{m+n-1} = \bar{x}_{m+n-1}$ ), riječ je o početnim uvjetima. Ako pak zadani članovi nisu uzastopni, govorimo o *rubnim uvjetima*. Rubni uvjeti mogu biti i složenijih oblika od jednostavno zadanih vrijednosti — za diferencijsku jednadžbu (111) rubni su uvjeti zadani jednadžbama (107) i (108). Naziv „rubni” postaje sada smisljeni(ji)m: riječ je o uvjetima koje članovi traženoga niza moraju zadovoljiti na krajevima njegova dijela koji nas zanima, na rubu područja kojemu dajemo fizikalni smisao — u našem primjeru, u najdonjem i najgornjem polju.

Budući da su  $\bar{\delta} > 0, \varpi > 0$  i  $\bar{\delta} < 0$ , bit će

$$-\bar{\delta}/\bar{\delta} = \alpha > 0 \quad \text{i} \quad -\varpi/\bar{\delta} = \omega > 0. \quad (116)$$

Podijelimo li stoga jednadžbu (111) sa  $\bar{\delta}$ , dobit ćemo

$$X_{i-1} - \alpha X_i + X_{i+1} = \omega \Phi_i. \quad (117)$$

Neka su nizovi  $\{K_i\}_{i=0}^{\infty}$  i  $\{L_i\}_{i=0}^{\infty}$  bilo koja dva rješenja jednadžbe (117), što znači da za bilo koja tri njihova uzastopna člana vrijedi

$$K_{i-1} - \alpha K_i + K_{i+1} = \omega \Phi_i \quad \text{i} \quad L_{i-1} - \alpha L_i + L_{i+1} = \omega \Phi_i.$$

Oduzmemo li drugu jednakost od prve, dobit ćemo

$$[K_{i-1} - L_{i-1}] - \alpha [K_i - L_i] + [K_{i+1} - L_{i+1}] = 0,$$

pa je, prema tome, niz  $\{K_i - L_i\}_{i=0}^{\infty}$  rješenje homogene diferencijske jednadžbe

$$X_{i-1} - \alpha X_i + X_{i+1} = 0. \quad (118)$$

Kako je ta jednadžba nastala „brisanjem” slobodnoga člana jednadžbe (117), nazivamo je *pripadnom homogenom diferencijskom jednadžbom* te jednadžbe.

Slijedi da je opće rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (117) niz članovi kojega su zbrojevi odgovarajućih članova jednoga njezina posebnog rješenja  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  i općeg rješenja  $\{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty}$  pripadne homogene diferencijske jednadžbe (118):

$$\{X_i\}_{i=0}^{\infty} = \{X_i^{(h)} + X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (119)$$

Pretpostavit ćemo da su članovi niza  $\{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty}$  oblika

$$X_i^{(h)} = r^i.$$

Uvrštavanje pretpostavljenoga rješenja u jednadžbu (118) daje

$$r^{i-1} - \alpha r^i + r^{i+1} = 0,$$

odnosno

$$r^{i-1} (1 - \alpha r + r^2) = 0.$$

Ako je  $r^{i-1} = 0$ , onda je, za  $i-1 > 0$ ,  $r = 0$ , pa dobivamo trivijalno rješenje, niz  $\{0\}_{i=0}^{\infty}$ .  
Jednadžbu

$$r^2 - \alpha r + 1 = 0 \quad (120)$$

nazivamo *karakterističnom jednadžbom* jednadžbe (118). Njezina su rješenja

$$r_1 = \frac{1}{2} \left( \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4} \right) \quad \text{i} \quad r_2 = \frac{1}{2} \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4} \right). \quad (121)$$

Viëeteove formule za korijene polinoma daju  $r_1 \cdot r_2 = 1$  i  $r_1 + r_2 = \alpha$ , što se može provjeriti jednostavnim uvrštavanjem.

Svaka tri uzastopna člana nizova  $\{r_1^k\}_{k=0}^{\infty}$  i  $\{r_2^k\}_{k=0}^{\infty}$  zadovoljavaju jednadžbu (118), što znači da vrijedi

$$r_1^{i-1} - \alpha r_1^i + r_1^{i+1} = 0 \quad \text{i} \quad r_2^{i-1} - \alpha r_2^i + r_2^{i+1} = 0,$$

a budući da je ta jednadžba linearna, lako je pokazati da će je zadovoljiti i po tri uzastopna člana nizova  $\{C_1 r_1^k + C_2 r_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ , pri čemu su  $C_1$  i  $C_2$  dvije po volji odabrane konstante:

$$\begin{aligned} & [C_1 r_1^{i-1} + C_2 r_2^{i-1}] - \alpha [C_1 r_1^i + C_2 r_2^i] + [C_1 r_1^{i+1} + C_2 r_2^{i+1}] \\ & = C_1 [r_1^{i-1} - \alpha r_1^i + r_1^{i+1}] + C_2 [r_2^{i-1} - \alpha r_2^i + r_2^{i+1}] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Opće je rješenje homogene diferencijske jednadžbe (118) stoga

$$\{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^i + C_2 r_2^i\}_{i=0}^{\infty}, \quad (122)$$

pa je opće rješenje nehomogene jednadžbe (117)

$$\{X_i\}_{i=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (123)$$

Posebno rješenje  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  jednadžbe (117) ovisi o njezinu slobodnom članu  $\omega \Phi_i$ , a time, posredno, o vanjskom opterećenju. Djeluje li, primjerice, jedinična koncentrirana sila po osi  $n$ -te grede, funkcija  $\Phi$  zadana je izrazom (110). Uz

$$\gamma_{n,1} = -\omega h^2 \quad \text{i} \quad \gamma_{n,0} = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) h^2 \quad (124)$$

slobodni je član

$$\omega \Phi_i = \gamma_{n,1} i + \gamma_{n,0}, \quad (125)$$

što znači da je niz  $\{\omega \Phi_i\}_{i=0}^{\infty}$  određen linearnom funkcijom. Pretpostavimo li da su članovi posebnog rješenja  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  istoga oblika,

$$X_i^{(p)} = a_n i + b_n, \quad (126)$$

uvrštavanje u jednadžbu (117) daje

$$[a_n (i-1) + b_n] - \alpha [a_n i + b_n] + [a_n (i+1) + b_n] = \gamma_{n,1} i + \gamma_{n,0}$$

i, nakon sređivanja,

$$[(2 - \alpha) a_n] i + (2 - \alpha) b_n = \gamma_{n,1} i + \gamma_{n,0}.$$

Izraz s lijeve strane znaka jednakosti bit će jednak izrazu s desne ako su

$$(2 - \alpha) a_n = \gamma_{n,1} \quad \text{i} \quad (2 - \alpha) b_n = \gamma_{n,0},$$

iz čega slijedi

$$a_n = \frac{\gamma_{n,1}}{2 - \alpha} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{\gamma_{n,0}}{2 - \alpha}. \quad (127)$$

Diferencijska jednadžba (117) drugoga je reda, pa njezino opće rješenje (123) sadržava dva neodređena koeficijenta  $C_1$  i  $C_2$  koja nazivamo konstantama integracije. Drugim riječima, skup svih rješenja jednadžbe (117) sadržava  $\infty^2$  nizova (123), jer i za  $C_1$  i za  $C_2$  možemo odabrati  $\infty$  vrijednosti. Iz toga skupa moramo izdvojiti niz koji zadovoljava rubne uvjete (107) i (108). Dijeljenjem s  $\bar{\delta}$  rubni uvjeti prelaze u

$$-\alpha_1 X_1 + X_2 = \omega \Phi_1, \quad (128)$$

$$X_{n-1} - \alpha X_n = \omega \Phi_n, \quad (129)$$

gdje je  $\alpha_1 = -\delta_{1,1}/\bar{\delta} > 0$ . Usporedba izraza (103) i (104) pokazuje da je

$$\delta_{1,1} = \delta_{i,i} + \delta_{i,i-1} = \bar{\delta} + \bar{\delta},$$

pa je

$$\alpha_1 = -\delta_{1,1}/\bar{\delta} = -\left(\bar{\delta}/\bar{\delta} + \bar{\delta}/\bar{\delta}\right) = -(-\alpha + 1) = \alpha - 1.$$

Uvrstimo li odgovarajuće članove niza (123) u uvjet (128),

$$-\alpha_1 [C_1 r_1 + C_2 r_2 + X_1^{(p)}] + [C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + X_2^{(p)}] = \omega \Phi_1,$$

dobit ćemo nakon sređivanja

$$(r_1^2 - \alpha_1 r_1) C_1 + (r_2^2 - \alpha_1 r_2) C_2 = \omega \Phi_1 + \alpha_1 X_1^{(p)} - X_2^{(p)}.$$

Podizraz s lijeve strane znaka jednakosti možemo pisati u obliku

$$(r_1 - \alpha_1) r_1 C_1 + (r_2 - \alpha_1) r_2 C_2,$$

a kako su  $\alpha_1 = \alpha - 1$  i  $\alpha = r_1 + r_2$ , bit će

$$r_1 - \alpha_1 = r_1 - \alpha + 1 = r_1 - r_1 - r_2 + 1 = 1 - r_2$$

i, analogno,  $r_2 - \alpha_1 = 1 - r_1$ , pa podizraz slijeva prelazi u

$$(1 - r_2) r_1 C_1 + (1 - r_1) r_2 C_2.$$

Posebno rješenje  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  ne mora zadovoljiti rubne uvjete, ali, naravno, zadovoljava jednadžbu (117); za  $i=1$  je

$$X_0^{(p)} - \alpha X_1^{(p)} + X_2^{(p)} = \omega \Phi_1,$$

odakle je

$$\omega \Phi_1 - X_2^{(p)} = X_0^{(p)} - \alpha X_1^{(p)},$$

tako da je s desne strane

$$\omega \Phi_1 + \alpha_1 X_1^{(p)} - X_2^{(p)} = X_0^{(p)} - (\alpha - \alpha_1) X_1^{(p)},$$

te rubni uvjet prelazi, zbog  $\alpha - \alpha_1 = 1$ , u jednadžbu

$$(1 - r_2) r_1 C_1 + (1 - r_1) r_2 C_2 = X_0^{(p)} - X_1^{(p)}. \quad (130)$$

Grupa sila  $X_0$  ne postoji, pa se čini da vrijednost  $X_0^{(p)}$  nema „fizikalnoga” smisla. No,  $X_0^{(p)}$  je, formalno, član niza  $\{X_0^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  zadanoga funkcijom

$$X^{(p)} : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X^{(p)} : i \mapsto X^{(p)}(i),$$

tako da se vrijednost  $X_0^{(p)} = X^{(p)}(0)$  može izračunati. Primjerice, za  $X^{(p)}(i) = a_n i + b_n$  su  $X_0^{(p)} = b_n$  i  $X_1^{(p)} = a_n + b_n$ , pa je u rubnom uvjetu (130) s desne strane znaka jednakosti

$$X_0^{(p)} - X_1^{(p)} = -a_n.$$

Uvrstimo li pak odgovarajuće članove niza (123) u uvjet (129),

$$[C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + X_{n-1}^{(p)}] - \alpha [C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + X_n^{(p)}] = \omega \Phi_n,$$

sređivanjem dobivamo

$$(r_1^{n-1} - \alpha r_1^n) C_1 + (r_2^{n-1} - \alpha r_2^n) C_2 = \omega \Phi_n - X_{n-1}^{(p)} + \alpha X_n^{(p)}.$$

Podizraz slijêva možemo prevesti u

$$(r_1^{-2} - \alpha r_1^{-1}) r_1^{n+1} C_1 + (r_2^{-2} - \alpha r_2^{-1}) r_2^{n+1} C_2,$$

te, uz  $r_1 \cdot r_2 = 1$ , odnosno  $r_1^{-1} = r_2$  i  $r_2^{-1} = r_1$ , u

$$(r_2^2 - \alpha r_2) r_1^{n+1} C_1 + (r_1^2 - \alpha r_1) r_2^{n+1} C_2,$$

a kako su  $r_1$  i  $r_2$  rješenja karakteristične jednadžbe (120), bit će

$$r_1^2 - \alpha r_1 = -1 \quad \text{i} \quad r_2^2 - \alpha r_2 = -1$$

te s lijeve strane na kraju ostaje

$$-r_1^{n+1} C_1 - r_2^{n+1} C_2.$$

Podizraz zdësna možemo pojednostavniti, kao i u prvom rubnom uvjetu, primjenom činjenice da posebno rješenje zadovoljava jednadžbu (117): za  $i = n$  je

$$X_{n-1}^{(p)} - \alpha X_n^{(p)} + X_{n+1}^{(p)} = \omega \Phi_n,$$

tako da je

$$\omega \Phi_n - X_{n-1}^{(p)} + \alpha X_n^{(p)} = -X_{n+1}^{(p)},$$

pa rubni uvjet (129) daje jednadžbu

$$r_1^{n+1} C_1 + r_2^{n+1} C_2 = -X_{n+1}^{(p)}. \quad (131)$$

Grupa sila  $X_{n+1}$ , kao ni  $X_0$ , ne postoji, ali je  $X_{n+1}^{(p)} = X^{(p)}(n+1)$ . Za  $X^{(p)}(i) = a_n i + b_n$  je

$$X^{(p)}(n+1) = a_n (n+1) + b_n.$$

Jednadžbe (130) i (131) tvore sustav dviju linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznicama  $C_1$  i  $C_2$ . Uvrštavanje vrijednosti dobivenih rješavanjem tog sustava u (123) daje niz koji zadovoljava diferencijsku jednadžbu (117) i rubne uvjete (128) i (129).

Uzdužne sile u stupovima polja  $i$  suprotno su orijentirane, a po apsolutnoj su vrijednosti međusobno jednake:

$$N_{1,i} = -N_{2,i} = -X_i. \quad (132)$$

Vrijednost je ukupnoga momenta savijanja u nekom presjeku  $z$  polja  $i$

$$M_i(z) = M^0(z) - 2\ell X_i. \quad (133)$$

Vrijednost poprečne sile u  $i$ -toj gredi razlika je vrijednosti statički neodređenih sila koje se u njoj „preklapaju”:

$$T_i = X_i - X_{i+1}. \quad (134)$$

**Primjer 1.** Kao prvi primjer, riješit ćemo simetričan zid s devet etaža. Uz oznake sa slike 71., neka su  $h = 3,2$  m,  $2a_1 = 2a_2 = 5$  m,  $2b = 2$  m i  $v = 0,6$  m. Neke su uz to debljine posmičnih zidova ( $t_1$  i  $t_2$ ) i spojnih greda ( $t_g$ ) međusobno jednake; vrijednosti unutarnjih sila (za razliku od pomakâ) ne ovise o odabranoj debljini, tako da možemo uzeti da je  $t_1 = t_2 = t_g = 1$  m. Uzet ćemo i da su  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> i  $\nu = 0$ .

Prema izrazima (101) i (104) su  $\bar{\delta} = 3,29602 \cdot 10^{-6}$  m i  $\bar{\bar{\delta}} = -1,50123 \cdot 10^{-6}$  m, tako da su, prema (116),  $\alpha = 2,19554$  i  $\omega = 0,00746053$ . Prema (110) je

$$\Phi_i = -3,2^2 i + \left(9 + \frac{1}{2}\right) \cdot 3,2^2,$$

pa je diferencijska jednadžba

$$X_{i-1} - 2,19554 X_i + X_{i+1} = 0,00746053 (-10,24 i + 97,28).$$

Izrazi (121) daju rješenja  $r_1 = 0,644894$  i  $r_2 = 1,55064$  karakteristične jednadžbe, a izrazi (127) uz izraze (124) koeficijente  $a_n = 0,390698$  i  $b_n = -3,71163$  u posebnom rješenju, pa je

$$X_i = C_1 \cdot 0,644894^i + C_2 \cdot 1,55064^i + 0,390698 i - 3,71163.$$

Integracijske konstante  $C_1$  i  $C_2$  rješenja su sustava jednadžbi (130) i (131),

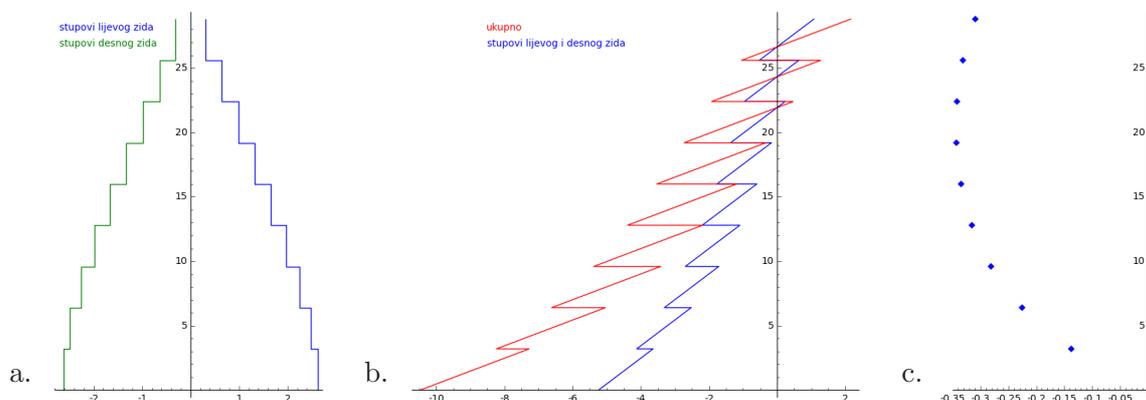
$$\begin{aligned} -0,355106 C_1 + 0,550643 C_2 &= -0,390698, \\ 0,0124417 C_1 + 80,3746 C_2 &= -0,195349, \end{aligned}$$

pa su  $C_1 = 1,09620$  i  $C_2 = -0,00260017$ , tako da je rješenje diferencijske jednadžbe niz opći član kojega je

$$X_i = 1,09620 \cdot 0,644894^i - 0,00260017 \cdot 1,55064^i + 0,390698i - 3,71163.$$

Opseg je proračuna neovisan o broju etaža — broj etaža pojavljuje se samo kao konstanta u izrazu (110) za  $\Phi_i$  i u jednadžbi (131) izvedenoj iz rubnog uvjeta na vrhu zida.

Prema (132), članovi niza za  $i = 1, \dots, 9$  vrijednosti su uzdužnih sila u stupovima desnoga posmičnog zida, a uz promjenu predznaka i u stupovima lijevog; dijagrami su prikazani na slici 77.a. Vrijednosti ukupnih momenata savijanja — zbrojeva momenata u stupovima lijevoga i desnog zida — izračunavamo prema izrazu (133), a vrijednosti u lijevim i desnim stupovima dobivamo množenjem vrijednostî ukupnih momenata omjerima fleksijskih krutosti posmičnih zidova i krutosti zida. Kako je zid simetričan, vrijednosti u stupovima jednake su polovinama ukupnih vrijednosti (slika 77.b.). Vrijednosti poprečnih sila u spojnim gredama izračunavamo prema izrazu (134) (slika 77.c.).



Slika 77.

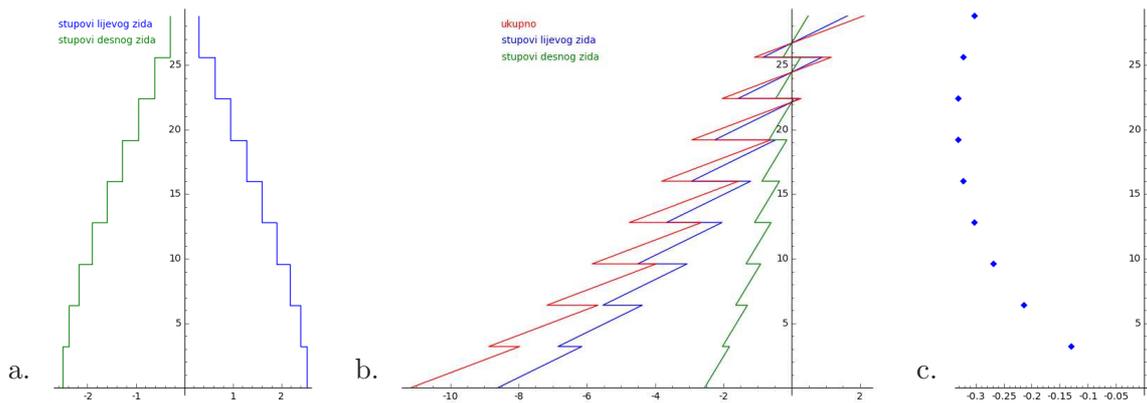
**Primjer 2.** Za sljedeći ćemo primjer uzeti  $2a_1 = 6$  m i  $2a_2 = 4$  m; zid, dakle, nije simetričan. Ostale su veličine kao u prethodnom primjeru. Sada su  $\bar{\delta} = 3,27091 \cdot 10^{-6}$  m i  $\bar{\delta} = -1,50123 \cdot 10^{-6}$  m, a diferencijska je jednadžba

$$X_{i-1} - 2,17882 X_i + X_{i+1} = 0,00666118 (-10,24i + 97,28).$$

Rješavanjem karakteristične jednadžbe, izračunavanjem koeficijenata u posebnom rješenju i rješavanjem sustava jednadžbi za integracijske konstante dobivamo kao rješenje niz s općim članom

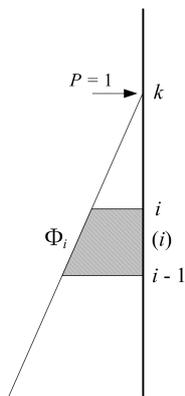
$$X_i = 1,10800 \cdot 0,657193^i - 0,00311673 \cdot 1,52162^i + 0,381457i - 3,62384.$$

Dijagrami unutarnjih sila ( $N$ ,  $M$  i  $T$ ) prikazani su na slici 78. Vrijednosti momenata savijanja u stupovima lijevoga i desnog zida dobiveni su množenjem vrijednosti ukupnih momenata omjerima  $I_1/I_z = 18,0/23,3 = 0,77$  i  $I_2/I_z = 5,3/23,3 = 0,23$ .



Slika 78.

**Sila u osi  $k$ -te grede.** Uzet ćemo sada da jedinična koncentrirana sila djeluje po osi  $k$ -te grede za  $k < n$  (slika 79.).



Slika 79.

Greda  $k$  dijeli zid u dva područja. Na dijelu zida iznad nje, u poljima  $k+1$  do  $n$ , bit će  $M^0 = 0$ , pa će stoga ploštine dijelova površine momentnoga dijagrama biti izražene članovima „trivijalnoga” niza  $\{\Phi_{2,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{0\}_{i=0}^{\infty}$ . Ispod  $k$ -te grede, u poljima 1 do  $k$ , vrijednosti su momenata u razinama grede  $i-1$  i  $i$

$$M_{i-1}^0 = -(k-i+1)h \quad \text{i} \quad M_i^0 = -(k-i)h,$$

pa su ploštine izražene članovima niza

$$\{\Phi_{1,i}\}_{i=0}^{\infty} = \left\{ -h^2 i + \left( k + \frac{1}{2} \right) h^2 \right\}_{i=0}^{\infty}. \quad (135)$$

Kako je na gornjemu dijelu zida problem opisan homogenom diferencijskom jednačbom, homogeno rješenje

$$\{X_{2,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^i + C_2 r_2^i\}_{i=0}^{\infty} \quad (136)$$

ujedno je i njezino opće rješenje. Indeks 2 u  $X_{2,i}$  označava da je to rješenje samo za drugi/gornji dio zida, a mehaničko značenje imaju samo njegovi članovi  $X_{2,k+1}, \dots, X_{2,n}$ .

Na donjemu je dijelu zida problem opisan diferencijskom jednađžbom čiji je slobodni član

$$\omega \Phi_{1,i} = \gamma_{k,1} i + \gamma_{k,0} \quad (137)$$

uz

$$\gamma_{k,1} = -\omega h^2 \quad \text{i} \quad \gamma_{k,0} = \omega \left( k + \frac{1}{2} \right) h^2, \quad (138)$$

pa će njezino opće rješenje sadržavati i posebno rješenje,

$$\{X_{1,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_3 r_1^i + C_4 r_2^i + X_{1,i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (139)$$

Pretpostavimo li ponovo da su članovi posebnoga rješenja istoga oblika kao slobodni član,

$$X_{1,i}^{(p)} = a_k i + b_k, \quad (140)$$

dobit ćemo, po uvrštavanju u jednađžbu (117) i izjednačavanju pripadnih koeficijenata,

$$a_k = \frac{\gamma_{k,1}}{2 - \alpha} \quad \text{i} \quad b_k = \frac{\gamma_{k,0}}{2 - \alpha}. \quad (141)$$

Mehaničko će značenje imati članovi  $X_{1,1}, \dots, X_{1,k}$  niza (139).

Rješenja (136) i (139) sadrže četiri neodređena koeficijenta  $C_1, \dots, C_4$ . Za izračunavanje njihovih vrijednosti potrebna su četiri rubna uvjeta; uz uvjete u poljima 1 i  $n$ , na dnu i na vrhu zida, upotrijebit ćemo i uvjete u poljima  $k$  i  $k+1$ , ispod i iznad hvatišta jedinične sile, jer je  $k+1$  donje rubno polje dijela zida na kojem mehaničko značenje imaju članovi niza (136), dok je  $k$  gornje rubno polje dijela na kojem mehaničko značenje imaju članovi niza (139).

Na vrhu zida mora biti zadovoljen uvjet (129), ali kako je  $\Phi_{2,n} = 0$ , i rubni je uvjet homogen:

$$X_{n-1} - \alpha X_n = 0. \quad (142)$$

U tom dijelu mehaničko značenje imaju članovi niza (136). Uvrstimo li u (142) izraze za članove  $X_{2,n-1}$  i  $X_{2,n}$ ,

$$[C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}] - \alpha [C_1 r_1^n + C_2 r_2^n] = 0,$$

podizraz s lijeve strane možemo pojednostavniti na isti način kao u izvodu jednađžbe (131), tako da prvi rubni uvjet daje

$$r_1^{n+1} C_1 + r_2^{n+1} C_2 = 0. \quad (143)$$

I polje  $k+1$  pripada gornjemu dijelu zida. Jednađžba

$$X_k - \alpha X_{k+1} + X_{k+2} = 0, \quad (144)$$

dobivena iz jednađžbe (117) za  $i = k+1$  uz  $\Phi_{2,k+1} = 0$ , drugi je rubni uvjet. Za  $X_{k+1}$  i  $X_{k+2}$  uvrštavamo članove niza (136), a za  $X_k$  član niza (139):

$$[C_3 r_1^k + C_4 r_2^k + X_{1,k}^{(p)}] - \alpha [C_1 r_1^{k+1} + C_2 r_2^{k+1}] + [C_1 r_1^{k+2} + C_2 r_2^{k+2}] = 0.$$

Prenesemo li  $X_{1,k}^{(p)}$  na desnu stranu znaka jednakosti, nakon sređivanja slijevâ ostaje

$$\underbrace{(r_1^2 - \alpha r_1)}_{=-1} r_1^k C_1 + \underbrace{(r_2^2 - \alpha r_2)}_{=-1} r_2^k C_2 + r_1^k C_3 + r_2^k C_4,$$

pa drugi rubni uvjet prelazi u jednadžbu

$$-r_1^k C_1 - r_2^k C_2 + r_1^k C_3 + r_2^k C_4 = -X_{1,k}^{(p)}, \quad (145)$$

pri čemu je

$$X_{1,k}^{(p)} = X_1^{(p)}(k) = a_k k + b_k.$$

Polje  $k$  pak pripada donjemu dijelu zida. Jednadžba (117) za  $i = k$  daje treći rubni uvjet,

$$X_{k-1} - \alpha X_k + X_{k+1} = \omega \Phi_{1,k}, \quad (146)$$

pri čemu za  $X_{k-1}$  i  $X_k$  treba uvrstiti članove niza (139), a za  $X_{k+1}$  član niza (136):

$$[C_3 r_1^{k-1} + C_4 r_2^{k-1} + X_{1,k-1}^{(p)}] - \alpha [C_3 r_1^k + C_4 r_2^k + X_{1,k}^{(p)}] + [C_1 r_1^{k+1} + C_2 r_2^{k+1}] = \omega \Phi_k.$$

Prenesemo li  $X_{1,k-1}^{(p)}$  i  $-\alpha X_{1,k}^{(p)}$  na desnu stranu, podizraz koji ostaje slijevâ možemo pojednostavniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} & r_1^{k+1} C_1 + r_2^{k+1} C_2 + (r_1^{-2} - \alpha r_1^{-1}) r_1^{k+1} C_3 + (r_2^{-2} - \alpha r_2^{-1}) r_2^{k+1} C_4 \\ &= r_1^{k+1} C_1 + r_2^{k+1} C_2 + \underbrace{(r_2^2 - \alpha r_2)}_{=-1} r_1^{k+1} C_3 + \underbrace{(r_1^2 - \alpha r_1)}_{=-1} r_2^{k+1} C_4. \end{aligned}$$

Iz jednakosti

$$X_{1,k-1}^{(p)} - \alpha X_{1,k}^{(p)} + X_{1,k+1}^{(p)} = \omega \Phi_{1,k},$$

kojom je iskazano da posebno rješenje, i za  $i = k$ , zadovoljava diferencijsku jednadžbu, za desnu stranu dobivamo

$$\omega \Phi_{1,k} - X_{1,k-1}^{(p)} + \alpha X_{1,k}^{(p)} = X_{1,k+1}^{(p)},$$

tako da treći rubni uvjet prelazi u jednadžbu

$$r_1^{k+1} C_1 + r_2^{k+1} C_2 - r_1^{k+1} C_3 - r_2^{k+1} C_4 = X_{1,k+1}^{(p)} \quad (147)$$

uz

$$X_{1,k+1}^{(p)} = a_k (k + 1) + b_k.$$

Rubni uvjet u prvom polju, u dnu zida, dan je izrazom (128), pri čemu za  $X_1$  i  $X_2$  treba uvrstiti članove niza (139). Četvrti će rubni uvjet dati jednadžbu

$$(1 - r_2) r_1 C_3 + (1 - r_1) r_2 C_4 = X_{1,0}^{(p)} - X_{1,1}^{(p)} \quad (148)$$

uz

$$X_{1,0}^{(p)} - X_{1,1}^{(p)} = -a_k;$$

ta je jednadžba po obliku jednaka jednadžbi (130), dobivenoj iz uvjeta (128) pri opterećenju silom po osi najgornje grede, a jednaki su i izvodi tih dviju jednadžbi.

Greda u osi koje djeluje sila dijeli zid u dva područja. Djeluje li na zid  $m$  sila, trebat će ga podijeliti u  $m+1$  područje, što znači da će rješenje sadržavati  $m+1$  niz i da će trebati izračunati  $2(m+1)$  integracijskih konstanta rješavanjem sustava koji sadržava  $2(m+1)$  jednadžbi. Druga je, jednostavnija i učinkovitija mogućnost primjena superpozicije: na opisani način provesti proračun za svaku silu zasebice pa zbrojiti rješenja.

**Primjer 3.** Zid je simetričan, s trinaest etaža, a jedinična sila djeluje po osi grede sedme etaže. Neka su, kao u primjeru 1.,  $h = 3,2$  m,  $2a_1 = 2a_2 = 5$  m,  $2b = 2$  m,  $v = 0,6$  m,  $t = 1$  m,  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> i  $\nu = 0$ .

Koeficijenti  $\alpha$  i  $\omega$  ne ovise ni o broju etaža, ni o opterećenju, pa ih možemo preuzeti iz primjera 1., tako da su diferencijske jednadžbe za dijelove zida iznad i ispod hvatišta sile

$$X_{i-1} - 2,19554 X_i + X_{i+1} = 0$$

i

$$X_{i-1} - 2,19554 X_i + X_{i+1} = 0,00746053 (-3,2^2 i + 7,5 \cdot 3,2^2).$$

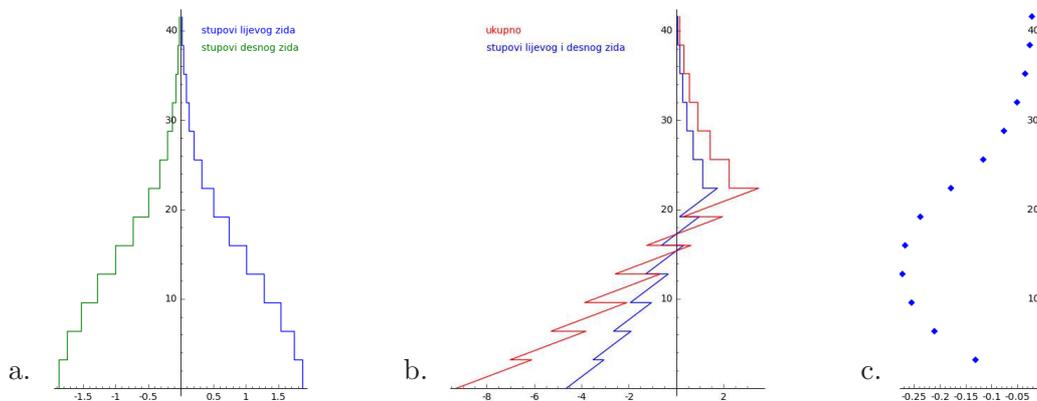
Rješenja su karakteristične jednadžbe  $r_1 = 0,644894$  i  $r_2 = 1,55064$ , dok su koeficijenti u posebnom rješenju donjega dijela  $a_n = 0,390698$  i  $b_n = -2,93023$ . Sustav jednadžbi izveden iz rubnih uvjeta sadrži četiri jednadžbe s četiri nepoznanice. Uvrstimo li njegova rješenja—integracijske konstante  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ —u izraze za opće članove nizova, dobivamo

$$X_{2,i} = -10,7839 \cdot 0,644894^i + 4,99393 \cdot 10^{-5} \cdot 1,55064^i$$

i

$$X_{1,i} = 1,07479 \cdot 0,644894^i - 0,0164073 \cdot 1,55064^i + 0,390698 i - 2,93023.$$

Pri izračunavanju unutarnjih sila u izraze (132), (133) i (134) uvrštavamo  $X_{1,i}$  za  $i = 1, \dots, 7$ , a  $X_{2,i}$  za  $i = 8, \dots, 13$ ; dijagrami  $N$ ,  $M$  i  $T$  prikazani su na slici 80.



Slika 80.

**Primjer 4.** Neka su  $2a_1 = 6$  m i  $2a_2 = 4$  m, a ostale veličine kao u primjeru 3. Zid je, dakle, nesimetričan. Koeficijente  $\alpha$  i  $\omega$  preuzimamo iz primjera 2., pa su diferencijske jednadžbe

$$X_{i-1} - 2,17882 X_i + X_{i+1} = 0,$$

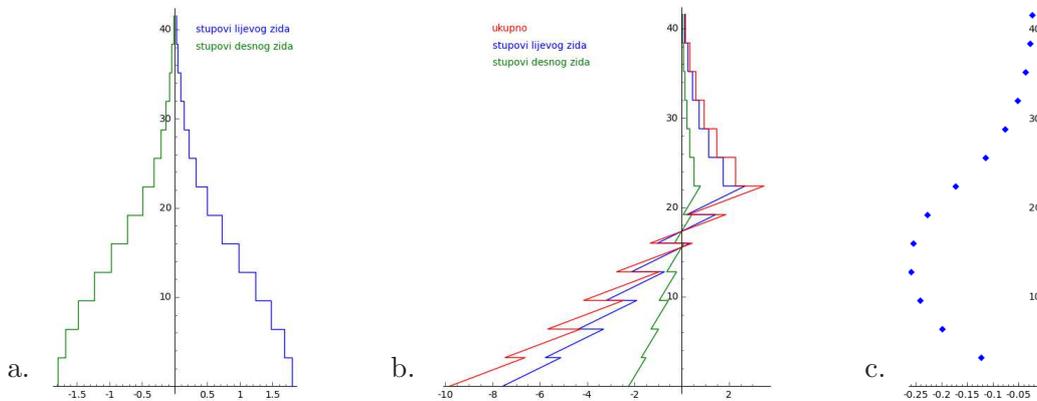
$$X_{i-1} - 2,17882 X_i + X_{i+1} = 0,00666118 (-10,24 i + 76,80).$$

Njihova su rješenja nizovi s općim članovima

$$X_{2,i} = -9,42447 \cdot 0,657193^i + 7,40734 \cdot 10^{-5} \cdot 1,52162^i,$$

$$X_{1,i} = 1,08340 \cdot 0,657193^i - 0,0192862 \cdot 1,52162^i + 0,381457 - 2,86093.$$

Dijagrami unutarnjih sila ( $N$ ,  $M$  i  $T$ ) prikazani su na slici 81.



Slika 81.

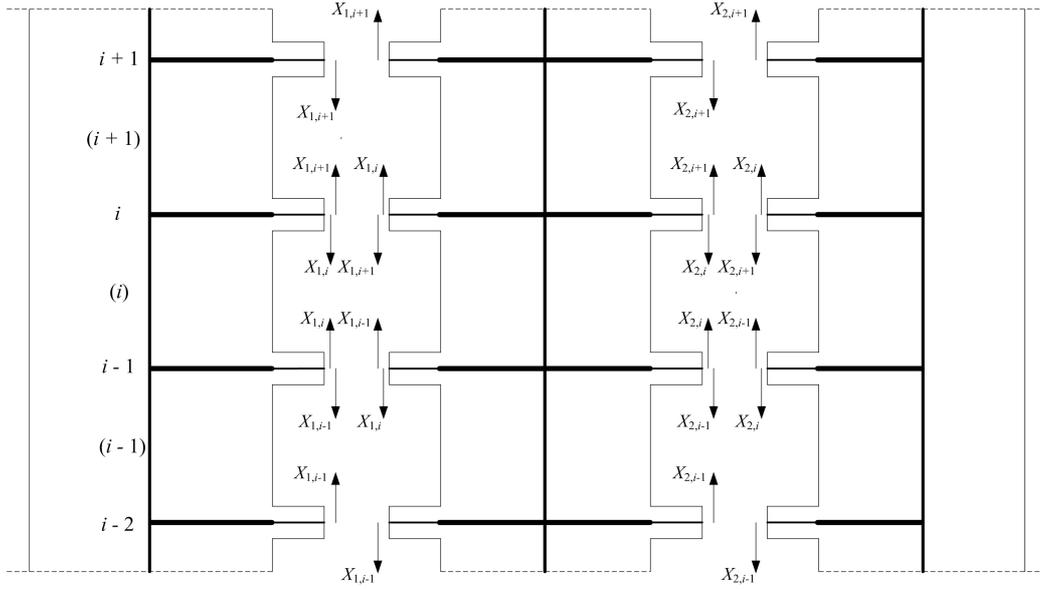
#### 4.1.2. Zid s dva niza otvora

Ima li zid  $e$  etaža i  $n$  nizova otvora, uz mehaničke pretpostavke navedene na početku prikaza broj je statički neodređenih vrijednosti  $e n$ . Sustav jednadžbi metode sila može se prevesti u sustav koji sadrži  $n$  diferencijskih jednadžbi sa  $n$  nepoznatih nizova. Uz još jednu dodatnu pretpostavku taj se sustav može razbiti u  $n$  neovisnih diferencijskih jednadžbi, tako da se proračun zidova s više nizova otvora svodi na višestruki proračun zida samo s jednim nizom. Jednostavnosti radi, u našem ćemo prikazu ograničiti na zid s dva niza otvora. Povećanje broja nizova usložnjava postupak i njegov opis, a ne donosi ništa pojmovno novo.

Za raskinute veze u prvomu i u drugom nizu otvora u kojima djeluju  $i$ -te grupe neodređenih sila (slika 82.) jednadžbe su neprekinutosti

$$\delta_{1,i;1,i-1} X_{1,i-1} + \delta_{1,i;1,i} X_{1,i} + \delta_{1,i;1,i+1} X_{1,i+1} + \delta_{1,i;2,i} X_{2,i} + \delta_{1,i;0} = 0, \quad (149)$$

$$\delta_{2,i;2,i-1} X_{2,i-1} + \delta_{2,i;2,i} X_{2,i} + \delta_{2,i;2,i+1} X_{2,i+1} + \delta_{2,i;1,i} X_{1,i} + \delta_{2,i;0} = 0. \quad (150)$$



Slika 82.

Koeficijenti popustljivosti  $\delta_{I,i;J,j}$  su, kinematički, linearne kombinacije orijentiranih duljina relativnih pomaka u raskidima u gredama  $I$ -tog niza u kojima djeluju sile  $i$ -te grupe, prouzročeni djelovanjima sila osnovnih grupa  $j$  u nizu  $J$ , a slobodni su članovi  $\delta_{I,i;0}$  linearne kombinacije orijentiranih duljina relativnih pomaka u tim raskidima, prouzročeni djelovanjem vanjskog opterećenja.

Pretpostavit ćemo da su visine svih etaža jednake, da se moduli elastičnosti i posmika, kao ni debljine zidova ne mijenjaju po visini te da su u svakom nizu jednaki rasponi i poprečni presjeci svih greda. Budući da koeficijenti popustljivosti tada neće ovisiti o  $i$ , indeksnu noćnu moru možemo ponešto ublažiti uvođenjem oznaka  $\bar{\delta}_{I;J} = \delta_{I,i;J,i}$  i  $\bar{\bar{\delta}}_{I;I} = \delta_{I,i;I,i-1} = \delta_{I,i;I,i+1}$ :

$$\bar{\bar{\delta}}_{1;1} X_{1,i-1} + \bar{\delta}_{1;1} X_{1,i} + \bar{\delta}_{1;1} X_{1,i+1} + \bar{\delta}_{1;2} X_{2,i} + \delta_{1,i;0} = 0, \quad (151)$$

$$\bar{\bar{\delta}}_{2;2} X_{2,i-1} + \bar{\delta}_{2;2} X_{2,i} + \bar{\delta}_{2;2} X_{2,i+1} + \bar{\delta}_{2;1} X_{1,i} + \delta_{2,i;0} = 0. \quad (152)$$

Te dvije jednadžbe tvore sustav diferencijskih jednadžbi za nizove  $\{X_{1,i}\}_{i=0}^{\infty}$  i  $\{X_{2,i}\}_{i=0}^{\infty}$ .

U  $i$ -toj se jednadžbi neprekinutosti jednoga niza otvora osim neodređenih vrijednosti toga niza pojavljuje, kao posljedica lokalizacije utjecaja neodređenih djelovanja njihovim grupiranjem, samo još  $i$ -ta neodređena vrijednost drugog niza. Uvedemo li omjere

$$\eta_i = \frac{X_{2,i}}{X_{1,i}} \quad (153)$$

jednadžbe neprekinutosti jednoga niza sadržavat će, naizgled, samo neodređene vrijednosti istog tog niza:

$$\bar{\bar{\delta}}_{1;1} X_{1,i-1} + [\bar{\delta}_{1;1} + \eta_i \bar{\delta}_{1;2}] X_{1,i} + \bar{\delta}_{1;1} X_{1,i+1} + \delta_{1,i;0} = 0, \quad (154)$$

$$\bar{\bar{\delta}}_{2;2} X_{2,i-1} + [\bar{\delta}_{2;2} + \bar{\delta}_{2;1}/\eta_i] X_{2,i} + \bar{\delta}_{2;2} X_{2,i+1} + \delta_{2,i;0} = 0. \quad (155)$$

Podijelimo li prvu jednadžbu sa  $\bar{\delta}_{1,1}$ , a drugu sa  $\bar{\delta}_{2,2}$ , dobit ćemo

$$X_{1,i-1} - \alpha_{1,i} X_{1,i} + X_{1,i+1} = \omega_1 \Phi_i, \quad (156)$$

$$X_{2,i-1} - \alpha_{2,i} X_{2,i} + X_{2,i+1} = \omega_2 \Phi_i, \quad (157)$$

pri čemu su

$$\alpha_{1,i} = -\frac{\bar{\delta}_{1,1} + \eta_i \bar{\delta}_{1,2}}{\bar{\delta}_{1,1}}, \quad \alpha_{2,i} = -\frac{\bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1}/\eta_i}{\bar{\delta}_{2,2}}, \quad (158)$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{\bar{\delta}_{1,1}} \frac{2\ell_1}{EI_z}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\bar{\delta}_{2,2}} \frac{2\ell_2}{EI_z}. \quad (159)$$

Jednadžbe (156) i (157) možemo neovisno rješavati samo ako pretpostavimo omjere  $\eta_i$ . A uz to, to nisu jednadžbe s konstantnim koeficijentima, jer omjeri  $\eta_i$  ovise o  $i$ . Pokažat ćemo da uz dodatnu pretpostavku da po tri uzastopna člana nizova  $\{X_{J,i}\}_{i=0}^{\infty}$  leže na pravcu — točnije, da točke  $(i-1, X_{J,i-1})$ ,  $(i, X_{J,i})$  i  $(i+1, X_{J,i+1})$  leže na pravcu — omjer  $X_{2,i}/X_{1,i}$  postaje konstantnim i da se, štoviše, može unaprijed izračunati, jer ovisi samo o geometrijskim karakteristikama zida. Iz pretpostavke o kolinearnosti slijedi da je  $X_{J,i}$  srednja vrijednost vrijednosti  $X_{J,i-1}$  i  $X_{J,i+1}$ , pa je

$$X_{J,i-1} + X_{J,i+1} = 2X_{J,i}.$$

Time jednadžbe (156) i (157) prelaze u

$$(2 - \alpha_{J,i}) X_{J,i} = \omega_J \Phi_i,$$

tako da su

$$X_{J,i} = \frac{\omega_J}{2 - \alpha_{J,i}} \Phi_i.$$

Uvrštavanje u izraz (153) za  $\eta_i$  daje

$$\eta_i = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{2 - \alpha_{1,i}}{2 - \alpha_{2,i}}$$

te, uz (158) i (159),

$$\eta_i = \frac{\ell_2}{\ell_1} \frac{\bar{\delta}_{1,1} + \eta_i \bar{\delta}_{1,2} + 2\bar{\delta}_{1,1}}{\bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1}/\eta_i + 2\bar{\delta}_{2,2}}.$$

Riješimo li tu jednadžbu po  $\eta_i$ , dobivamo

$$\eta_i = \frac{\bar{\delta}_{2,1} \ell_1 - (\bar{\delta}_{1,1} + 2\bar{\delta}_{1,1}) \ell_2}{\bar{\delta}_{1,2} \ell_2 - (\bar{\delta}_{2,2} + 2\bar{\delta}_{2,2}) \ell_1}.$$

Budući da koeficijenti fleksibilnosti ovise samo o geometrijskim i materijalnim karakteristikama koje se po visini zida ne mijenjaju, umjesto  $\eta_i$  možemo pisati samo  $\eta$ , a uvrstimo li izraze za koeficijente fleksibilnosti, dobit ćemo

$$\eta = \frac{A_1(\ell_1 + \ell_2) + A_2 \ell_2}{A_2 \ell_1 + A_3(\ell_1 + \ell_2)} \frac{A_3}{A_1}, \quad (160)$$

pa izrazi (158) prelaze u

$$\alpha_1 = -\frac{\bar{\delta}_{1;1} + \eta \bar{\delta}_{1;2}}{\bar{\delta}_{1;1}} \quad \text{i} \quad \alpha_2 = -\frac{\bar{\delta}_{2;2} + \bar{\delta}_{2;1}/\eta}{\bar{\delta}_{2;2}}, \quad (161)$$

a diferencijske jednadžbe (156) i (157) postaju međusobno neovisnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima

$$X_{1,i-1} - \alpha_1 X_{1,i} + X_{1,i+1} = \omega_1 \Phi_i, \quad (162)$$

$$X_{2,i-1} - \alpha_2 X_{2,i} + X_{2,i+1} = \omega_2 \Phi_i, \quad (163)$$

Vrijednosti su uzdužnih sila u stupovima lijevoga, srednjeg i desnog posmičnog zida

$$N_{1,i} = -X_{1,i}, \quad N_{2,i} = X_{1,i} - X_{2,i} \quad \text{i} \quad N_{3,i} = X_{2,i}. \quad (164)$$

Vrijednost ukupnoga momenta u presjeku  $z$  polja  $i$  izračunava se prema izrazu

$$M_i(x) = M^0(x) - 2\ell_1 X_{1,i} - 2\ell_2 X_{2,i}. \quad (165)$$

Vrijednosti su poprečnih sila u gredama lijevoga i desnog niza

$$T_{1,i} = X_{1,i} - X_{1,i+1} \quad \text{i} \quad T_{2,i} = X_{2,i} - X_{2,i+1}. \quad (166)$$

**Primjer 5.** Zid sa šesnaest etaža opterećen je jediničnom silom u osi najgornje grede. Neka su  $h = 3$  m,  $2a_1 = 5$  m,  $2a_2 = 6$  m,  $2a_3 = 4$  m,  $2b_1 = 2b_2 = 2$  m,  $v = 0,6$  m,  $t = 1$  m,  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> i  $\nu = 0$ .

Za zadane je geometrijske veličine  $\eta = 0,889320$ . Koeficijente  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  izračunavamo prema izrazima (161) i (159), za što treba prethodno izračunati koeficijente  $\bar{\delta}_{1;1}$ ,  $\bar{\delta}_{2;2}$ ,  $\bar{\delta}_{1;2} = \bar{\delta}_{2;1}$ ,  $\bar{\delta}_{1;1}$  i  $\bar{\delta}_{2;2}$ . Diferencijske su jednadžbe za lijevi i desni niz

$$X_{1,i-1} - 2,21772 X_{1,i} + X_{1,i+1} = 0,00493421 (-3^2 i + 16,5 \cdot 3^2),$$

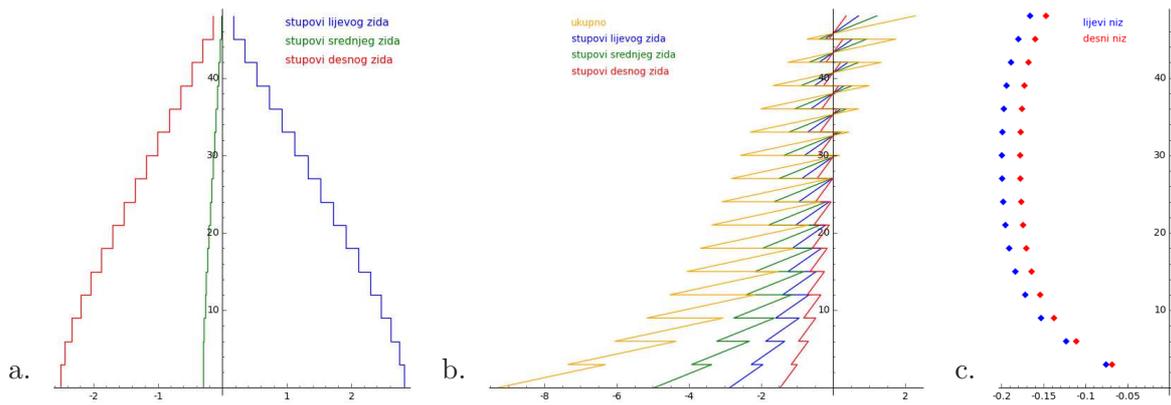
$$X_{2,i-1} - 2,22850 X_{2,i} + X_{2,i+1} = 0,00460526 (-3^2 i + 16,5 \cdot 3^2).$$

Rješavanjem karakterističnih jednadžbi, izračunavanjem koeficijenata u posebnim rješenjima i rješavanjem dvaju sustava jednadžbi kojima su određene integracijske konstante  $C_{1,1}$ ,  $C_{1,2}$  i  $C_{2,1}$ ,  $C_{2,2}$  dobivamo nizove opći članovi kojih su

$$X_{1,i} = 0,550790 \cdot 0,629724^i - 3,93541 \cdot 10^{-5} \cdot 1,58800^i + 0,203967 i - 3,36546,$$

$$X_{2,i} = 0,480809 \cdot 0,622772^i - 2,89679 \cdot 10^{-5} \cdot 1,60572^i + 0,181392 i - 2,99297.$$

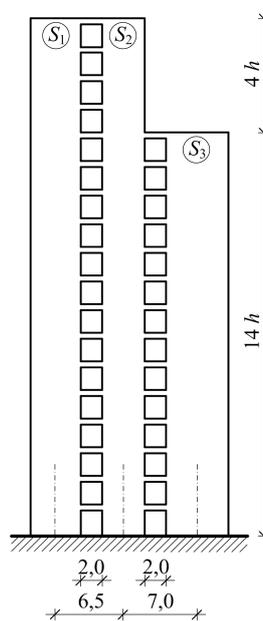
Vrijednosti uzdužnih sila u stupovima posmičnih zidova izračunavamo prema izrazima (164), a vrijednosti ukupnih momenata savijanja u stupovima prema izrazu (165); te momente potom na pojedine zidove dijelimo primjenom izraza (97). Vrijednosti poprečnih sila u gredama lijevoga i desnog niza dane su izrazima (166). Dijagrami unutarnjih sila ( $N$ ,  $M$ ,  $T$ ) prikazani su na slici 83.



Slika 83.

### 4.1.3. Zid promjenjive visine

Ako su neki dijelovi zida viši od drugih, zid se po visini dijeli u onoliko područja koliko je skokova u visinama, a to znači da i svaki niz otvora, koji zasebice rješavamo, treba podijeliti u odgovarajući broj područja. Postupak rješavanja podijeljenih nizova sličan je postupku rješavanja zida opterećenoga silom koja djeluje po osi  $k$ -te grede — različita područja opisana su različitim diferencijskim jednadžbama, pa će i rješenja za različita područja biti različiti nizovi, ali će se u „spoju” dvaju područja pojaviti dodatni rubni uvjeti.



Slika 84.

Uzmimo, kao u primjeru sa slike 84., da lijevi niz otvora ima  $n$ , a desni  $k$  etaža, pri čemu je  $k < n$ . Za desni su niz jednadžbe neprekinutosti

$$\bar{\delta}_{2;2} X_{2,i-1} + [\bar{\delta}_{2;2} + \bar{\delta}_{2;1}/\eta] X_{2,i} + \bar{\delta}_{2;2} X_{2,i+1} = -\delta_{2,i;0}, \quad (167)$$

pa je diferencijska jednadžba, dobivena dijeljenjem sa  $\bar{\delta}_{2;2}$ ,

$$X_{2,i-1} - \alpha_2 X_{2,i} + X_{2,i+1} = \omega_2 \Phi_i, \quad (168)$$

a rubni su uvjeti na dnu i na vrhu niza

$$(1 - \alpha_2) X_{2,1} + X_{2,2} = \omega_2 \Phi_1, \quad (169)$$

$$X_{2,k-1} - \alpha_2 X_{2,k} = \omega_2 \Phi_k. \quad (170)$$

Opće je rješenje jednadžbe (168)

$$\{X_{2,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_{2,1} r_{2,1}^i + C_{2,2} r_{2,2}^i + X_{2,i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (171)$$

Za opterećenje koncentriranom silom koja djeluje po osi najgornje grede lijevoga, višeg niza posebno će rješenje biti oblika

$$\{X_{2,i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty} = \{a_{2,n} i + b_{2,n}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (172)$$

Uvrstimo li odgovarajuće članove niza (171) u rubne uvjete, dobit ćemo, nakon izvodâ koji su jednaki izvodima za zid s jednim nizom otvora, sustav dviju jednadžbi s nepoznicama  $C_{2,1}$  i  $C_{2,2}$ :

$$(1 - r_{2,2}) r_{2,1} C_{2,1} + (1 - r_{2,1}) r_{2,2} C_{2,2} = X_{2,0}^{(p)} - X_{2,1}^{(p)}, \quad (173)$$

$$r_{2,1}^{n+1} C_{2,1} + r_{2,2}^{n+1} C_{2,2} = -X_{2,k+1}^{(p)}. \quad (174)$$

Lijevi niz otvora gredom  $k$ -te etaže dijelimo u dva područja. Jednadžbe su neprekinutosti za raskinute veze u gornjem području, u kojima djeluju sile grupa  $i = k+1, \dots, n$ ,

$$\bar{\delta}_{1;1} X_{1,i-1} + \bar{\delta}_{(1,2);1} X_{1,i} + \bar{\delta}_{1;1} X_{1,i+1} = -\delta_{(1,2);i;0}, \quad (175)$$

dok su za veze u donjem području, u kojima djeluju sile grupa  $i = 1, \dots, k$ , jednadžbe neprekinutosti

$$\bar{\delta}_{1;1} X_{1,i-1} + \bar{\delta}_{(1,1);1} X_{1,i} + \bar{\delta}_{1;1} X_{1,i+1} + \bar{\delta}_{(1,1);2} X_{2,i} = -\delta_{(1,1);i;0},$$

odnosno, uvođenjem omjera  $\eta$ ,

$$\bar{\delta}_{1;1} X_{1,i-1} + [\bar{\delta}_{(1,1);1} + \eta \bar{\delta}_{(1,1);2}] X_{1,i} + \bar{\delta}_{1;1} X_{1,i+1} = -\delta_{(1,1);i;0}, \quad (176)$$

pri čemu  $(1, K)$  u indeksima označava  $K$ -to područje (prvo/donje ili drugo/gornje) prvoga niza otvora. Dijeljenje sa  $\bar{\delta}_{1;1}$  daje diferencijske jednadžbe

$$X_{1,i-1} - \alpha_{(1,2)} X_{1,i} + X_{1,i+1} = \omega_{(1,2)} \Phi_i, \quad (177)$$

$$X_{1,i-1} - \alpha_{(1,1)} X_{1,i} + X_{1,i+1} = \omega_{(1,1)} \Phi_i. \quad (178)$$

Njihova su opća rješenja

$$\{X_{(1,2);i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_{1,1} r_{(1,2),1}^i + C_{1,2} r_{(1,2),2}^i + X_{(1,2);i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}, \quad (179)$$

$$\{X_{(1,1);i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_{1,3} r_{(1,1),1}^i + C_{1,4} r_{(1,1),2}^i + X_{(1,1);i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}, \quad (180)$$

pri čemu su, za opterećenje silom u osi najgornje grede,

$$\{X_{(1,2),i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty} = \{a_{(1,2),n} i + b_{(1,2),n}\}_{i=0}^{\infty}, \quad (181)$$

$$\{X_{(1,1),i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty} = \{a_{(1,1),n} i + b_{(1,1),n}\}_{i=0}^{\infty}, \quad (182)$$

Na vrhu je zida rubni uvjet

$$X_{(1,2),n-1} - \alpha_{(1,2)} X_{(1,2),n} = \omega_{(1,2)} \Phi_i; \quad (183)$$

uvrstimo li odgovarajuće članove niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , dobit ćemo

$$r_{(1,2),1}^{n+1} C_{1,1} + r_{(1,2),2}^{n+1} C_{1,2} = -X_{(1,2),n+1}^{(p)}. \quad (184)$$

Najdonje je polje gornjega područja polje  $k+1$ . Diferencijska jednadžba (177) za  $i = k+1$  prelazi u jednadžbu

$$X_{1,k} - \alpha_{(1,2)} X_{1,k+1} + X_{1,k+2} = \omega_{(1,2)} \Phi_{k+1}, \quad (185)$$

u koju ćemo za  $X_{1,k+1}$  i  $X_{1,k+2}$  uvrstiti odgovarajuće članove niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , a za  $X_{1,k}$  član niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ :

$$\begin{aligned} & [C_{1,3} r_{(1,1),1}^k + C_{1,4} r_{(1,1),2}^k + X_{(1,1),k}^{(p)}] \\ & - \alpha_{(1,2)} [C_{1,1} r_{(1,2),1}^{k+1} + C_{1,2} r_{(1,1),2}^{k+1} + X_{(1,2),k+1}^{(p)}] \\ & + [C_{1,1} r_{(1,2),1}^{k+2} + C_{1,2} r_{(1,2),2}^{k+2} + X_{(1,2),k+2}^{(p)}] = \omega_{(1,2)} \Phi_{k+1}. \end{aligned}$$

Iz sređenijega oblika

$$\begin{aligned} & (r_{(1,2),1}^2 - \alpha_{(1,2)} r_{(1,2),1}) r_{(1,2),1}^k C_{1,1} \\ & + (r_{(1,2),2}^2 - \alpha_{(1,2)} r_{(1,2),2}) r_{(1,2),2}^k C_{1,2} + r_{(1,1),1}^k C_{1,3} + r_{(1,1),2}^k C_{1,4} \\ & = \omega_{(1,2)} \Phi_{k+1} + \alpha_{(1,2)} X_{(1,2),k+1}^{(p)} - X_{(1,2),k+2}^{(p)} - X_{(1,1),k}^{(p)} \end{aligned}$$

uz

$$\begin{aligned} & r_{(1,2),1}^2 - \alpha_{(1,2)} r_{(1,2),1} = -1, \\ & r_{(1,2),2}^2 - \alpha_{(1,2)} r_{(1,2),2} = -1, \\ & \omega_{(1,2)} \Phi_{k+1} + \alpha_{(1,2)} X_{(1,2),k+1}^{(p)} - X_{(1,2),k+2}^{(p)} = X_{(1,2),k}^{(p)} \end{aligned}$$

slijedi

$$-r_{(1,2),1}^k C_{1,1} - r_{(1,2),2}^k C_{1,2} + r_{(1,1),1}^k C_{1,3} + r_{(1,1),2}^k C_{1,4} = -X_{(1,1),k}^{(p)} + X_{(1,2),k}^{(p)}. \quad (186)$$

Diferencijska jednadžba (178) za  $i = k$  (najgornje polje donjega područja) prelazi u jednadžbu

$$X_{1,k-1} - \alpha_{(1,1)} X_{1,k} + X_{1,k+1} = \omega_{(1,1)} \Phi_k. \quad (187)$$

Uvrstimo li u tu jednadžbu za  $X_{1,k-1}$  i  $X_{1,k}$  odgovarajuće članove niza  $\{X_{(1,1),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , a za  $X_{1,k+1}$  član niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , dobit ćemo na već poznati način

$$r_{(1,2),1}^{k+1} C_{1,1} + r_{(1,2),2}^{k+1} C_{1,2} - r_{(1,1),1}^{k+1} C_{1,3} - r_{(1,1),2}^{k+1} C_{1,4} = X_{(1,1),k+1}^{(p)} - X_{(1,2),k+1}^{(p)}. \quad (188)$$

I, napokon, rubni je uvjet na dnu zida

$$(1 - \alpha_{(1,1)}) X_{(1,1),1} + X_{(1,2),2} = \omega_{(1,1)} \Phi_1, \quad (189)$$

pa uvrštavanjem odgovarajućih članova niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$  dobivamo, kao i ranije,

$$(1 - r_{(1,1),2}) r_{(1,1),1} C_{1,3} + (1 - r_{(1,1),1}) r_{(1,1),2} C_{1,4} = X_{(1,1),0}^{(p)} - X_{(1,1),1}^{(p)}. \quad (190)$$

**Primjer 6.** Zid s osamnaest etaža u lijevom, višem nizu i četrnaest etaža u desnom nizu (slika 84.) opterećen je jediničnom silom u osi najgornje grede višega niza. Geometrijske su veličine  $h = 3$  m,  $2a_1 = 5$  m,  $2a_2 = 4$  m,  $2a_3 = 6$  m,  $2b_1 = 2b_2 = 2$  m,  $v = 0,6$  m i  $t = 1$  m, a neka su k tomu još  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> i  $\nu = 0,2$ .

Gornji dio lijevoga niza proračunavamo kao zid s jednim nizom otvora, pa izraz (116) daje  $\alpha_{(1,2)} = 2,20151$  i  $\omega_{(1,2)} = 0,00884916$ . Donji je dio jedan od nizova zida s dva niza otvora, pa prvo izračunavamo  $\eta = 1,07103$ , a potom, prema izrazima (161),  $\alpha_{(1,1)} = 2,18513$  za lijevi i  $\alpha_2 = 2,18615$  za desni niz. Uz to su, prema izrazu (159),  $\omega_{(1,1)} = 0,00412961$  i  $\omega_2 = 0,00444727$ . Time dobivamo tri diferencijske jednadžbe, dvije za lijevi i jednu za desni niz. Jednadžbe u stvari ne treba izrijekom napisati: rješenja karakterističnih jednadžbi pripadnih homogenih diferencijskih jednadžbi — tri para vrijednosti — dobivamo uvrštavanjem, redom,  $\alpha_{(1,1)}$ ,  $\alpha_{(1,2)}$  i  $\alpha_2$  u izraze (121), a koeficijente u posebnim rješenjima — tri para — uvrštavanjem parova  $\alpha_{(1,1)}$ ,  $\omega_{(1,1)}$  itd. u izraze (127) i (124). Četiri rubna uvjeta u lijevom nizu otvora, (183), (185), (187) i (189), daju četiri jednadžbe (184), (186), (188) i (190) sa četiri nepoznanice rješenja kojih su integracijske konstante u odredbenim izrazima dvaju nizova sadržanih u rješenju za taj niz otvora:

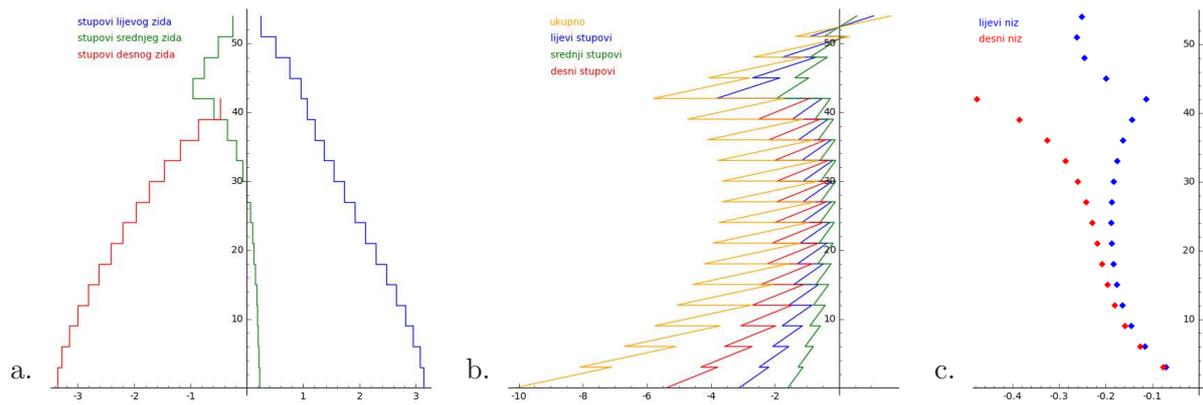
$$X_{(1,2),i} = 377,422 \cdot 0,640691^i - 5,88564 \cdot 10^{-5} \cdot 1,56081^i + 0,395237 i - 7,31188,$$

$$X_{(1,1),i} = 0,576995 \cdot 0,652452^i - 4,19094 \cdot 10^{-4} \cdot 1,53268^i + 0,200757 i - 3,71400.$$

Rješenje za desni niz otvora jedan je niz, s dvije integracijske konstante. Dva rubna uvjeta u desnom nizu, (169) i (170), daju potrebne dvije jednadžbe (173) i (174), pa je

$$X_{2,i} = 0,619200 \cdot 0,651698^i - 0,00122083 \cdot 1,53445^i + 0,215016 i - 3,97780.$$

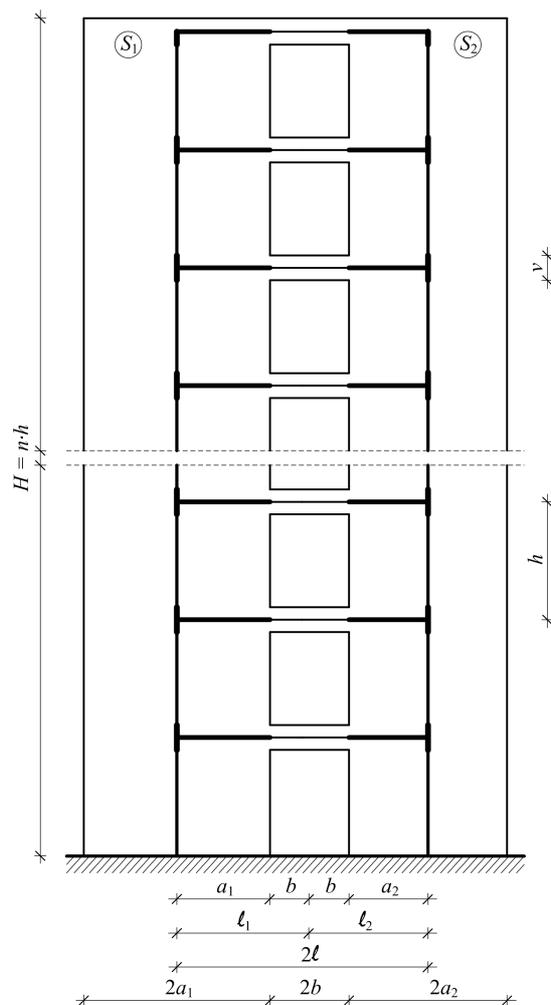
Unutarnje sile u gornjem dijelu zida — u zidu samo s jednim nizom otvora — izračunavamo prema izrazima (132), (133) i (134) u koje uvrštavamo  $X_{(1,2),15}, \dots, X_{(1,2),18}$ . U donjem dijelu zida unutarnje sile izračunavamo prema izrazima (164), (165) i (166) uvrštavajući u njih  $X_{(1,1),1}, \dots, X_{(1,1),14}$  i  $X_{2,1}, \dots, X_{2,14}$ . Dijagrami uzdužnih sila i momenata savijanja u stupovima te poprečnih sila u gredama prikazani su na slikama 85.a., b. i c.



Slika 85.

## 4.2. Metoda pomakâ

Standardna je proračunska shema zida s otvorima u metodi pomakâ prikazana na slici 86. Ta se shema obično naziva ekvivalentnim okvirom, zamjenjujućim okvirom ili

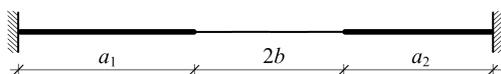


Slika 86.

okvirom sa „širokim stupovima”. Uveli su je sredinom šezdesetih godina dvadesetoga stoljeća R. W. Clough, I. P. King i E. L. Wilson [12], C. F. Candy [11] i I. A. MacLeod [45]. MacLeod je u drugoj polovini sedamdesetih godina uveo i model zida koji je dio prostorne konstrukcije [46].

#### 4.2.1. Matrica krutosti štapa

Štapni elementi kojima modeliramo grede i stupove zidova s otvorima sastavljeni su od krutih dijelova na krajevima i elastičnoga dijela između njih (slika 87.). Kruti se dijelovi pomiču i zaokreću kao kruta tijela zajedno sa čvorovima u koje su priključeni, dok se elastični dijelovi deformiraju.



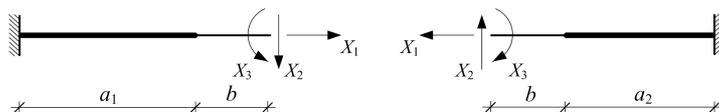
Slika 87.

Izraze za komponente matrice krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu izvodimo primjenom metode sila. Za osnovni sustav odabrane su dvije konzole dobivene raskidanjem štapa u polovištu elastičnoga dijela (slika 88.). Lako je pokazati da je točka raskida elastično težište štapa [3], tako da su od nule različiti samo koeficijenti popustljivosti  $\delta_{i,i}$ . Uz dijagrame unutarnjih sila u jediničnim stanjima, prikazane na slici 89., Vereščaginovim postupkom dobivamo

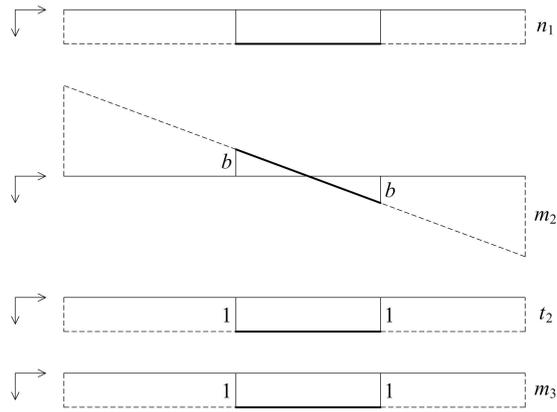
$$\begin{aligned}\delta_{1,1} &= \frac{1}{EA} (1 \cdot 2b) \cdot 1 = \frac{2b}{EA}, \\ \delta_{2,2} &= 2 \left[ \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} b^2 \right) \left( \frac{2}{3} b \right) \right] + \frac{k}{GA} (1 \cdot 2b) \cdot 1 = \frac{2b^3}{3EI} + \frac{2kb}{GA}, \\ \delta_{3,3} &= \frac{1}{EI} (1 \cdot 2b) \cdot 1 = \frac{2b}{EI}.\end{aligned}\quad (191)$$

U izrazu za koeficijent  $\delta_{2,2}$  sadržan je i doprinos poprečnih sila. Za pravokutan su poprečni presjek  $A = 12 I/v^2$  i  $k = 1,2$ , pa je, uz  $G = E/[2(1 + \nu)]$ ,

$$\delta_{2,2} = \frac{b [2b^2 + 1,2v^2 (1 + \nu)]}{3EI}.\quad (192)$$



Slika 88.



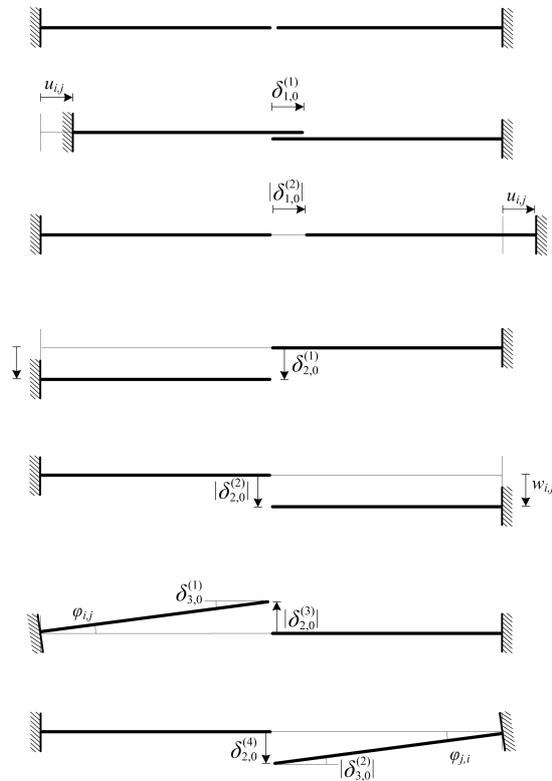
Slika 89.

Slobodni članovi jednažbi neprekinutosti izražavaju utjecaj „prisilnih” pomaka krajeva štapa; prema slici 90. su

$$\delta_{1,0} = \delta_{1,0}^{(1)} - \delta_{1,0}^{(2)} = u_{i,j} - u_{j,i},$$

$$\delta_{2,0} = \delta_{2,0}^{(1)} - \delta_{2,0}^{(2)} - \delta_{2,0}^{(3)} - \delta_{2,0}^{(4)} = w_{i,j} - w_{j,i} - \varphi_{i,j} \ell_1 - \varphi_{j,i} \ell_2,$$

$$\delta_{3,0} = \delta_{3,0}^{(1)} - \delta_{3,0}^{(2)} = \varphi_{i,j} - \varphi_{j,i},$$



Slika 90.

ili, u matricnom obliku,

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \delta_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\ell_1 & 0 & -1 & -\ell_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix}$$

i, sažetije,

$$\Delta_0 = \mathbf{P} \mathbf{u}; \quad (193)$$

matricu  $\mathbf{P}$  nazivamo prijenosnom matricom.

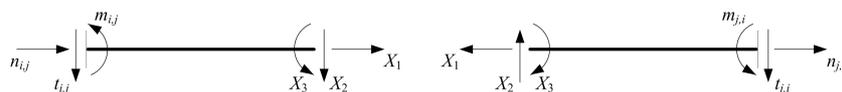
Budući da su  $\delta_{i,j} = 0$  za  $i \neq j$ , matrica je sustava jednadžbi neprekinutosti

$$\mathbf{D} \mathbf{X} + \Delta_0 = \mathbf{0} \quad (194)$$

dijagonalna, pa je i u rješenju

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \Delta_0 \quad (195)$$

matrica  $\mathbf{D}^{-1}$  dijagonalna, s komponentama  $\delta_{i,i}^{\ddagger} = 1/\delta_{i,i} = \delta_{i,i}^{-1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .



Slika 91.

Veze između izračunanih vrijednosti  $X_i$  neodređenih djelovanja i vrijednosti (pooćenih) sila na krajevima štapa daju jednadžbe ravnoteže lijevoga i desnog dijela štapa (slika 91.). Za lijevi su dio

$$\begin{aligned} n_{i,j} + X_1 &= 0 & \implies & n_{i,j} = -X_1, \\ t_{i,j} + X_2 &= 0 & \implies & t_{i,j} = -X_2, \\ m_{i,j} + X_3 - X_2 \ell_1 &= 0 & \implies & m_{i,j} = X_2 \ell_1 - X_3, \end{aligned}$$

dok su za desni dio

$$\begin{aligned} -X_1 + n_{j,i} X_1 &= 0 & \implies & n_{j,i} = X_1, \\ -X_2 + t_{j,i} &= 0 & \implies & t_{j,i} = X_2, \\ -X_3 - X_2 \ell_2 + m_{j,i} &= 0 & \implies & m_{j,i} = X_2 \ell_2 + X_3, \end{aligned}$$

ili, matricno, za oba dijela,

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\ell_1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\ell_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix},$$

odnosno, matričnom stenografijom,

$$\mathbf{f} = -\mathbf{P}^T \mathbf{X}. \quad (196)$$

Uvrštavanjem izraza (195) za  $\mathbf{X}$  i, potom, izraza (193) za  $\Delta_0$ , dobivamo

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{u}; \quad (197)$$

matrica

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1}^{-1} & 0 & 0 & -\delta_{1,1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2,2}^{-1} & -\delta_{2,2}^{-1} \ell_1 & 0 & -\delta_{2,2}^{-1} & -\delta_{2,2}^{-1} \ell_2 \\ 0 & -\delta_{2,2}^{-1} \ell_1 & \delta_{2,2}^{-1} \ell_1^2 + \delta_{3,3}^{-1} & 0 & \delta_{2,2}^{-1} \ell_1 & \delta_{2,2}^{-1} \ell_1 \ell_2 - \delta_{3,3}^{-1} \\ -\delta_{1,1}^{-1} & 0 & 0 & \delta_{1,1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{2,2}^{-1} & \delta_{2,2}^{-1} \ell_1 & 0 & \delta_{2,2}^{-1} & \delta_{2,2}^{-1} \ell_2 \\ 0 & -\delta_{2,2}^{-1} \ell_2 & \delta_{2,2}^{-1} \ell_1 \ell_2 - \delta_{3,3}^{-1} & 0 & \delta_{2,2}^{-1} \ell_2 & \delta_{2,2}^{-1} \ell_2^2 + \delta_{3,3}^{-1} \end{bmatrix} \quad (198)$$

tražena je matrica krutosti štapa.

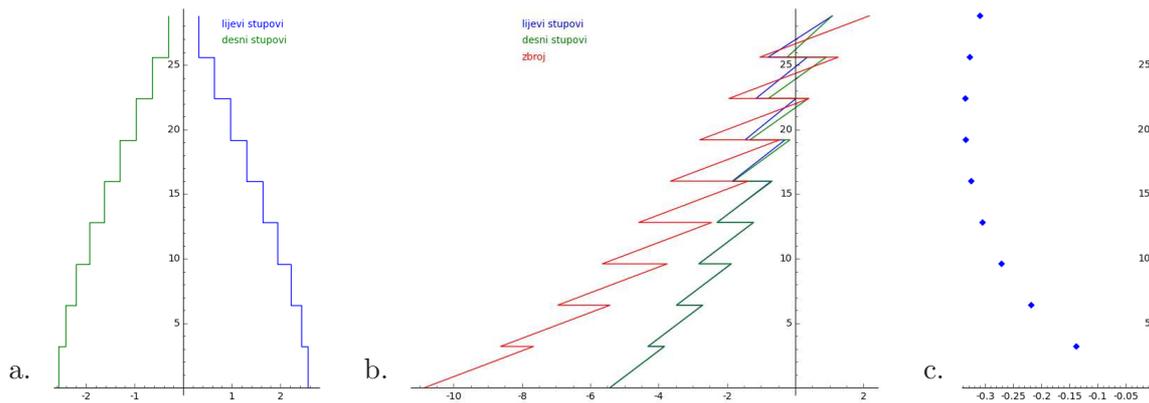
S izvedenom se matricom krutosti daljnji proračun provodi jednakim postupkom kao za „obične” okvirne konstrukcije. (Trebalo ipak napomenuti da smo se u ovom radu ograničili na zidove s otvorima u pravilnim vertikalnim nizovima, koji su rješivi postupkom V. Simovića. Kod nepravilnijega se rasporeda otvora može dogoditi da su neki čvorovi spojeni štapovima krutima po cijeloj duljini. U tom slučaju treba odabrati vodeće i prateće čvorove te provesti kinematičku kondenzaciju [3].)

#### 4.2.2. Usporedbe

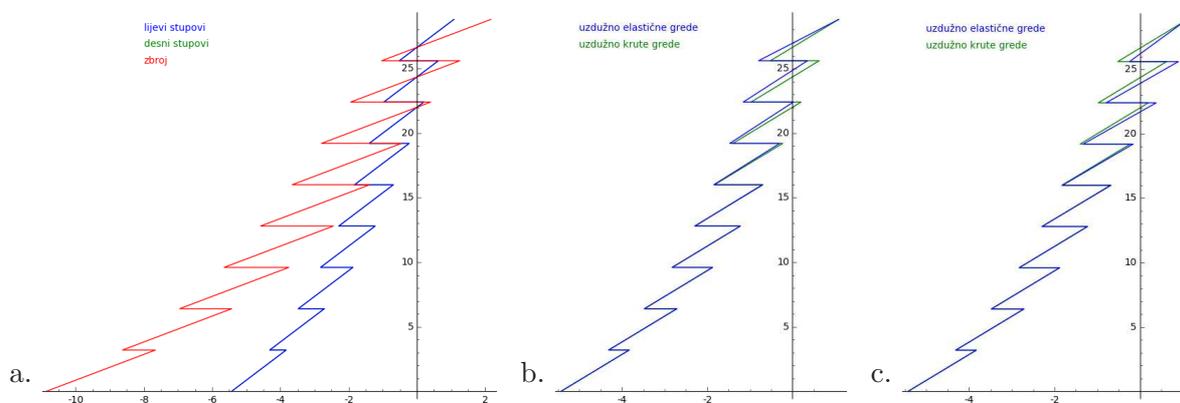
**Primjer 1., ponovo.** Vratit ćemo se na primjer simetričnoga deveteroetažnog zida s jednim nizom otvora, koji smo ranije riješili postupkom V. Simovića.

Na slikama 92.a., b, i c. prikazani su dijagrami uzdužnih sila i momenata savijanja u stupovima te poprečnih sila u gredama. Iako su opći tokovi dijagrama slični tokovima odgovarajućih dijagrama sa slike 77.b., na slici 92.b. možemo uočiti da dijagrami momenata savijanja u stupovima lijevoga i desnog posmičnog zida sada nisu međusobno jednaki. Posljedica je to uzimanja u obzir uzdužne elastičnosti spojnih greda. Povećamo li uzdužne krutosti greda množenjem razmjerno velikim brojem, takozvanim kaznenim koeficijentom, kojim aproksimiramo neizmjereno veliku uzdužnu krutost (prava se neizmjereno velika krutost može ostvariti provođenjem kinematičke kondenzacije), dijagrami momenata savijanja u lijevima i desnim stupovima će se, u granicama točnosti proračuna, preklopiti (slika 93.a.). Iako se pri promjeni uzdužne krutosti greda vrijednosti momenata u stupovima mijenjaju (slike 93.b. i c.), njihov je zbroj u pojedinim horizontalnim presjecima kroz oba stupa konstantan.

Podudaranje rezultata dobivenih proračunom postupkom V. Simovića i proračunom metodom pomaka ostvarit ćemo ako, uz aproksimaciju neizmjereno velike uzdužne krutosti

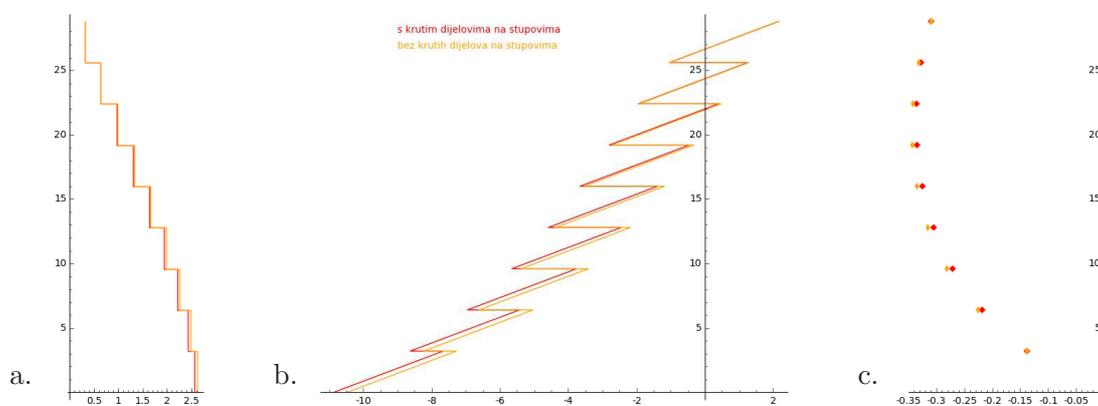


Slika 92.



Slika 93.

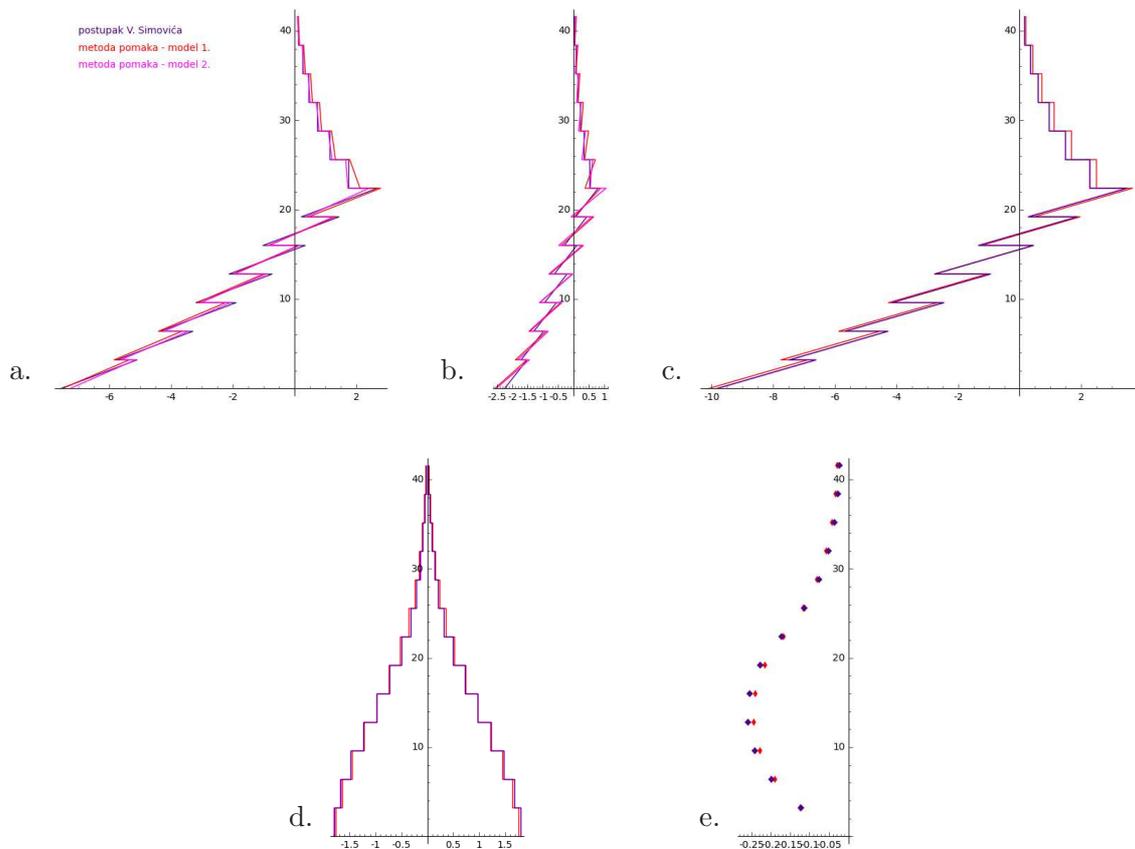
greda, stupove posmičnih zidova modeliramo štapnim elementima bez krutih dijelova na krajevima, to jest, ako se s proračunske sheme sa slike 86. vratimo na shemu sa slike 71.; na slici 94. preklapljeni su dijagrami unutarnjih sila izračunani za te dvije sheme. S druge strane, kruti dijelovi na krajevima stupova mogu se lako, kao varijacija na temu, uklopiti



Slika 94.

u postupak V. Simovića: u izraz (101) za koeficijent  $\delta_{i,i} = \bar{\delta}$  umjesto visine etaža  $h$  treba uvrstiti visinu elastičnih dijelova stupova  $h - 2(v/2) = h - v$ , a za ploštine  $\Phi_i$  treba uzeti ploštine pripadnih dijelova površine dijagrama  $M^0$ ; primjerice, za dijagram sa slike 76. bit će  $\Phi_i = -h(h-v)i + (n+1/2)h(h-v)$ .

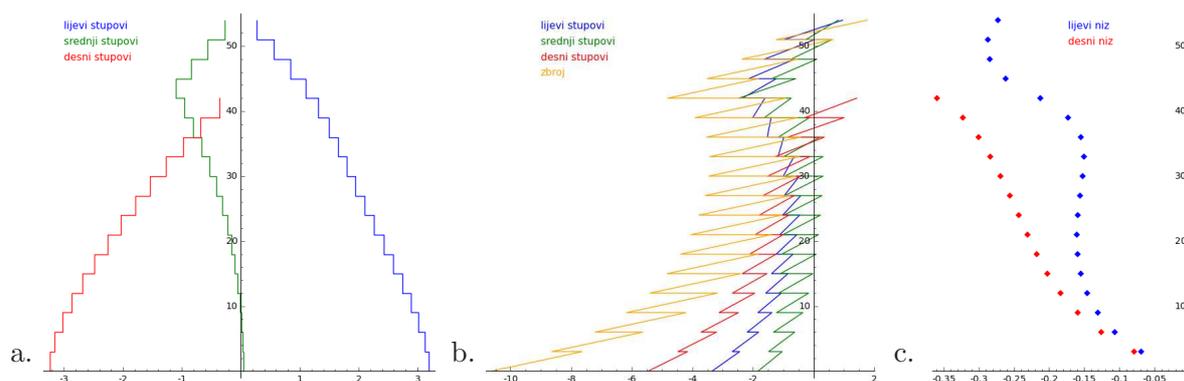
**Primjer 4., ponovo.** Rezultati proračuna nesimetričnoga zida s trinaest etaža opterećenog u razini sedme grede postupkom V. Simovića uspoređeni su s rezultatima proračuna metodom pomakâ po standardnoj proračunskoj shemi sa slike 86. uvažavajući uzdužnu elastičnost greda (model 1.) i po proračunskoj shemi sa slike 71. uz povećanje uzdužne krutosti greda (model 2.). Na slici 95. možemo vidjeti da se dijagrami ukupnih momenata savijanja u stupovima (c.), uzdužnih sila u stupovima (d.) i poprečnih sila u gredama (e.) dobiveni proračunima po postupku V. Simovića i metodom pomakâ za model 2. poklapaju, ali da u dijagramima momenata savijanja u stupovima lijevoga i desnog zida (a. i b.) postoje stanovita, ali ipak ne značajna odstupanja — jedna je od polaznih pretpostavaka postupka V. Simovića da su progibne linije posmičnih zidova međusobno jednake, ali ta je pretpostavka u potpunosti ispunjena samo za simetrične zidove s otvorima, dok je za nesimetrične zidove ispunjena tek približno; razlike ovise o omjeru fleksijskih krutosti posmičnih zidova, a povećavaju se s povećanjem krutosti spojnih greda.



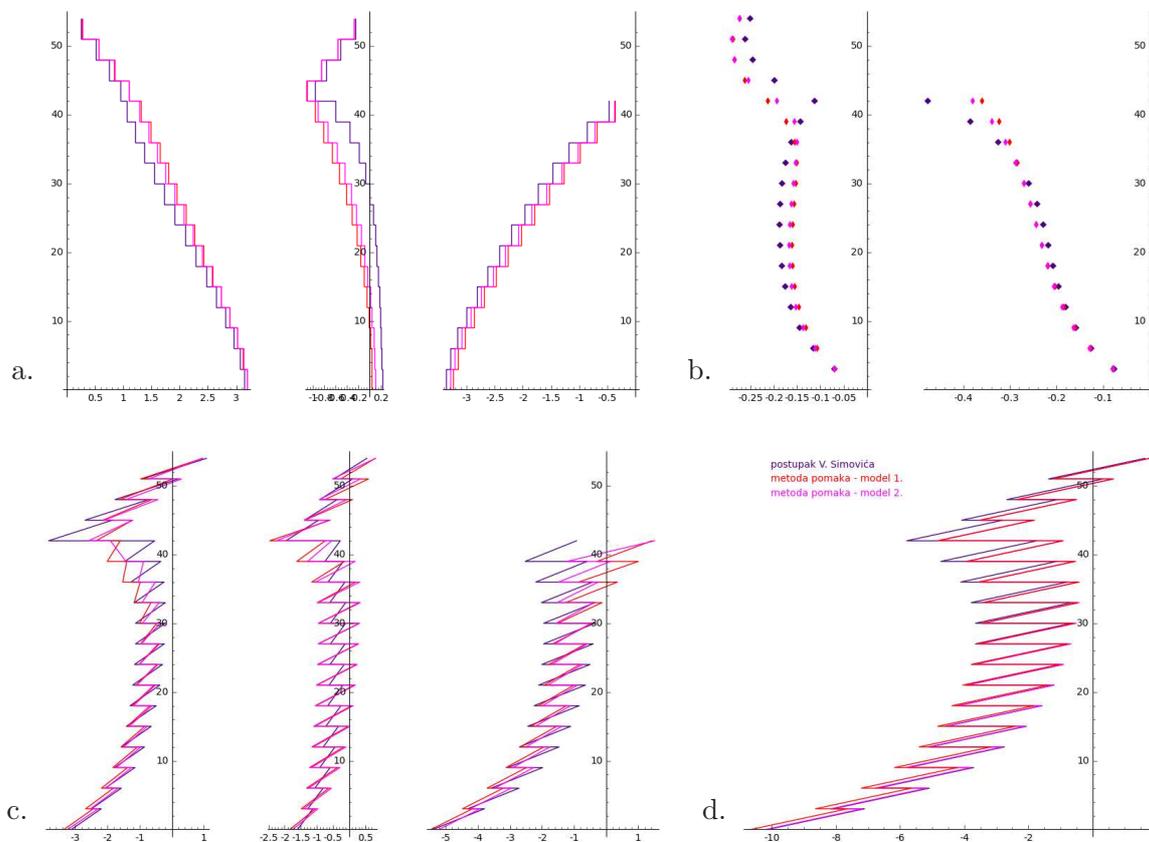
Slika 95.

Model zida za proračun metodom pomakâ ima 78 nepoznanica. Taj broj ovisi o broju etaža, ali se, za razliku od postupka V. Simovića, opseg proračuna ne mijenja povećanjem broja sila.

**Primjer 6., ponovo.** Dijagrami uzdužnih sila u stupovima, momenata savijanja u stupovima i poprečnih sila u gredama zida promjenjive visine s dva niza otvora, dobiveni proračunom standardnoga modela, prikazani su na slikama 96.a., b. i c.



Slika 96.



Slika 97.

Na slici 97. prikazana je usporedba rezultata proračuna postupkom V. Simovića i rezultata proračuna standardnoga modela (1.) i modela V. Simovića (2.): a. uzdužne sile u stupovima lijevoga, srednjeg i desnog posmičnog zida, b. poprečne sile u gredama lijevoga i desnog niza, c. momenti savijanja u stupovima lijevoga, srednjeg i desnog zida i d. ukupni momenti savijanja u stupovima. Za razliku od prethodnih primjera, mogu se uočiti značajnija odstupanja rezultata postupka V. Simovića od rezultata metode pomakâ, posebice u dijagramima poprečnih sila u gredama (b.) i dijagramima momenata savijanja u stupovima (c.) oko prijelaza s dijela zida s dva otvora na dio s jednim otvorom. Razlog je tome to što se preraspodjela momenata pri prijelazu s dva na tri posmična zida ne odvija skokovito, nego se proteže kroz nekoliko susjednih etaža — u antropomorfnoj bismo interpretaciji mogli reći da suprotni smisao vrtnje momenta na najgornjim etažama trećega stupa, dobiven proračunom metodom pomakâ, znači da se taj stup odupire preraspodjeli.

Premda razlike u rezultatima proračuna po različitim postupcima mogu katkad biti velike, ne trebaju navesti na zaključak da su građevine projektirane sedamdesetih i osamdesetih godina prošloga stoljeća manje sigurne. Armatura je prema različitim postupcima približno jednaka, a predznaci vrijednosti momenata nisu bitni za dimenzioniranje, jer se armatura postavlja simetrično. K tomu još u obzir treba uzeti da pod djelovanjem ekstremnih potresnih i vjetrovnih ubrzanja konstrukcija prije rušenja ima rezerve u plastičnom području.

## 5. Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost

K. F., PETRA GIDAK & ROMANA VRANČIĆ

### 5.1. O gipkim konstrukcijama

... the same guiding principles were always behind the design of each structure: to produce useful, meaningful, and delightful spaces for people; to be affordable and buildable; to minimize the exploitation of natural resources and do the least harm to the environment; and for the structure's very nature to become visible as a thing of beauty, as a manifestation of a deeper order of things, a more permanent light which, for just a short while, we are entrusted to keep shining in this world.

H. Berger [6]

Većina konstrukcijskih elemenata opterećenja preuzima i prenosi različitim vrstama unutarjih sila — vlačnima, tlačnim i posmičnim — i njihovim kombinacijama. To dovodi do njihovih složenih razdioba koje se mogu „vidjeti” u fotoelastičnim eksperimentima. Uže, međutim, ima zanemarivu fleksijsku krutost, nedostatnu da omogući preuzimanje većih sila okomitih na njegovu os, a ne može preuzeti ni tlačne sile, tako da pod djelovanjem opterećenja mijenja oblik kako bi se u njemu razvile uravnotežujuće vlačne sile, jednoliko raspodijeljene po površinama poprečnih presjeka. Posljedica je toga da uže bitno mijenja ravnotežnu konfiguraciju ako sile koje djeluju na njega promijene položaj, pravac ili smisao djelovanja. S druge strane, kako su sve točke poprečnoga presjeka jednako napregnute, uže je pri prijenosu sila vrlo učinkovito.

Budući da uže, samo za sebe, pri promjeni opterećenja mijenja ravnotežnu konfiguraciju, održavanje oblika gipkih konstrukcije od užadi osigurava se tako da se ona slažu u mrežu koja tvori antiklastičnu plohu (plohu negativne Gaussove zakrivljenosti). U najjednostavnijim slučajevima postoje dvije familije užadi: ulegnuta — konkavna<sup>17</sup> — užad preuzima (dominantno gravitacijsko) opterećenje, a konveksna užad, razapeta približno okomito na ugnutu, služi za stabilizaciju. Užad uz to mora biti prednapeta, jer se

<sup>17</sup> U svakodnevnom se govoru riječ *konkavan* (lat. *concavus* — šupalj) rabi sa značenjem udubljen, ulegnut, ugnut, kao (u)dolina ili kao uvala, dok je *konveksan* (lat. *convexus*) izbočen, ispupčen, trbušast, poput brežuljka. Uporaba je tih pojmova u (suvremenijoj) matematici, nažalost, upravo suprotna od svagdanje — vidjeti napomenu 26. na dnu stranice 163.

vlačne sile u cijeloj mreži moraju održati pri svim kombinacijama opterećenja; primjerice, pri djelovanju vjetra familije užadi mogu zamijeniti uloge.

Zbog svega su toga prednaponske sile i geometrijski oblik presudni za statičko (a, naravno, i dinamičko) ponašanje gipke konstrukcije od užadi — antiklastičan oblik i prednapinjanje daju joj takozvanu *geometrijsku krutost*. I obratno, zakoni statike određuju njezin oblik: geometrijski oblik neposredno odražava sustav sila u ravnoteži; proizvoljno odabrani oblik i vrijednosti prenaponskih sila teško će zadovoljiti uvjete ravnoteže. U tome je stanoviti paradoks: razvedeni, naizgled slobodni i nepravilni, gotovo organski oblici vlačnih konstrukcija od užadi (slika 98.), kao i konstrukcija od platna i konstrukcija od platna i užadi (slika 99.), određeni su u stvari strogim, neumitnim i neumoljivim zakonima statike [26, 6].



Slika 98. Frei Otto: Njemački paviljon na izložbi Expo '67 u Montrealu



Slika 99. Horst Berger: Cynthia Woods Mitchell Center for Performing Arts u Woodlandsu, 2009.

### 5.1.1. Povijesna slikovnica

Povijest gipkih vlačnih konstrukcija započinje šatorima i visećim mostovima. Šatori lovačkih nomadskih plemena, u vrijeme kada su ljudi jedva nalikovali ljudima, kada još nisu znali za obradu zemlje i kada su tek počinjali krotiti životinje, ti šatori, nakon spijla, vjerojatno su najstarija vrsta čovjekovih nastambi, prva koja je njegovih ruku djelo. Unatoč skromnu izgledu i dojmu privremenosti, pa i nedovršenosti, u oblike šatorâ —

koje uz zahtjeve nosivih sklopova uvjetuje potreba za održavanjem topline (ili, u vrućim danima pustinjaških krajeva, noćne svježine), provjetravanjem, odvođenjem dima s unutarnjeg ognjišta i sprečavanjem prokišnjavaanja zbog gomilanja vode u naborima i mlohavim ovjesima — ugrađene su tisuće godina praktičnoga iskustva i „narodne mudrosti”. Najznačajniji su njihovi oblici cilindrične jurte azijskih nomadskih naroda s krovovima u obliku stošca ili polukugle, stožasti indijanski tipiji (slika 100. lijevo) i „crni šatori” pustinjaških nomada Sjeverne Afrike i Bliskoga Istoka — prednapete konstrukcije od tkanine predindustrijskoga razdoblja (slika 100. desno).



Slika 100. Žene plemena Crno stopalo grade tipi (lijevo); „crni šator” beduina (desno)

Viseći mostovi s užadima od bambusa gradili su se u Kini prije gotovo tri tisuće godina, a oko stote godine nove ere bambus je zamijenilo kovano željezo, omogućujući mnogo veće raspone. U Europi je kovano željezo ponovo otkriveno početkom devetnaestoga stoljeća (slika 101. gore lijevo); krajem stoljeća zamjenjuje ga čelik, te viseći mostovi dosižu rekordne raspone (slika 101. gore desno i dolje).

Čelične kabele u konstrukcije krovova velikih raspona uveli su godine 1953. arhitekt Matthew Nowicki i inženjer Fred Severud krovnom plohom Arene Dorton u Raleighu. Ploha je sedlastoga oblika, s dvama međusobno okomitim nizovima kabela, konkavnim i konveksnim, koji se međusobno prednapinju i stabiliziraju; tako nastala mreža prekrivena je čeličnim limovima (slika 102.). I ostali krovovi s mrežama užadi iz tog razdoblja prekriveni su krutim pokrovom; najpoznatiji među njima vjerojatno je krov klizališta za hokej Sveučilišta Yale finskoga arhitekta Eera Saarinenena iz 1958. godine s dvije vitopere plohe prekrivene drvenim pločama (slika 103.).

Moglo bi se reći da je zanimanje „školovanih inženjera” za šatore začeo Frei Otto jednostavnim i naizgled skromnim glazbenim paviljonom koji je na Saveznoj vrtnoj izložbi godine 1955. podigao ispred starog dvorca u središtu Kassela (slika 104.). „Od početaka, Otto je shvatio temeljna načela ove vrste konstrukcija: da su konstrukcija i arhitektonski oblik nerazdvojni, da je gipkost snaga, a ne slabost i da gradivo na površini mora biti podatnije od elemenata koji ga nose” [6]. Kako u to vrijeme nije bilo tkanina dovoljne čvrstoće, njegovi su projekti platnenih krovova ograničeni na razmjerno skromne raspone; za glavne je nosive sklopove nad većim rasponima morao upotrijebiti mreže čelične užadi. Prva je takva konstrukcija Njemački paviljon na Svjetskoj izložbi u Montrealu 1967. godine, u kojoj je tkanina ovješena o mrežu (slika 98.). To je, međutim,



Slika 101. Thomas Telford: most Menai Strait, raspona 176 m, 1826. (gore lijevo); cestovni most Firth of Forth, raspona 1006 m, 1964. (gore desno i dolje)

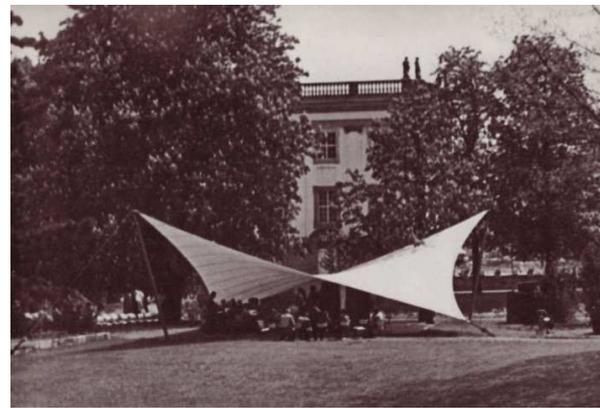


Slika 102. Nowicki & Severud: Arena Dorton u Raleighu, 1953.

omogućilo gomilanje snijega, te se konstrukcija nakon pet godina srušila u sniježnoj oluji. Najpoznatije su Ottoovo djelo krovništva sportskoga kompleksa izgrađenog za Olimpijadu u Münchenu 1972. godine (slika 105.). Ovdje je Otto, na zahtjev televizijskih kompanija, ipak odstupio od načela koje traži gipki pokrov, te su mreže prekrivene prozirnim akriličkim pločama.



Slika 103. Eero Saarinen: Yale Ingalls Rink, 1958.



Slika 104. Frei Otto: glazbeni paviljon na Bundesgartenschauu 1955. godine u Kasselu

Pojavom novih tkanina znatno većih čvrstoća (staklena vlakna i poliester prekriveni PVC-om ili teflonom) zamjetno su se povećali mogući rasponi konstrukcija od platna.

Projekti Horsta Bergera — često je on i arhitekt i projektant konstrukcije — izraz su maštovite osobnosti s osjećajem za ponašanje gipkih vlačnih konstrukcija i razumijevanjem zakona koji njima vladaju. Prikazujući rad Freia Ottoa, autor enciklopedijske natuknice [18] uvodi kovanicu *krovobraz*, od *krov* i *krajobraz* (engl. *roofscape*, od *roof* i *landscape*). Sličnim slijedom asocijacija svoju knjigu [6], u kojoj je opisao četrdesetak svojih projekata i projekata u kojima je sudjelovao kao konzultat, započinje Horst Berger: nakon izleta u Stjenjak, „svijesti ispunjene snažnim slikama prirode: nazubljenim planinskim lancima, tirkiznim jezerima koja ih zrcale, glečerima, vodopadima i planinskim brzacima...”, dolazi u novu, netom dovršenu denversku međunarodnu zračnu luku (slika 106.).

Platneno krovništvo „ljetnoga doma” hjustonskog simfonijskog orkestra u Woodlandsu, sjeverno od Houstona (slika 107.), koje se lepezasto širi od pozornice natkrivajući 2479, dok je na travnatom nasipu smješteno još nekoliko tisuća sjedišta, svojom mekoćom,

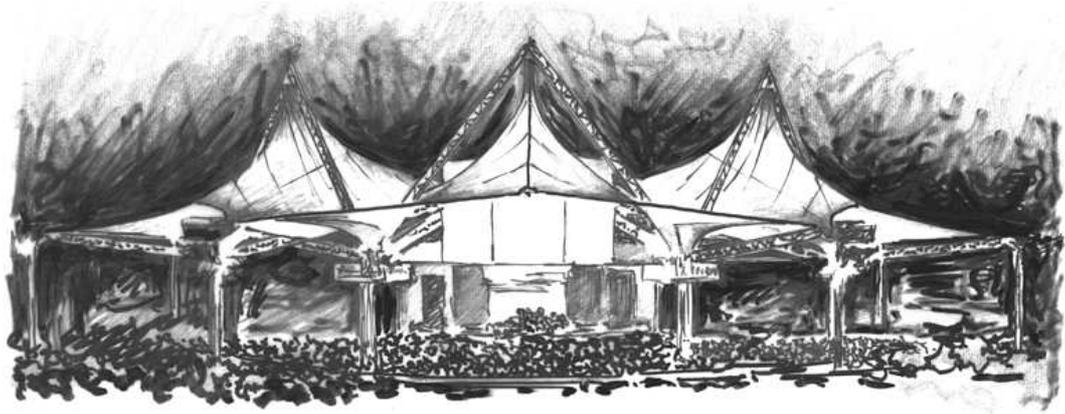


Slika 105. Frei Otto: Krovišta Olimpijskoga kompleksa u Münchenu, 1972.



Slika 106. Horst Berger: Zračna luka u Denveru, 1994.

razvedenošću i lakoćom ublažava granicu između natkrivenoga i nenatkrivenog dijela, otvorenoga i zatvorenog prostora. A zvuk, odražen od napetoga platna, raspršen na antiklastičnoj plohi, rasprostire se i prelijeva po pozornici, tako da glazbenici čuju jedni druge, i po gledalištu, dohvaćajući i udaljene njegove dijelove na nasipu; u oblikovanje su od samoga početka bili uključeni i savjetnici za zvuk i scenu. Platno omekšava i ublažava



Slika 107. Horst Berger: Cynthia Woods Mitchell Center for Performing Arts u Woodlandsu, 1990.

danje svjetlo, a noću je njegova unutarnja zrcalna površina izvor indirektno rasvjete, dok svjetlo koje kroz platno prolazi istovremeno naglašava i oživljava razvedeni oblik krova. Tako se sve, i zvuk, i vizura, i svjetlo, i ugođaj, stapaju u jedinstveni doživljaj glazbe.

U rujnu 2008. godine uragan Ike je, razarajući i pustošeći tekšašku obalu, potpuno razderao platno krovništva (slika 108.). U obnovi, koja je trajala tek nekoliko mjeseci, do ponovnoga otvorenja 1. svibnja 2009. godine, natkriveni je prostor udvostručen, tako da sada obuhvaća 6387 sjedišta, zadržavši ipak svu lepršavost i profinjenost nježnijega izvornika (slika 99.).



Slika 108. Ostaci nakon prolaza uragana Ike u rujnu 2008. godine

„Pored zadovoljenja posebne funkcije svakog projekta, moji su ciljevi bili uvijek isti: pomoći u stvaranju konstrukcija čiji će oblik biti snažan, čist, intuitivno shvatljiv i smislen, prostorâ u kojima će ljudi rado boraviti i građevina koje će ne samo najmanje oštetiti prirodni okoliš, nego i upotrijebiti darove koje priroda nudi” [6]. Njegovom reakcijom na (često) nemaštoviti i isprazni eklekticizam postmodernizma, „pristup oblikovanju kojem je osnova ukrašena kutija, a (polu)kružni luk najuzbudljiviji geometrijski element” [6], kao da su se, napokon, „otvorile nove arhitektonske perspektive koje nas vode do zgrada

svijetlih, sunčanih, vedrih, zračnih i punih optimizma, utješnih kao sve one iluzije koje nam pričaju da će u njima stanovati čovjek sljedećeg stoljeća, uglavnom zadovoljan” [38].

Podosta sramežljivo, gipke se konstrukcije pojavljuju i kao inženjerske građevine. Jedan je od razmjerno rijetkih primjera rashladni toranj nuklearne elektrane u Schmehausenu (slika 109.). Toranj je, prema projektu Jörga Schlaiha, izveden kao kabelska mreža obložena naboranim aluminijskim limovima debljine jednoga milimetra. „Ljuska” je visoka 147 metara (središnji je stup visine 180 metara), promjer je donjeg prstena 141, a promjer gornjega 91 metar. Zbog sigurnosnih, ekonomskih i političkih razloga elektrana je zatvorena 1991. godine, a toranj je srušen eksplozivom.



Slika 109. Jörg Schlaih: Rashladni toranj nuklearne elektrane u Schmehausenu, 1974.; srušen 1991.

### 5.1.2. Nalaženje oblika

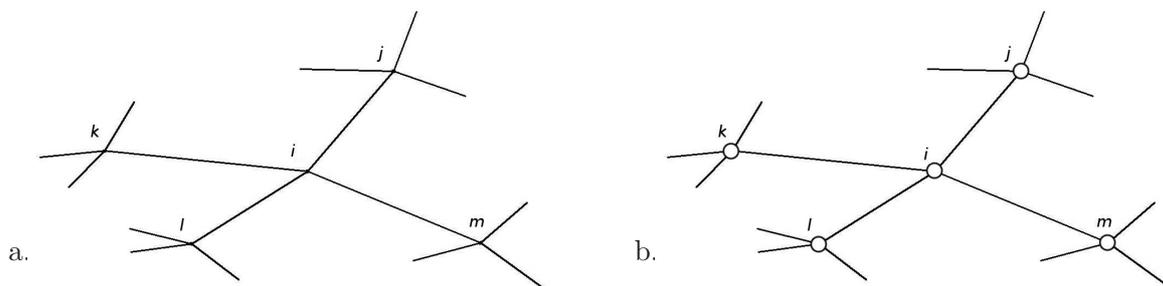
Prva je faza projektiranja gipkih prednapetih konstrukcija od platna i užadi nalaženje njihova oblika prije nanošenja korisnoga opterećenja, a najčešće i uz zanemarivanje njihove vlastite težine. Pod pojmom *nalaženja oblika* konstrukcije od užadi podrazumijevamo određivanje početne ravnotežne konfiguracije koja obuhvaća njezin geometrijski oblik i razdiobu prednaponskih sila u užadi.

Do kraja šezdesetih godina prošloga stoljeća jedini je način nalaženja oblika bila izrada fizičkih modela. Frei Otto je za svoje projekte upotrebljavao modele od tkanine i žica te opne od sapunice razapete između žičanih petlji i okvira ili gipkih niti [26]. Iako fizički modeli pružaju koristan uvid u ponašanje gipkih konstrukcija, vrlo je teško, čak i fotogrametrijskim postupcima, dovoljno točno odrediti koordinate pojedinih točaka, a da o mogućnosti točnijega određivanja vrijednosti unutarnjih sila i ne govorimo. Stoga su se vrlo rano počeli razvijati računalni modeli i metode.

## 5.2. Proračunski model mreže kabelâ

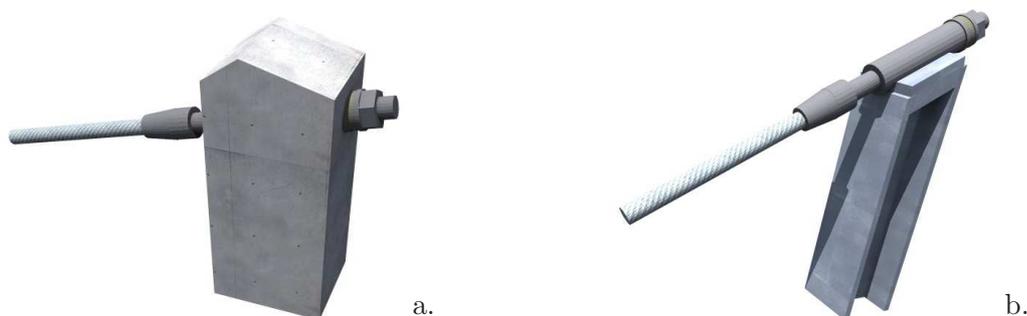
Za oblikovanje proračunskoga modela mreže pretpostavit ćemo da su kabeli potpuno savitljivi i da su bez težine. Baviti ćemo se samo fazom nalaženja oblika, pa neće biti ni vanjskoga opterećenja. Unesemo li u kabele prednaponske vlačne sile, između njih će, u

točkama u kojima se križaju, djelovati kontaktne sile. Ako kabeli jedni po drugima mogu klizati bez trenja te će sile biti normalne na dodirne plohe, a ako je klizanje spriječeno, djelomice ili potpuno, sile će imati i tangencijalne komponente. Kako su ploštine dodirnih ploha male, kontaktne ćemo sile smatrati koncentriranim. Zbog pretpostavljene potpune savitljivosti kabel opterećen samo koncentriranim silama poprima oblik ravninske ili prostorne poligonalne linije, tako da će odsječci između točaka u kojima se neki kabel križa s drugima biti ravni (slika 110.a.). Iako se zbog debljine kabelâ njihove osi u križištima mimoilaze, pretpostavit ćemo da su ta križišta geometrijske točke u kojima se osi kabela sijeku. Uz navedene pretpostavke možemo u proračunskom modelu uzeti da su odsječci kabela između križišta zglobni štapovi, a križišta zglobni čvorovi u koje su štapovi centrično priključeni (slika 110.b.). Sustav zglobno spojenih štapova može se kao proračunski model zadržati i u fazi izračunavanja ponašanja mreže pod djelovanjima raznih opterećenja, ako ta opterećenja prikažemo koncentriranim silama u čvorovima.



Slika 110.

Osim unutarnjih čvorova u kojima se kabeli križaju i čvorova u kojima su unutarnji kabeli spojeni s rubnima, mreža ima i ležajne čvorove u kojima su kabeli spojeni s „krutim” rubnim i, rjeđe, unutarnjim linijskim i točkastim osloncima (na primjer, slika 111.); u proračunskom su modelu i ti čvorovi zglobni. Pod pojmom „krutih” oslonaca podrazumijevamo „tradicionalne” konstrukcijske elemente poput greda, lukova, „jarbola”, „sidara”, koji, naravno, nisu apsolutni kruti, ali čvorove na njima možemo smatrati nepomičnima. Položaji su ležajnih čvorova zadani.



Slika 111.

Čvorove koji nisu ležajni nazivat ćemo slobodnima. U niz  $\mathcal{N}$  svrstat ćemo prvo slobodne, a potom ležajne čvorove. Čvorove ćemo označiti njihovim indeksima, pa će čvor koji se u nizu  $\mathcal{N}$  nalazi na  $i$ -tom mjestu biti, sažeto, čvor  $i$ . Ako su  $n$  i  $n_f$  broj svih čvorova i broj slobodnih čvorova, onda su čvorovi  $1, 2, \dots, n_f$  slobodni, dok su čvorovi  $n_f+1, \dots, n$  ležajni; broj je ležajnih čvorova  $n_s = n - n_f$ . Nizove indeksâ slobodnih i ležajnih čvorova označit ćemo sa  $\mathcal{N}_f$  i  $\mathcal{N}_s$ :  $\mathcal{N}_f = (1, 2, \dots, n_f)$  i  $\mathcal{N}_s = (n_f + 1, n_f + 2, \dots, n)$ .

Štap između čvorova  $i$  i  $j$ ,  $i \neq j$ , označit ćemo sa  $\{i, j\}$ ; jasno je da  $\{i, j\}$  i  $\{j, i\}$  označavaju isti štap. Štapove ćemo svrstati u niz  $\mathcal{B}$ , pa ćemo ih označavati i njihovim indeksima tom nizu: nalazi li se štap  $\{i, j\}$  u nizu  $\mathcal{B}$  na mjestu  $\kappa$ , zvat ćemo ga i štapom  $\kappa$ . Broj je štapova  $b$ .

Čvorove koji su štapovima povezani sa čvorom  $i$  zvat ćemo „susjedima” čvora  $i$ , a niz njihovih indeksa označit ćemo sa  $\mathcal{N}_i$ .

Temeljne su „varijable” u nalaženju oblika prednapetih konstrukcija od užadi topologija i geometrija mreže užadi, geometrijski rubni uvjeti te vrijednosti prednaponskih sila u užadi ili omjeri tih vrijednosti. Formulacije zadaće nalaženja oblika ovise o tome koje se „varijable” zadaju, a koje su nepoznanice.

*Topologija mreže* opisuje povezanost kabela, štapova i čvorova<sup>18</sup>: štapove koji „pripadaju” jednom kabelu, štapove koji su priključeni u neki čvor, čvorove u koje je priključen neki štap (čvorove na krajevima štapa), „susjede” nekog čvora i slično. Topologija mreže zadaje se unaprijed, a određena je predviđenim brojem i rasporedom kabela.

*Geometrija, metrika* ili *oblik mreže* ključna je „varijabla” u nalaženju oblika. Oblik mreže mora zadovoljiti konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve. On je u proračunskom modelu određen koordinatama čvorova. Budući da je traženi oblik mreže ravnotežna konfiguracija prednaponskih vlačnih sila u sustavu zglobno spojenih štapova, koordinate su slobodnih čvorova temeljne nepoznanice u postupku nalaženja oblika. Stoga se i duljine štapova, za razliku od duljina u „klasičnim” rešetkastim konstrukcijama, mogu tijekom proračuna značajno mijenjati. U nekim je slučajevima pogodno, pa i potrebno, osim uvjeta ravnoteže sila u čvorovima uvesti i dodatne uvjete izražene u obliku kinematičkih ograničenja koja povezuju nepoznate koordinate (primjerice, uvjete koji ne dopuštaju ili ograničavaju promjene duljina nekih štapova). Geometrija i topologija mreže u stanovitom su smislu neovisne: postoje „singularni” slučajevi u kojima više čvorova pada u istu točku.

*Geometrijski rubni uvjeti* određeni su zadanim koordinatama nepomičnih ležajnih čvorova. Jedan od načina na koji projektant može utjecati na oblik mreže promjena je razmještaja i oblika oslonaca, odnosno, u matematičkom modelu, geometrijskih rubnih uvjeta.

Vrijednosti prednaponskih sila u kabelima ili u štapovima mogu biti unaprijed zadane, ali mogu biti i nepoznanice koje se određuju uravnoteženjem čvorova i, možda, zadovoljavanjem dodatnih kinematičkih ograničenja.

<sup>18</sup> Matematičkim rječnikom, ta je povezanost relacija incidencije: za štap i čvor u koji je on priključen kaže se da su incidentni.

### 5.3. Ravnoteža slobodnoga čvora $i$

Osnovu postupka nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od užadi čine jednadžbe ravnoteže slobodnih čvorova na koje djeluju samo sile prednapinjanja u priključenim štapovima.

Za svaki slobodni čvor  $i$  možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže — jednadžbe ravnoteže projekcija sila u priključenim štapovima na tri koordinatne osi:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \bar{e}_{i,j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \bar{e}_{i,j} \cdot \vec{j} = 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \bar{e}_{i,j} \cdot \vec{k} = 0. \quad (199)$$

Skalar  $S_{\{i,j\}}$  vrijednost je sile u štapu  $\{i, j\}$ ; za vlačnu je silu  $S_{\{i,j\}} > 0$ , dok je za tlačnu silu  $S_{\{i,j\}} < 0$ . Vektor  $\bar{e}_{i,j}$  jedinični je vektor na osi štapa  $\{i, j\}$ , orijentiran od čvora  $i$  prema čvoru  $j$ :

$$\bar{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{k}, \quad (200)$$

gdje je

$$\ell_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (201)$$

duljina štapa  $\{i, j\}$ .

Uvrstimo li (200) u (199), dobit ćemo

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\ell_{\{i,j\}}} &= 0 \end{aligned} \quad (202)$$

za  $i \in \mathcal{N}_f$ , a po uvrštavanju izraza za  $\ell_{\{i,j\}}$  u te jednadžbe,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \end{aligned} \quad (203)$$

očitim postaje da je riječ o sustavu nelinearnih algebarskih jednadžbi; sustav sadrži  $3n_f$  jednadžbi.

Bilo koji skup koji sadrži  $n_f$  koordinatnih trojki  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i \in \mathcal{N}_f$ , i  $n_b$  vrijednosti sila  $S_{\{i,j\}}$ ,  $\{i, j\} \in \mathcal{B}$ , a zadovoljava jednadžbe (202), tvori ravnotežnu konfiguraciju.

Jednadžbe sustava (202) ne sadrže funkcije ili koeficijente kojima je izražena konstitucijska veza produljenjâ kabelâ i vrijednosti sila u njima, tako da je ravnotežna konfi-

guracija mreže neovisna o modulima elastičnosti kabelâ i ploštinama njihovih poprečnih presjeka.<sup>19</sup> Problem je nalaženja oblika, prema tome, statički problem, a njegovo je rješenje „čisti, nematerijalizirani ravnotežni oblik” [43].

## 5.4. Minimalne mreže kabelâ

Ukupna duljina kabelâ u mreži dana je funkcijom  $\mathfrak{L}$  definiranom izrazom

$$\mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}} \ell_{\{i,j\}}. \quad (204)$$

Iako u izraz za ukupnu duljinu uđadi ulaze koordinate svih čvorova, koordinate su ležajnih čvorova poznate, tako da je  $\mathfrak{L}$  funkcija koordinata slobodnih čvorova,  $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^{3n_f} \rightarrow \mathbb{R}$ . Izjednačimo li s nulom njezine derivacije po koordinatama slobodnih čvorova, dobit ćemo sustav  $3n_f$  jednadžbi sa  $3n_f$  nepoznanica:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial z_i} = 0$$

za  $i \in \mathcal{N}_f$ . Rješenje tog sustava koordinate su slobodnih čvorova za koje funkcija  $\mathfrak{L}$  poprima minimum.

Kako su

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_{\{i,j\}}}{\partial x_i} &= \frac{x_i - x_j}{\ell_{\{i,j\}}} & \text{i} & \quad \frac{\partial \ell_{\{i,j\}}}{\partial x_k} = 0 \text{ za } k \neq i, j, \\ \frac{\partial \ell_{\{i,j\}}}{\partial y_i} &= \frac{y_i - y_j}{\ell_{\{i,j\}}} & \text{i} & \quad \frac{\partial \ell_{\{i,j\}}}{\partial y_k} = 0 \text{ za } k \neq i, j, \\ \frac{\partial \ell_{\{i,j\}}}{\partial z_i} &= \frac{z_i - z_j}{\ell_{\{i,j\}}} & \text{i} & \quad \frac{\partial \ell_{\{i,j\}}}{\partial z_k} = 0 \text{ za } k \neq i, j, \end{aligned}$$

bit će

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial x_i} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_i - x_j}{\ell_{\{i,j\}}} = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}}, \\ \frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial y_i} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{y_i - y_j}{\ell_{\{i,j\}}} = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}}, \\ \frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial z_i} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{z_i - z_j}{\ell_{\{i,j\}}} = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{z_j - z_i}{\ell_{\{i,j\}}}. \end{aligned}$$

Ako je  $S$  konstanta, onda je

$$\frac{\partial (S \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}))}{\partial x_i} = S \frac{\partial \mathfrak{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial x_i} \quad \&etc.,$$

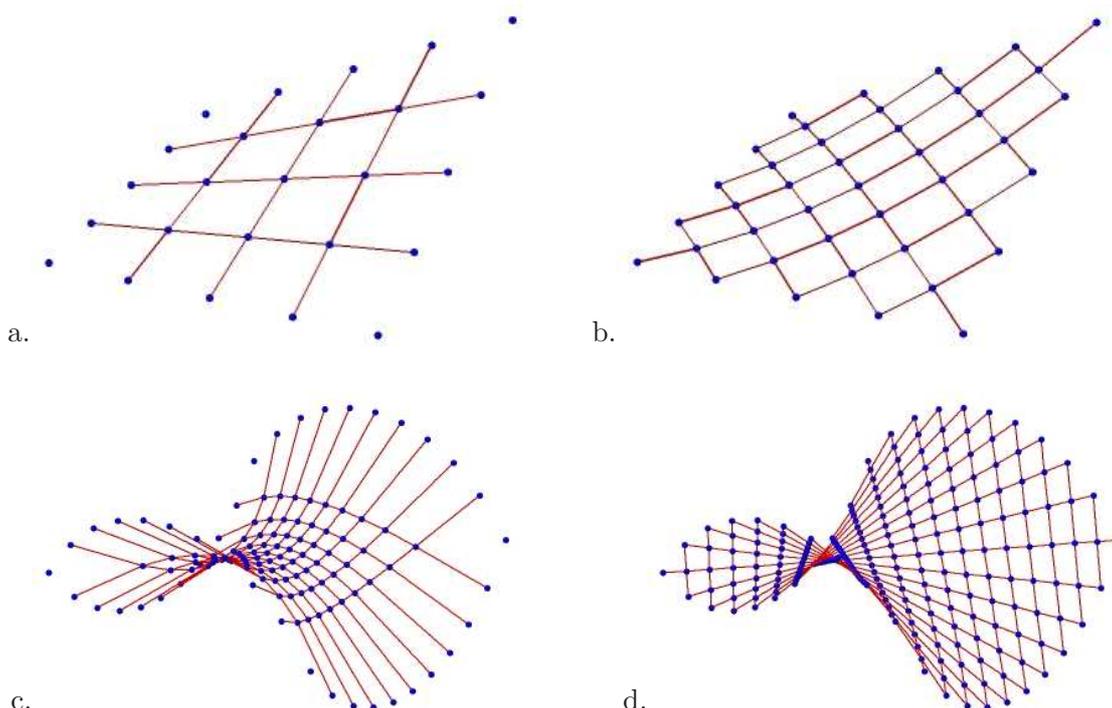
<sup>19</sup> Jedan od prvih računalnih postupaka nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od uđadi proširenje je geometrijski nelinearnoga proračuna prostornih rešetaka metodom pomakâ: probna se konfiguracija pod neuravnoteženim prednaponskim silama progiba (veliki pomaci uz male deformacije) i tako postupno približa ravnotežnoj konfiguraciji [5]. Pritom je, međutim, teško kontrolirati pomake i sile, tako da se u nekim dijelovima kabelâ mogu pojaviti i tlačne sile. Uz to, kako je riječ o inačici metode pomakâ, treba pretpostaviti konstitucijsku vezu pomakâ i sila iako ta veza ne mora odgovarati stvarnom materijalu.

a kako je za  $S \neq 0$

$$S \frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial x_i} = 0 \iff \frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f})}{\partial x_i} = 0,$$

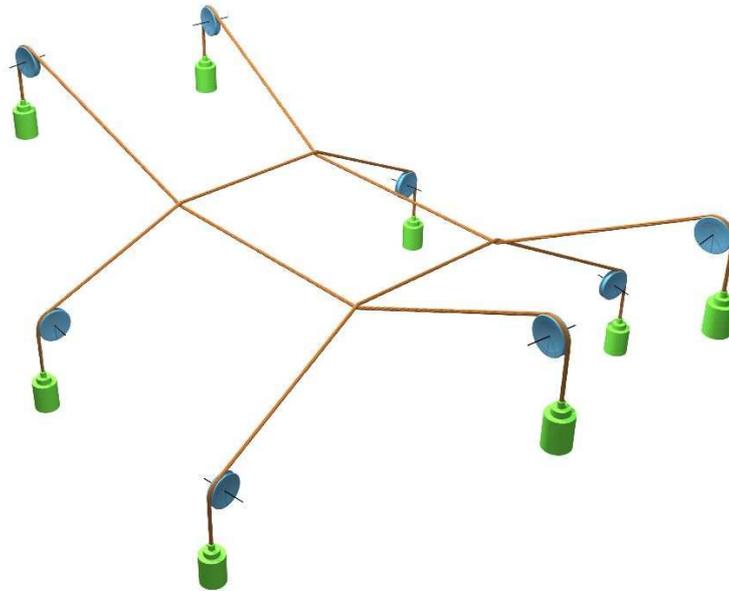
položaj minimuma (točka u prostoru  $\mathbb{R}^{3n_f}$ ) ne mijenja se množenjem funkcije  $\mathcal{L}$  konstantom  $S$ ; mijenja se samo njegova vrijednost (točka u prostoru  $\mathbb{R}^{3n_f+1}$  putuje po okomici na (pot)prostor  $\mathbb{R}^{3n_f}$ ). Prema tome, ako su vrijednosti sila u svim štapovima  $\{i, j\}$  međusobno jednake,  $S_{\{i, j\}} = S$  za sve  $\{i, j\} \in \mathcal{B}$ , sustav (202) možemo interpretirati kao iskaz uvjetâ minimuma ukupne duljine užadi: koordinate slobodnih čvorova, dobivene kao rješenje sustava, daju oblik mreže zadane topologije za koji je zbroj duljina kabelâ manji od zbroja duljina kabelâ u bilo kojem drugom obliku koji mreža može poprimiti. Takav oblik mreže nazivamo *minimalnom* ili *geodetskom mrežom kabelâ*; on, pokazali smo, formalno–matematički ne ovisi o vrijednosti sile  $S$ , ali za fizički ostvarivo rješenje sila mora biti vlačna,  $S > 0$ .

Slike 112.a. i b. prikazuju minimalne mreže nad tlocrtnim područjem  $[0, 1]^2$ . Svi su rubni čvorovi ležajni, a njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbu  $z = \frac{1}{2}xy$ . Kabeli mreže na slici a. izvodnice su hiperboličkoga paraboloida. Minimalne mreže prikazane na slikama 112.c. i d. razapete su nad tlocrtnim područjem  $[-1, 1]^2$ , a koordinate njihovih rubnih čvorova zadovoljavaju jednadžbu  $z = \ln(\cos x/\cos y)$ .



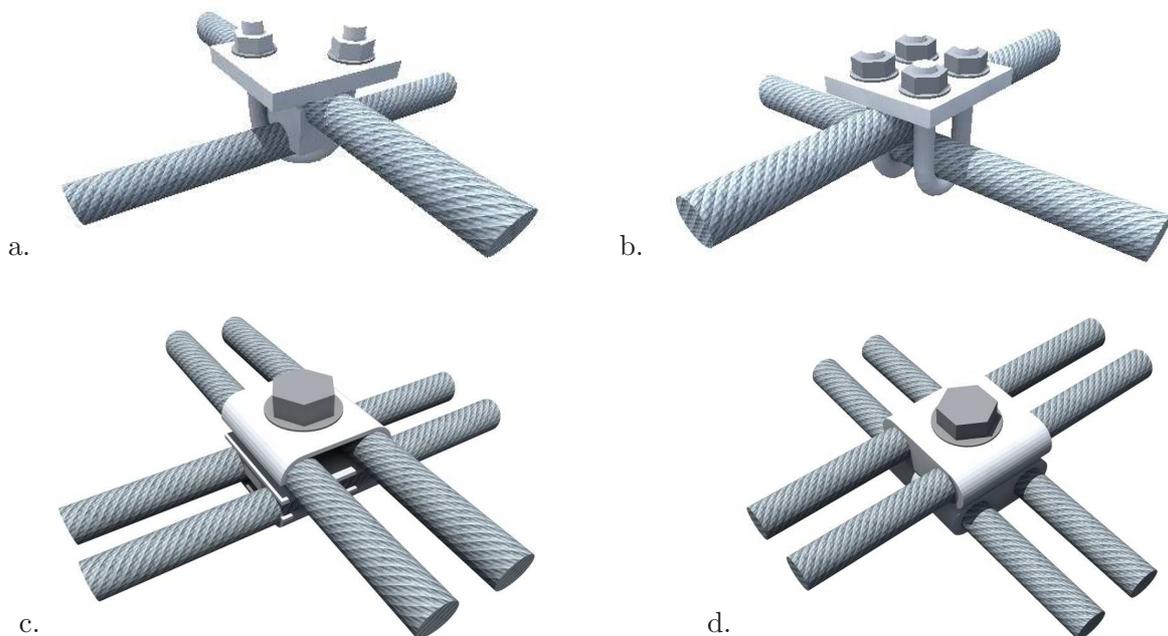
Slika 112.

Da bi mreža mogla doći u minimalnu konfiguraciju, ne smije se tijekom prednapinjanja spriječiti klizanje kabelâ jednih po drugima (slika 113.). Spriječi li se klizanje, prenosit će se s kabela na kabel i tangencijalne komponente sila, pa uzduž kabela, u odsječcima



Slika 113.

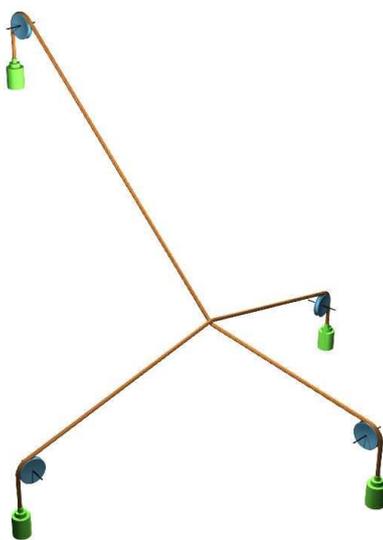
između dodirnih točaka, vrijednosti sila neće biti međusobno jednake. Tek nakon postizanja konačnoga oblika kabeli se u točkama u kojima se križaju međusobno povezuju kako bi se povećala krutost mreže i onemogućilo daljnje klizanje kabelâ nakon nanošenja opterećenja. Nekoliko je vrsta spojeva kabelâ prikazano na slici 114. (Da se izbjegne potreba za kabelima velikih promjera poprečnih presjeka, mreže većih raspona često se izvode s po dva usporedna tanja kabela, slike 114.c. i d. i 109. desno.)



Slika 114.

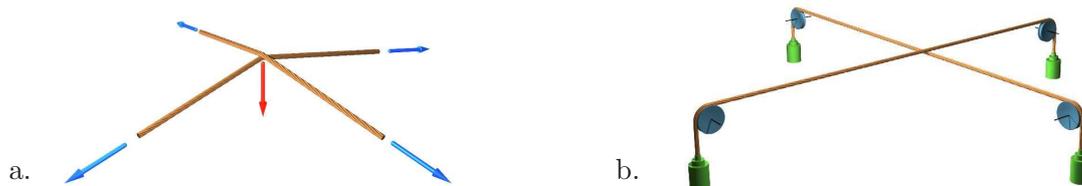
## 5.5. Steinerov problem (čin 1.)

Najjednostavniju prednapetu prostornu mrežu čine dva ukrižena kabela, četiri spoja s podlogom kojih ne leže u jednoj ravnini (slika 115.). Njezin proračunski model sadrži jedan slobodan čvor koji je četirima štapovima spojen sa četiri ležajna čvora. Zada li se vrijednost sila u kabelima, problem nalaženja oblika ima tri nepoznanice — prostorne koordinate slobodnoga čvora.



Slika 115.

Leže li sva četiri spoja kabela s podlogom u istoj ravnini, i slobodni će čvor biti u istoj ravnini: izađe li iz nje, vlačne sile u štapovima, koje na nj djeluju, imat će i komponentu okomitu na tu ravninu i orijentiranu prema njoj, pa će i njihova — neuravnotežena i neuravnoteživa — rezultanta imati takvu komponentu i povući čvor nazad u ravninu (slika 116.a.). Očito je također da će se uz to oba užeta u toj ravnini izravnati — ako su vrijednosti sila u oba štapa svakog užeta jednake, onda je četverokut koji te sile zatvaraju paralelogram, pa štapovi oba užeta leže na pravcima (slika 116.b.). Budući da je zbroj duljina spojnice točaka u ravnini s točkom izvan nje veći od zbroja duljina njihovih spojnice s ortogonalnom projekcijom te točke na njihovu ravninu, zaključak da je slobodni čvor u ravnini ležajnih slijedi i iz zahtjeva za najmanjom mogućom ukupnom duljinom užadi (nešto je teže pokazati da štapovi kabela moraju ležati na pravcima).



Slika 116.

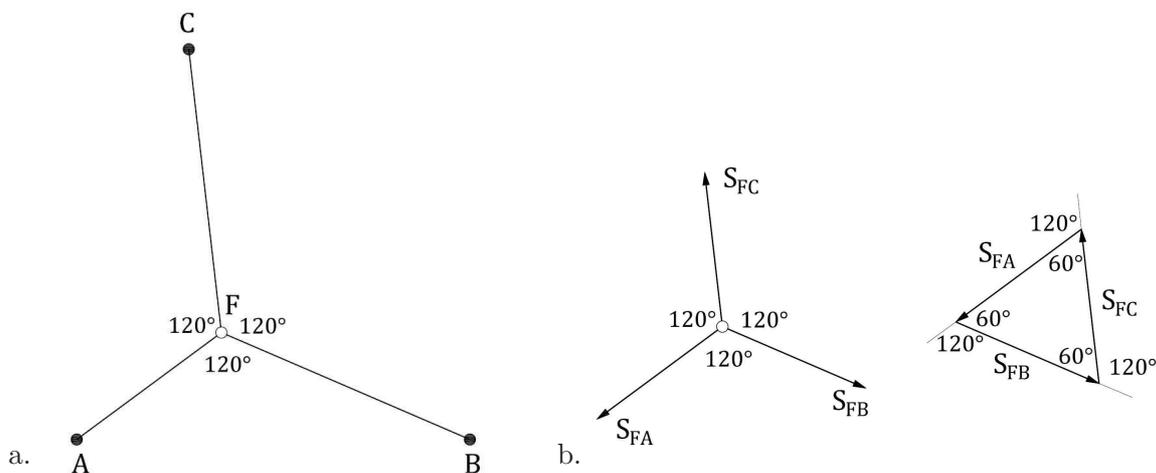
Odreknemo li se prostornosti, slobodan čvor možemo za podlogu vezati i trima štapovima. Kako je ravnoteža triju sila nemoguća ako one ne leže u istoj ravnini,<sup>20</sup> slobodni će čvor i u ovom slučaju biti u ravnini triju ležajnih. Sa stajališta pak minimizacije ukupne duljine štapova taj se zaključak može izvesti na isti način kao i u prethodnom slučaju, za četiri ležajna čvora.

Steinerov problem<sup>21</sup> klasični je problem *varijacijskoga računa*: treba naći sustav pravčastih odsječaka koji međusobno povezuju točke A, B i C, a ukupna im je duljina najmanja.<sup>22</sup> U iskazu problema ne spominje se ni užad ni čvorovi ni štapovi pa ni točka koja odgovara slobodnom čvoru, ali se u njemu može prepoznati apstraktna formulacija najjednostavnijega zamislivog problema nalaženja oblika.

Ako su svi kutovi trokuta s vrhovima A, B i C manji od  $120^\circ$ , onda je jedinstvena točka F, nazvana Fermatovom točkom, za koju je zbroj duljina odsječaka  $\{F, A\}$ ,  $\{F, B\}$  i  $\{F, C\}$  najmanji moguć, točka unutar trokuta za koju vrijedi  $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$  (slika 117.a.). Geometrijski dokaz valjanosti rješenja, poprilično opsežan, dan je u [34]. Predložiti ćemo umjesto toga jednostavan i sažet statički dokaz:

Neka su  $\{F, A\}$ ,  $\{F, B\}$  i  $\{F, C\}$  napete niti i neka su vrijednosti sila u sve tri niti međusobno jednake,  $S_{\{F,A\}} = S_{\{F,B\}} = S_{\{F,C\}} = S$ ; ravnotežni je trokut sila tada jednakos-traničan; u jednakos-traničnu trokutu kutovi imaju  $60^\circ$ , a njihovi pak sukuti  $120^\circ$ ; sve su tri sile vlačne, pa njihovi vektori (dogovorno) „izlaze” iz njihova hvatišta (slika 117.b.); *QED*. Drugim riječima, u Fermatovoj je točki minimum funkcije  $\mathfrak{E}$  definirane izrazom

$$\mathfrak{E}(x, y) = S \ell_{\{F,A\}} + S \ell_{\{F,B\}} + S \ell_{\{F,C\}} = S (\ell_{\{F,A\}} + \ell_{\{F,B\}} + \ell_{\{F,C\}}) = S \mathfrak{L}(x, y). \quad (\blacklozenge)$$



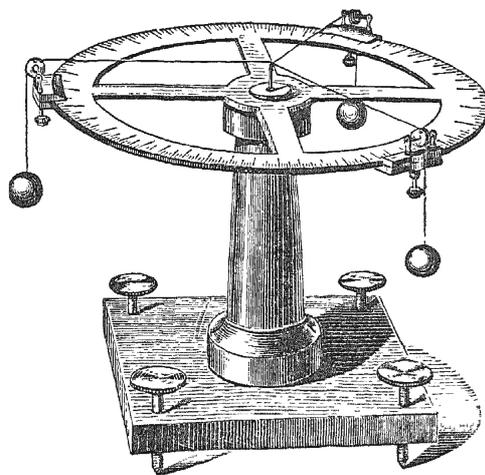
Slika 117.

<sup>20</sup> To vrijedi za bilo koje tri sile u tri štapa priključena u čvor, vlačne ili tlačne ili vlačne i tlačne. Za razliku od toga, četiri sile u štapovima koji čvor povezuju sa čvorovima u jednoj ravnini ne moraju, da bi bile ravnoteži, ležati u toj ravnini, no tada će sile u nekima od njih biti vlačne, a u nekima tlačne.

<sup>21</sup> Problem nosi ime Jacoba Steinera (1796.–1863.), iako ga je već ranije, 1646. godine, postavio Pierre de Fermat (1601.–1665.), a pretpostavlja se da ga je iste te godine riješio, dijelom, Evangelista Torricelli (1608.–1647.) [34].

<sup>22</sup> U općem slučaju broj točaka koje treba povezati nije ograničen na tri.

Postoji i eksperimentalna potvrda našega dokaza koju je, eksperimentalno utvrđujući valjanost stavka o paralelogramu sila, stotinjak godina prije Steinerova rođenja proveo Pierre Varignon (1654.–1722.) [44]. Varignon je zamislio mehanizam s horizontalno postavljenim krugom na čijem je obodu označena podjela u stupnjeve i u čijem je središtu vertikalna igla. Tri u jednom čvoru spojene niti, na slobodnim krajevima opterećene utezima, prebačene su preko kotačića koji se mogu postaviti u bilo koje točke na obodu kruga (slika 118.). Ako su utezi jednakih težina i ako se kotačići postave u točke s oznakama 0, 120 i 240, čvor u kojem su niti spojene doći će u točku iznad središnje igle. Varignonov mehanizam odgovara i na pitanje (ako se netko zapitao) kako ostvariti klizanje užadi u čvoru u kojemu se sastaju tri užeta: u posebnom slučaju „mreže”, u kojem ni jedan štap nije na oba kraja priključen u slobodne čvorove (u biti, „mreže” samo s jednim slobodnim čvorom), dovoljno je omogućiti klizanje u ležajevima.



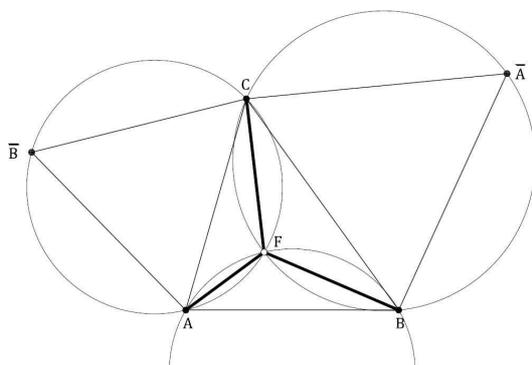
Slika 118. Varignonov eksperimentalni dokaz stavka o paralelogramu sila (iz [44])

Spomenut ćemo usput da se po tri kuta od  $120^\circ$  često pojavljuju u rješenjima minimizacijskih problema „u prirodi” (primjerice, slika 119.).



Slika 119.

Geometrijski i statički dokaz potvrđuju postojanje i jedinstvenost Fermatove točke te utvrđuju odredbeni međuodnos njezinih spojnica s točkama A, B i C (kutovi od  $120^\circ$  stupnjeva), ali ne govore ništa o postupku njezina nalaženja. Jedna od geometrijskih konstrukcija Fermatove točke temelji se na stavku — poopćenju Talesova poučka — da su svi obodni kutovi kružnice nad istom tetivom, s jedne njezine strane, međusobno jednaki i da je zbroj dvaju obodnih kutova s različitih strana tetive  $180^\circ$ . Konstruiramo li nad odsječcima  $\{A, C\}$  i  $\{B, C\}$  kružnice obodni kutovi kojih su  $120^\circ$  na onim stranama tih odsječaka na kojima leže točke B i A, sjeći će se te kružnice osim u točki C i u Fermatovoj točki F. Budući da sa suprotnih strana odsječaka njihovi obodni kutovi imaju  $60^\circ$ , te je kružnice lako konstruirati: nad odsječcima  $\{A, C\}$  i  $\{C, B\}$  konstruirat ćemo jednakostranične trokute  $\triangle AC\bar{B}$  i  $\triangle CB\bar{A}$  s vrhovima  $\bar{B}$  i  $\bar{A}$  na suprotnim stranama od onih na kojima obodni kutovi moraju imati  $120^\circ$  (na stranama suprotnima od točaka B i A); tražene su kružnice kružnice kroz vrhove tih trokuta (slika 120.). Može se pokazati da će kroz točku F proći i treća kružnica, opisana jednakostraničnom trokutu nad odsječkom  $\{A, B\}$  s vrhom  $\bar{C}$  na strani suprotnoj od točke C.<sup>23</sup>



Slika 120.

Ako jedan od kutova trokuta  $\triangle ABC$ , recimo, kut u vrhu C, ima  $120^\circ$  ili više, onda je tražena najkraća poveznica točaka A, B i C sastavljena od odsječaka  $\{A, C\}$  i  $\{C, B\}$ .<sup>24</sup> Ta mogućnost, interpretirana u kontekstu nalaženja oblika mreže, pokazuje da katkada rješenje, iako s matematičkoga stajališta korektno, ne mora biti i konstrukcijski smisleno.

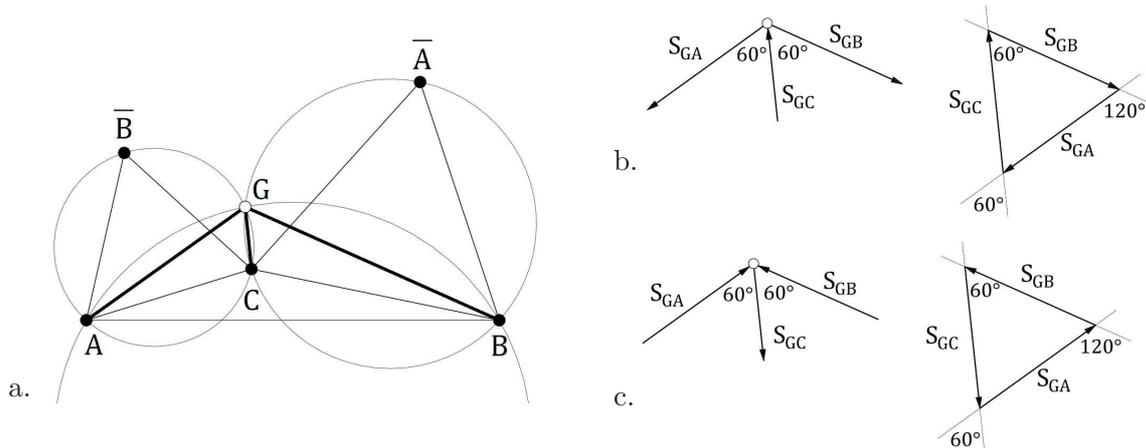
Konstruiramo li, međutim, na isti način kao u prvom slučaju, kružnice s tetivama  $\{A, C\}$  i  $\{C, B\}$ , sjeći će se sada oni njihovi lukovi koji su na istim stranama tih tetiva kao i trokuti  $\triangle AC\bar{B}$  i  $\triangle CB\bar{A}$ , dakle, na stranama na kojima obodni kutovi imaju  $60^\circ$  (slika 121.a.); dobiveno ćemo sjecište označiti sa G. Sada će, prema tome, kutovi između spojnica  $\{A, G\}$  i  $\{C, G\}$  i između spojnica  $\{C, G\}$  i  $\{B, G\}$  imati  $60^\circ$ , dok će kut između spojnica  $\{A, G\}$  i  $\{B, G\}$  imati  $120^\circ$ . U statičkoj je interpretaciji točka G čvor u kojem se sastaju štapovi  $\{G, A\}$ ,  $\{G, B\}$  i  $\{G, C\}$  u kojima su sile jednakih intenziteta, ali su sile  $S_{\{G,A\}}$  i  $S_{\{G,B\}}$  vlačne, dok je sila  $S_{\{G,C\}}$  tlačna (slika 121.b.) ili obratno (slika 121.c.); ravnotežni trokut sila i sada je jednakostraničan, ali vektori tlačnih sila „ulaze” u njihovo hvatište. Opisana konstrukcija, naravno, ne rješava problem nalaženja oblika mreže užadi, jer ne minimizira funkciju danu izrazom (♦) nego

$$\mathfrak{E}(x_G, y_G) = S \ell_{\{G,A\}} + S \ell_{\{G,B\}} - S \ell_{\{G,C\}},$$

gdje je S intenzitet sila u štapovima,  $S = |S_{\{G,A\}}| = |S_{\{G,B\}}| = |S_{\{G,C\}}|$ .

<sup>23</sup> Spomenut ćemo još da je Fermatova točka također i (jedinstveno) sjecište spojnica  $A\bar{A}$ ,  $B\bar{B}$  i  $C\bar{C}$  [34], no valjanost te, iako možda jednostavnije, konstrukcije nije tako očita.

<sup>24</sup> Taj je slučaj Steinerova problema uočen i riješen tek 1834. godine [34].



Slika 121.

Kao primjer Steinerova problema, neka su zadane točke  $A(0, 0)$ ,  $B(5, 0)$  i  $C(1,425; 5)$ . Kutovi trokuta  $\triangle ABC$  manji su od  $120^\circ$ , pa postoji Fermatova točka  $F$  unutar njega (to je trokut prikazan na slikama 117. i 120.). U točki  $F$  je slobodni, dok su u točkama  $A, B$  i  $C$  ležajni čvorovi. Budući da je problem ravninski, točke smo smjestili u ravninu  $(xy)$ , pa će nepoznanice biti dvije ravninske koordinate točke  $F$ .

Ukupna je duljina nití, kao funkcija koordinata  $(x, y)$  čvora  $F$  u kojem su međusobno spojene,

$$\mathcal{L} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1,425)^2 + (y - 5)^2}. \quad (\clubsuit)$$

Graf funkcije  $\mathcal{L}$  je ploha  $\Gamma_{\mathcal{L}}$ ; na slici 122. prikazan je isječak<sup>25</sup> nad područjem  $[-1, 6]^2$ . Ploha  $\Gamma_{\mathcal{L}}$  je konveksna<sup>26</sup>, pa ima najnižu točku, a funkcija  $\mathcal{L}$  jedinstveni globalni minimum.

U najnižoj je točki plohe  $\Gamma_{\mathcal{L}}$  njezina dirna ravnina horizontalna, što znači da su parcijalne derivacije funkcije  $\mathcal{L}$  po koordinatama točke  $F$ ,  $\partial\mathcal{L}/\partial x$  i  $\partial\mathcal{L}/\partial y$ , jednake nuli:

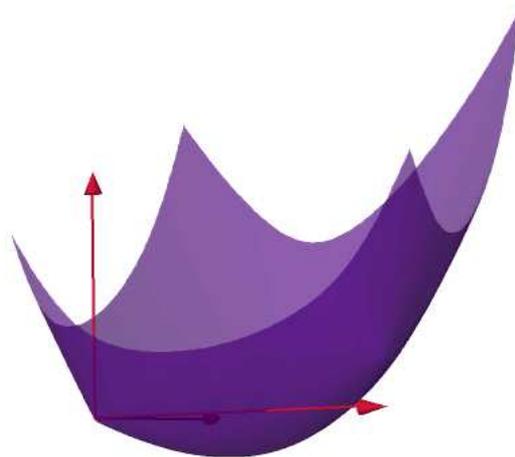
$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x - 5}{\sqrt{(x - 5)^2 + y^2}} + \frac{x - 1,425}{\sqrt{(x - 1,425)^2 + (y - 5)^2}} &= 0, \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x - 5)^2 + y^2}} + \frac{y - 5}{\sqrt{(x - 1,425)^2 + (y - 5)^2}} &= 0. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

<sup>25</sup> Pritom je ishodište nacrtanoga koordinatnog sustava pomaknuto u točku  $(0, 0, \mathcal{L}(0, 0))$ .

<sup>26</sup> Funkcija  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ , naziva se *konveksnom* ako je

$$f(a\mathbf{x} + (1 - a)\mathbf{y}) \leq af(\mathbf{x}) + (1 - a)f(\mathbf{y})$$

za bilo koje dvije točke  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  njezine domene  $\mathcal{D}_f$  i za  $0 \leq a \leq 1$ . Geometrijskim rječnikom rečeno, ravna je spojnica bilo kojih dviju točaka (sada točaka u  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) njezina grafa iznad njega. I za graf konveksne funkcije kažemo da je konveksan, pa govorimo o konveksnoj krivulji, konveksnoj plohi ili konveksnoj hiperplohi.



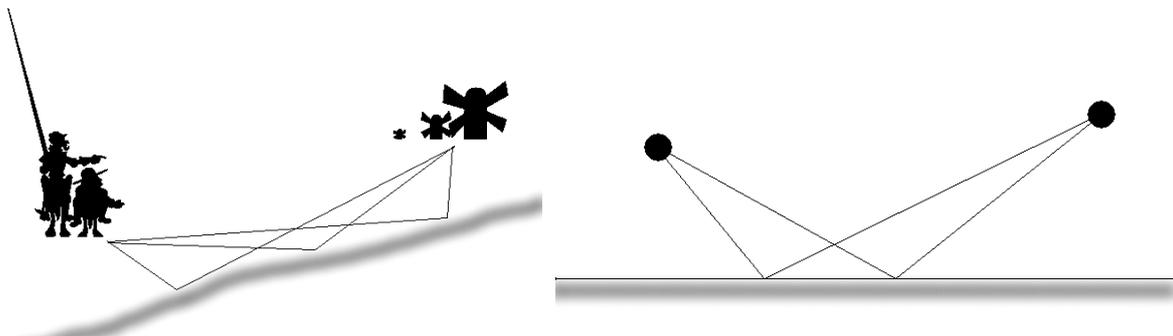
Slika 122.

## 5.6. Don Quijote, Sancho Panza, vjetrenjače i Newton–Raphsonov postupak (međuigra)

Sustav (♠) sadrži dvije nelinearne jednadžbe s nepoznicama  $x$  i  $y$ , koordinatama tražene točke  $F$ . Mali se broj nelinearnih jednadžbi i sustava nelinearnih jednadžbi može riješiti analitički, u „zatvorenom” obliku. Nelinearne jednadžbe i nelinearni sustavi rješavaju se stoga numeričkim postupcima, *postupnim približavanjem* u nizu sve točnijih, ali ipak uvijek tek *približnih rješenja*. Riječ je o *iteracijskim postupcima* u kojima se niz operacija ponavlja do zadovoljenja odabranoga kriterija. Jedno izvođenje niza operacija naziva se *korakom*. „Ulazne” vrijednosti u operacije nekog koraka ovise o rezultatima operacija prethodnoga koraka; za započinjanje provođenja postupka treba stoga pretpostaviti ulazne vrijednosti operacija prvoga koraka.

Inačicu problema najkraće spojnice sàmo s jednom jednadžbom s jednom nepoznaticom nazvat ćemo „problemom vjetrenjača”:

Don Quijote i Sancho Panza žele napasti divove prerusene u vjetrenjače, ali prije toga moraju na rijeci napojiti konja i magarca (slika 123. lijevo). U kojoj točki trebaju doći na obalu rijeke da bi ukupni prijedeni put, do rijeke pa potom do vjetrenjača, bio najkraći?



Slika 123.<sup>27</sup>

<sup>27</sup> Crteži Dona Quijotea, Sancha Panze i vjetrenjača posuđeni su s omotnice albuma *Windmill Tilter* Kena Wheelera i Orkestra Johna Dankwortha iz 1969. godine.

Na najjednostavniji ćemo način problem izraziti jednađbom s jednom nepoznanicom ako obalu rijeke ideliziramo pravcem položenim tako da se poklapa s osi  $x$  — nepoznanica je tada apscisa točke pristupa obali (slika 123. desno). Pokušajte problem riješiti geometrijskim postupkom!

Ako su  $(x_d, y_d)$  koordinate točke u kojoj su Don Quijote i Sancho Panza,  $(x_v, y_v)$  koordinate točke u kojoj su vjetrenjaće, a  $x$  apscisa točke pristupa obali, onda je ukupna duljina puta dana funkcijom

$$\mathcal{L} : x \mapsto \sqrt{(x - x_d)^2 + y_d^2} + \sqrt{(x - x_v)^2 + y_v^2}.$$

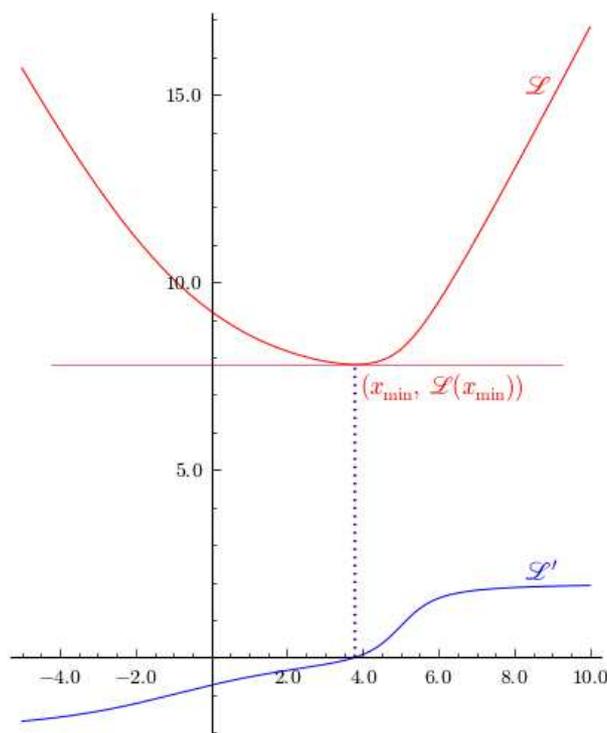
Graf  $\Gamma_{\mathcal{L}}$  funkcije  $\mathcal{L}$ , za  $(x_d, y_d) = (-1, 4)$  i  $(x_v, y_v) = (5, 1)$ , nacrtan je crvenom bojom na slici 124.; funkcija je konveksna, pa postoji jedinstvena točka  $x_{\min}$  u kojoj poprima najmanju vrijednost. U točki  $(x_{\min}, \mathcal{L}(x_{\min}))$  tangenta je na krivulju  $\Gamma_{\mathcal{L}}$  horizontalna, pa točku  $x_{\min}$  možemo naći kao rješenje jednađbe

$$\mathcal{L}'(x) = 0. \tag{205}$$

Na slici 124. graf funkcije

$$\mathcal{L}' : x \mapsto \frac{x + 1}{\sqrt{(x + 1)^2 + 16}} + \frac{x - 5}{\sqrt{(x - 5)^2 + 1}} \tag{*}$$

nacrtan je plavom bojom; točka u kojoj taj graf siječe os  $x$  nul-točka je funkcije  $\mathcal{L}'$ , pa je na ordinali koja kroz nju prolazi najniža točka grafa funkcije  $\mathcal{L}$ .



Slika 124.

Nul-točku funkcije  $f = \mathcal{L}'$  naći ćemo primjenom *Newton–Raphsonova postupka* [7, 37]. U svakom koraku tog iteracijskog postupka funkciju  $f$  aproksimiramo jednostavnom funkcijom čiju je nul-točku lako naći — linearnom funkcijom

$$\bar{f} : x \mapsto ax + b, \quad (206)$$

graf koje je pravac<sup>28</sup>. Pravac koji najbolje prijanja uz glatku krivulju u okolišu neke njezine točke njezina je tangenta u toj točki, pa je funkcija traženoga oblika, koja najbolje aproksimira funkciju  $f$  u okolišu točke  $x^{(k)}$ , funkcija

$$\bar{f}^{(k)} : x \mapsto f'(x^{(k)})x + f(x^{(k)}) - f'(x^{(k)})x^{(k)}; \quad (207)$$

Znamo, naime, da je koeficijent smjera tangente na graf funkcije  $f$  jednak vrijednosti derivacije te funkcije u apscisi dirališta,  $a = f'(x^{(k)})$ . Tangenta uz to mora proći diralištem  $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ , tako da je  $ax^{(k)} + b = f(x^{(k)})$ , čime je određen i odsječak  $b$  na ordinatnoj osi.

Odredbeni izraz za funkciju  $\bar{f}^{(k)}$  možemo pisati i kao

$$\bar{f}^{(k)} : x \mapsto f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + f(x^{(k)}). \quad (208)$$

Uočite da je  $\bar{f}^{(k)}$  funkcija varijable  $x$ , dok je  $x^{(k)}$  odabrana ili zadana točka u kojoj aproksimiramo funkciju  $f$ .

Ako se u nekom okolišu svoje nul-točke  $x_0$  funkcija  $f$  ponaša „pristojno”, kao, primjerice, na slici 125.a., i ako je točka  $x^{(k)}$  u tom okolišu, onda će nul-točka funkcije  $\bar{f}^{(k)}$ ,

$$\bar{x}_0^{(k)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad (209)$$

koju, naravno, nalazimo kao rješenje linearne jednadžbe  $\bar{f}^{(k)}(x) = 0$ , ležati točki  $x_0$  bliže od točke  $x^{(k)}$ . No, kako se graf funkcije  $f$ , udaljavajući se od dirališta, udaljava i od tangente,  $\bar{x}_0^{(k)}$  ipak neće biti  $x_0$ .

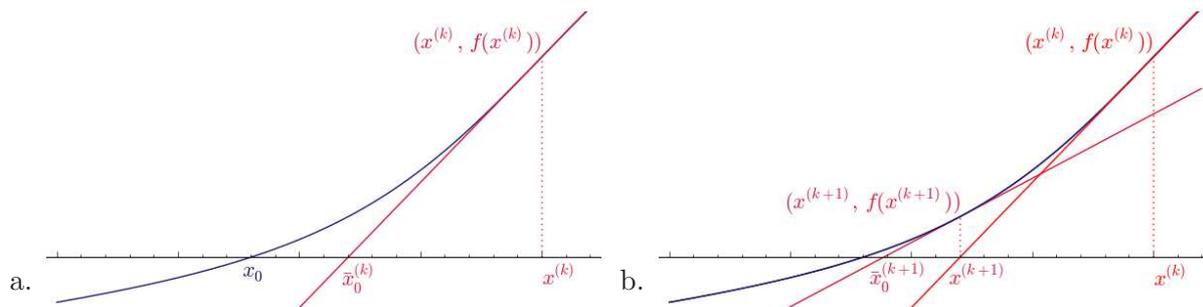
Aproksimiramo li sada funkciju  $f$  u okolišu točke  $x^{(k+1)} = \bar{x}_0^{(k)}$  novom funkcijom  $\bar{f}^{(k+1)}$  i nađemo li njezinu nul-točku  $\bar{x}_0^{(k+1)}$ , još ćemo se više približiti točki  $x_0$  (slika 125.b.). Opisani postupak možemo ponavljati sve dok ne dođemo „dovoljno blizu” te točke (slika 126.). Pitanje je, naravno, što znači „dovoljno blizu”? Točka  $x_0$  najčešće — osim u rijetkim „školskim” primjerima poput našega<sup>29</sup> — nije poznata, pa ne možemo izračunati udaljenosti  $|x_0 - x^{(k)}|$ ,  $|x_0 - x^{(k+1)}|$ , ... No, ako je  $x^{(n)}$  dovoljno blizu  $x_0$ ,  $x^{(n)} \cong x_0$ , za neprekinutu je funkciju  $f$  onda  $f(x^{(n)}) \cong 0$ , jer je  $f(x_0) = 0$ . Odabrat ćemo stoga točnost  $\tau$ ,  $\tau > 0$ , i prekinuti iteracijski proračun nakon koraka  $n$  u kojem je  $|f(x^{(n)})| < \tau$  te uzeti  $x^{(n)}$  kao dovoljno točno približno rješenje.

<sup>28</sup> Strogo govoreći, budući da su odredbena svojstva linearnosti

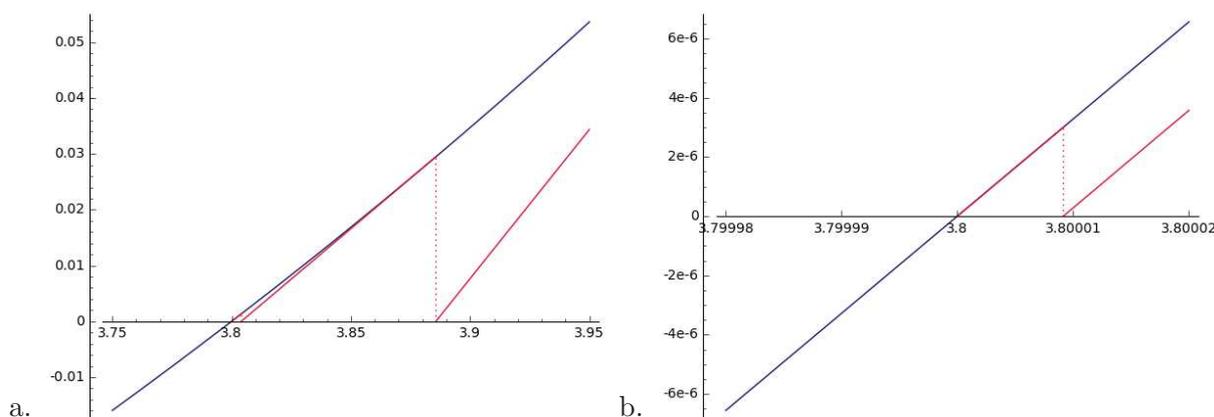
$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

samo je  $x \mapsto ax$  linearna funkcija, dok se funkcija  $x \mapsto ax + b$  naziva *afinom*. No, kako su grafovi obje funkcije pravci (linearne pravac koji prolazi ishodištem, a affine tom pravcu usporedan pravac pomaknut za  $b$  „prema gore” ako je  $b > 0$  ili „prema dolje” ako je  $b < 0$ ) i kako se funkcije grafovi kojih su krivulje nazivaju nelinearnima, afina se funkcija obično također naziva linearnom, pa se i aproksimacija neke funkcije afinom funkcijom naziva linearnom aproksimacijom.

<sup>29</sup> Funkcija (\*) pripada malom broju funkcija nul-točke kojih se mogu naći analitički:  $x_0 = 19/5 = 3,8$ .



Slika 125.



Slika 126.

U tablici 2. prikazana je povijest nalaženja nul-točke funkcije (\*) s točnošću  $\tau = 1 \cdot 10^{-8}$  i početnom aproksimacijom  $x^{(0)} = 5,0$ . Pritom smo točnost ispisa „realnih” brojeva ograničili na 6 značajnih znamenaka.

Tablica 2.

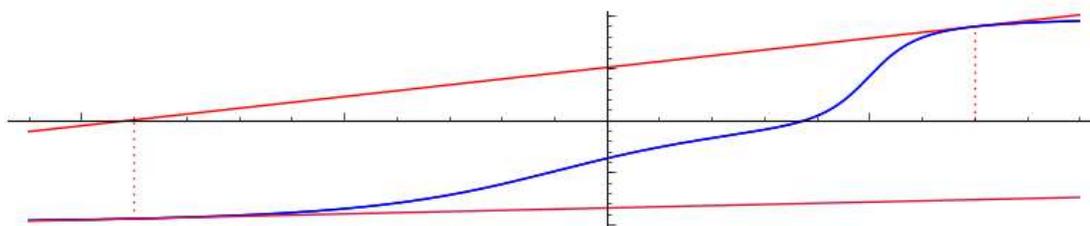
$k$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	5,0	0,832 050
1	4,202 00	0,168 996
2	3,885 62	0,029 480 0
3	3,804 07	0,001 336 73
4	3,800 01	$3,001 71 \cdot 10^{-6}$
5	3,800 00	$1,520 04 \cdot 10^{-11}$

Ako funkcija „nije pristojna” ili ako smo potragu započeli predaleko, može se dogoditi da postupak ne konvergira ili da se rješenju nećemo približiti u prihvatljivom broju koraka — ne možemo, nažalost, napraviti nebrojeno mnogo koraka.

Primjerice, tablica 3. prikazuje povijest pokušaja nalaženja nul-točke funkcije (\*) s početnom aproksimacijom  $x^{(0)} = 7,0$ . Uzastopne se vrijednosti  $x^{(k)}$  neograničeno udaljavaju od ishodišta, naizmjenice ulijevo i udesno. Naime, pravci  $y = -2$  i  $y = 2$  horizontalne su asimptote grafa funkcije  $f = \mathcal{L}'$  (za  $x \rightarrow -\infty$  i  $x \rightarrow \infty$ ), pa se udaljavanjem nagibi te krivulje, a time i nagibi njezinih tangenata (vrijednosti funkcije  $f'$ ), smanjuju (slika 127.), tako da tangente os  $X$  sijeku sve dalje i dalje.<sup>30</sup>

Tablica 3.

$k$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	7,0	1,788 85	0,111 803
1	-9,000 00	-1,891 89	0,022 722 3
2	74,261 0	1,998 49	0,000 040 383 0
3	-49 414,1	-2,000 00	$1,409 01 \cdot 10^{-13}$
4	$1,419 43 \cdot 10^{13}$	2,000 00	0,000 00
5	$-\infty$	neodređeno	neodređeno



Slika 127.

Početnu aproksimaciju ne bi trebalo odabrati slučajno. Često ćemo, ako poznamo i razumijemo geometrijski ili fizički izvor jednadžbe koju rješavamo, moći odabrati povoljnu vrijednost koja će razmjerno brzo dovesti do rješenja. U našem je primjeru očito da je apscisa točke u kojoj će Don Quijote i Sancho Panza pristupiti obali između apscise točke u kojoj se nalaze i apscise točke u kojoj su vjetrenjače (slika 123. desno), pa za početnu aproksimaciju možemo uzeti  $x^{(0)} \in [x_d, x_v] = [-1, 5]$ .

<sup>30</sup> Prema tablici,  $f'(x^{(4)}) = 0$ . Zaista je tek  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ , a dobiveni je — pogrešni — rezultat posljedica konačne računalne aritmetike pri standardnom zapisu „realnih” brojeva s pomičnim zarezom (engl. *floating point*), koji sadrži samo 16, a ne neizbrojivo mnogo značajnih dekadskih znamenaka.

Iako su  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$  i  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ , u posljednjem su retku tablice vrijednosti neodređene zato što se u neposrednom izračunavanju izrazâ kojima su te funkcije zadane pojavljuju neodređeni izrazi  $\infty/\infty$ .

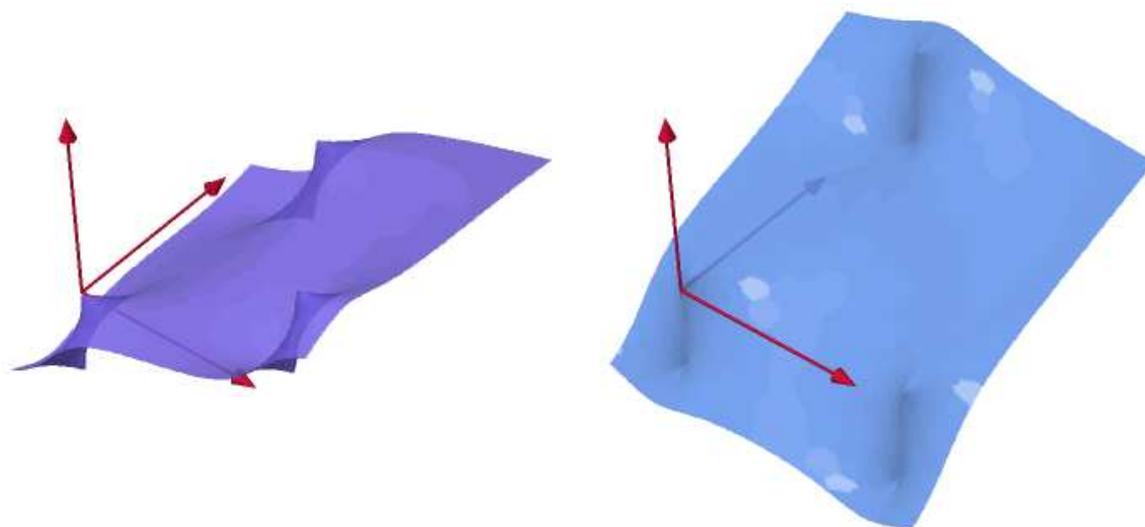
## 5.7. Steinerov problem (čin 2.)

Parcijalne derivacije funkcije  $\mathcal{L}$  označit ćemo sa  $f_1$  i  $f_2$ ,  $f_1 = \partial\mathcal{L}/\partial x$  i  $f_2 = \partial\mathcal{L}/\partial y$ . Te su funkcije određene izrazima

$$f_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x - 5}{\sqrt{(x - 5)^2 + y^2}} + \frac{x - 1,425}{\sqrt{(x - 1,425)^2 + (y - 5)^2}},$$

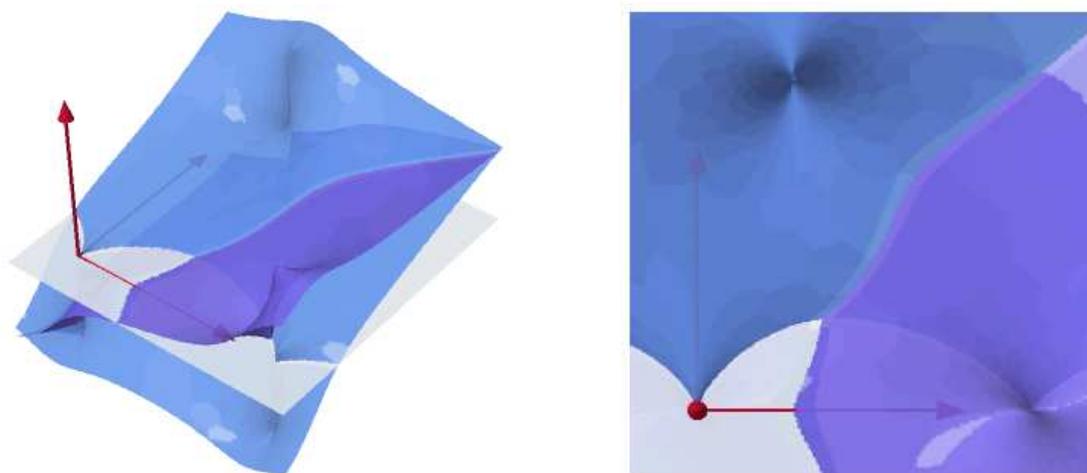
$$f_2(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x - 5)^2 + y^2}} + \frac{y - 5}{\sqrt{(x - 1,425)^2 + (y - 5)^2}}.$$

Riječ je o skalarnim funkcijama dviju skalarnih varijabli, pa su njihovi grafovi plohe (slika 128.: lijevo  $f_1$ , desno  $f_2$ ).



Slika 128.

Te plohe sijeku ravninu  $(xy)$  u dvije krivulje (slika 129.). Nul-točke funkcije  $f_1$  — točke koje zadovoljavaju prvu jednadžbu sustava ( $\spadesuit$ ) — leže na jednoj, a nul-točke funk-



Slika 129.

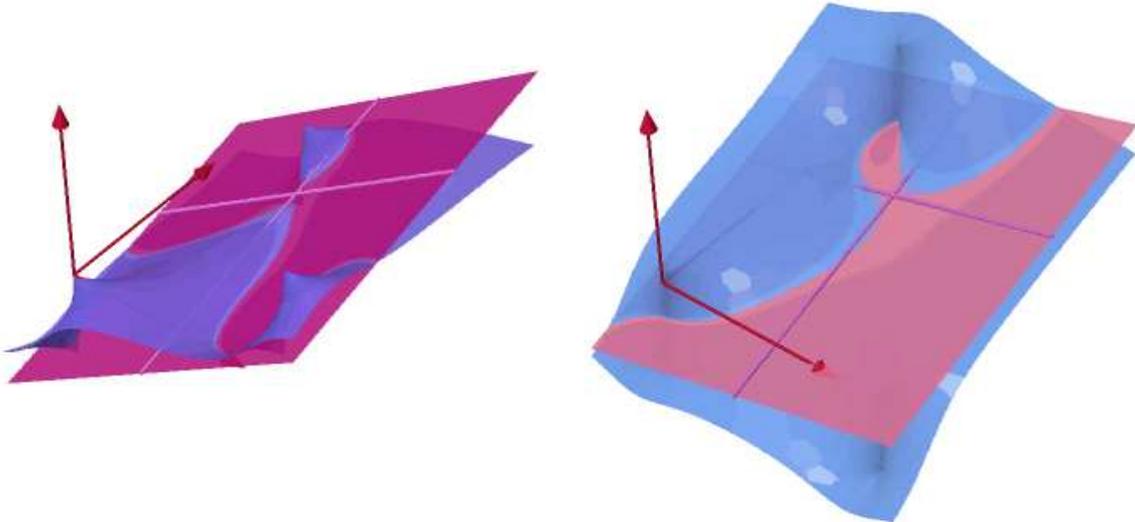
cije  $f_2$  — one koje zadovoljavaju drugu jednadžbu — na drugoj krivulji. Sjecište tih krivulja zajednička je nul-točka obiju funkcija i, time, traženo rješenje sustava (♠).

Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  imaju istu domenu,  $\mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$  (razlog isključivanja točaka A, B i C objasniti ćemo uskoro). Uzet ćemo da su te dvije funkcije skalarne komponente vektorske funkcije  $\mathbf{f} : \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pri čemu je  $\mathcal{D}_{\mathbf{f}} = \mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f_2}$ ; vektorska funkcija

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2]^T = [\partial \mathcal{L} / \partial x \ \partial \mathcal{L} / \partial y]^T$$

naziva se *gradijentom* skalarne funkcije  $\mathcal{L}$ . Skalarnu ili vektorsku funkciju  $\mathbf{f}$  dviju skalarnih varijabli  $x, y$  možemo smatrati i funkcijom jedne vektorske varijable  $\mathbf{x} = [x \ y]^T$  te zloupotrijebivši neznatno način zapisa pisati  $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}([x \ y]^T) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Rješenje je sustava (♠), prema tome, nul-točka vektorske funkcije vektorske varijable: točka  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$  za koju je  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

Po analogiji s postupkom opisanim u prethodnom odjeljku, funkcije  $f_1$  i  $f_2$  aproksimirat ćemo u okolišu odabranih točaka linearnim (točnije: afinim) funkcijama  $\bar{f}_1$  i  $\bar{f}_2$ . Grafovi su linearnih (i afnih) funkcija dviju varijabli ravnine, a ravnine, koja uz plohe najbolje prijanjaju, njihove su dirne ravnine (slika 130.: lijevo  $f_1$ , desno  $f_2$ ).



Slika 130.

Dirne ravnine ploha  $\Gamma_{f_1}$  i  $\Gamma_{f_2}$  u točkama  $(x^{(k)}, y^{(k)}, f_1(x^{(k)}, y^{(k)}))$  i  $(x^{(k)}, y^{(k)}, f_2(x^{(k)}, y^{(k)}))$  grafovi su funkcija

$$\bar{f}_1^{(k)} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^{(k)}, y^{(k)}) (x - x^{(k)}) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^{(k)}, y^{(k)}) (y - y^{(k)}) + f_1(x^{(k)}, y^{(k)}),$$

$$\bar{f}_2^{(k)} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{(k)}, y^{(k)}) (x - x^{(k)}) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^{(k)}, y^{(k)}) (y - y^{(k)}) + f_2(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

Odredbeni izraz funkcije  $\bar{f}_2^{(k)}$  možemo izvesti na sljedeći način:

Dirnu ravninu plohe  $\Gamma_{f_2}$  u točki  $(x^{(k)}, y^{(k)}, f_2(x^{(k)}, y^{(k)}))$  odredit ćemo kao ravninu razapetu dvama pogodno odabranim pravcima koji prolaze tim diralištem. Prvi će pravac biti tangenta

na krivulju koja nastaje presijecanjem plohe ravninom  $y = y^{(k)}$  usporednom s ravninom  $(xz)$ , a drugi tangenta na presječnu krivulju u ravnini  $x = x^{(k)}$ , usporednoj s ravninom  $(yz)$ ; naravno, ti su pravci ujedno i tangente plohe. Nagibi su tih tangenata u odnosu na horizontalnu ravninu  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{(k)}, y^{(k)})$  i  $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x^{(k)}, y^{(k)})$ , pa su vektori usporedni s tangentama

$$\vec{v}_1 = \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{(k)}, y^{(k)}) \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{v}_2 = \vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^{(k)}, y^{(k)}) \vec{k}.$$

Ako su  $\vec{d}$  i  $\vec{r}$  radijus-vektori dirališta i neke druge točke,

$$\vec{d} = x^{(k)} \vec{i} + y^{(k)} \vec{j} + f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

onda je vektor  $\vec{r} - \vec{d}$  usporedan sa spojnicom tih dviju točaka. Točka određena radijus-vektorom  $\vec{r}$  ležat će u dirnoj ravnini ako su vektori  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  i  $\vec{r} - \vec{d}$  komplanarni. Iz uvjeta komplanarnosti triju vektora,

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{r} - \vec{d}) = 0,$$

neposredno slijedi, uz  $z = \bar{f}_2^{(k)}(x, y)$ , navedeni izraz kojim je određena funkcija  $\bar{f}_2^{(k)}$ .

Na isti se način izvodi i odredbeni izraz funkcije  $\bar{f}_1^{(k)}$ .

Odredbene izraze funkcija  $\bar{f}_1^{(k)}$  i  $\bar{f}_2^{(k)}$  možemo povezati u jedan matricni izraz

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} \right)$$

ili, sažeto,

$$\bar{\mathbf{f}}^{(k)} : \mathbf{x} \mapsto \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}); \quad (210)$$

matrica

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix},$$

koja sadrži sve prve parcijalne derivacije vektorske funkcije, naziva se *Jacobijevom matricom* te funkcije.<sup>31</sup>

Dirne ravnine sijeku ravninu  $(xy)$  u dva pravca (slika 131.) sjecište kojih je nul-točka  $\bar{\mathbf{x}}_0^{(k)}$  funkcije  $\bar{\mathbf{f}}^{(k)}$ . Koordinate te točke rješenje su sustava linearnih jednadžbi<sup>32</sup>

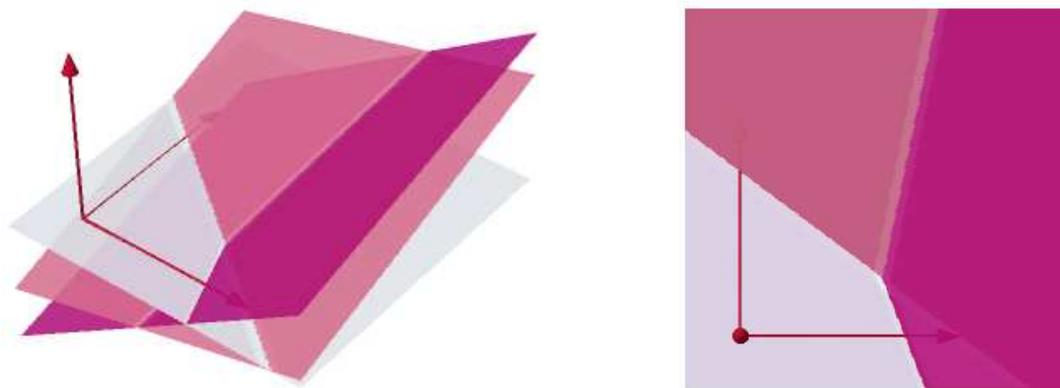
$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0}. \quad (211)$$

<sup>31</sup> Budući da je  $\mathbf{f}$  gradijent funkcije  $\mathfrak{L}$ , komponente matrice  $d\mathbf{f}/d\mathbf{x}$  druge su parcijalne derivacije te funkcije. Matrica koja sadrži sve druge parcijalne derivacije skalarne funkcije naziva se njezinom *Hesseovom matricom*.

<sup>32</sup> Formalno je, po analogiji s izrazom (11),

$$\bar{\mathbf{x}}_0^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[ \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(k)}) \right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}),$$

ali nikada nije — ni s gledišta učinkovitosti, ni s gledišta točnosti — uputno sustav rješavati invertiranjem matrice. Sustav treba riješiti nekim direktnim (Gaussovom eliminacijom, primjerice) ili iteracijskim postupkom.



Slika 131.

Nul-točka  $\bar{\mathbf{x}}_0^{(k)}$  funkcije  $\bar{\mathbf{f}}^{(k)}$  aproksimacija je nul-točke  $\mathbf{x}_0$  funkcije  $\mathbf{f}$ . Sljedeća i — treba se nadati — bolja aproksimacija bit će nul-točka funkcije  $\bar{\mathbf{f}}^{(k+1)}$ , odnosno, rješenje linearnoga sustava

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(k+1)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \mathbf{0},$$

gdje je  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{x}}_0^{(k)}$ .

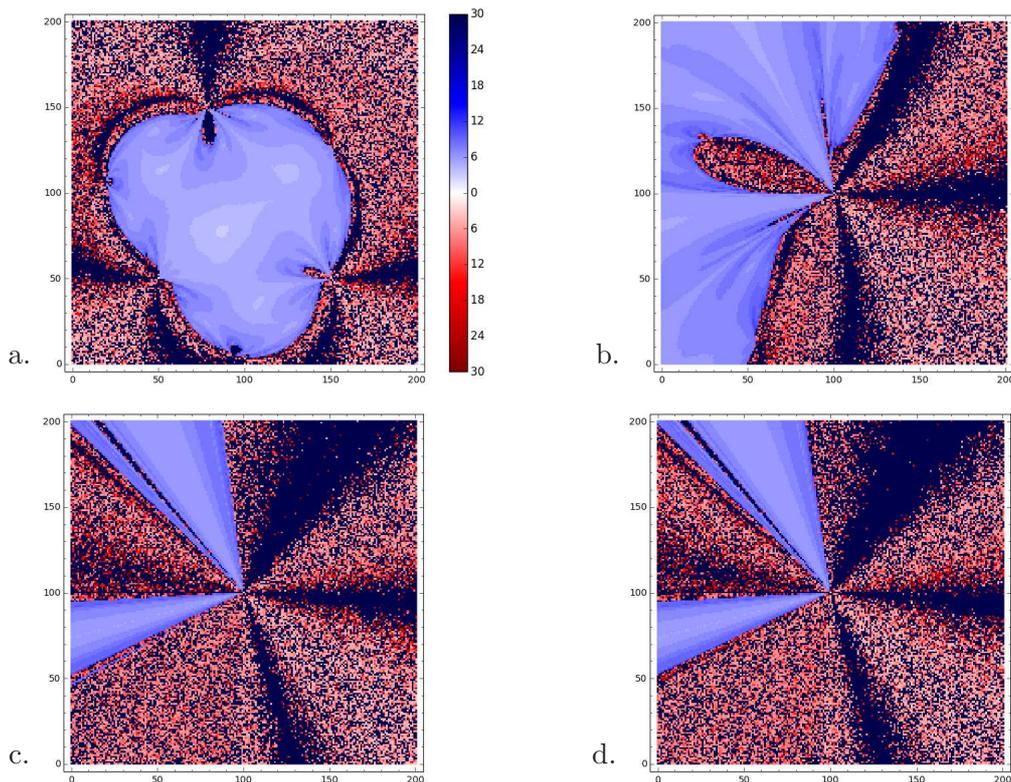
Primjerice, povijest rješavanja sustava ( $\spadesuit$ ), s točnošću  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\|_\infty \leq 1 \cdot 10^{-5}$  i početnom aproksimacijom  $\mathbf{x}^{(0)} = [2,0 \ 2,0]^T$ , dana je u tablici 4.;  $\|\mathbf{v}\|_\infty$  po apsolutnoj je vrijednosti najveća komponenta vektora  $\mathbf{v}$ ,  $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max(\{|v_i|\}_{i=1}^n)$ .

Tablica 4.

$k$	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\ _\infty$
0	$[2,0 \ 2,0]^T$	0,279 684
1	$[1,905 36 \ 1,267 67]^T$	0,058 836 1
2	$[1,839 83 \ 1,364 79]^T$	0,001 515 27
3	$[1,843 51 \ 1,367 74]^T$	$1,745 56 \cdot 10^{-6}$

Uzmemo li da je točka dobivena u posljednjem koraku Fermatova točka, duljine spojnice te točke s točkama A, B i C su  $\ell_{\{F,A\}} = 2,295 48$ ,  $\ell_{\{F,B\}} = 3,440 08$  i  $\ell_{\{F,C\}} = 3,656 29$ , a njihov je zbroj  $\mathfrak{L}_{\min} = 9,391 85$ . To je duljina sustava najkraćih spojnica; usporedbe radi, zbroj je duljina spojnica točaka A, B i C s točkom  $(1, 1)$  9,559 83, dok je zbroj duljina njihovih spojnica s točkom  $(2, 2)$  9,488 59.

Kao što smo već pri rješavanju problema s kojim se suočio Don Quijote pokazali, Newton–Raphsonov je postupak osjetljiv na izbor početne aproksimacije rješenja. Na slici 132. svaka je točka odabranih područja ravnine  $(xy)$  obojena bojom koja odgovara broju koraka urađenih pri rješavanju sustava ( $\spadesuit$ ), ako je potraga započela u njoj. Na prvoj je slici područje kvadrat  $[-2,5; 7,5]^2$ , tako da je obuhvaćen cijeli trokut  $\triangle ABC$ , dok su na preostale tri slike područja kvadrati veličina  $2 \times 2$ ,  $0,002 \times 0,002$  i  $0,000 002 \times 0,000 002$

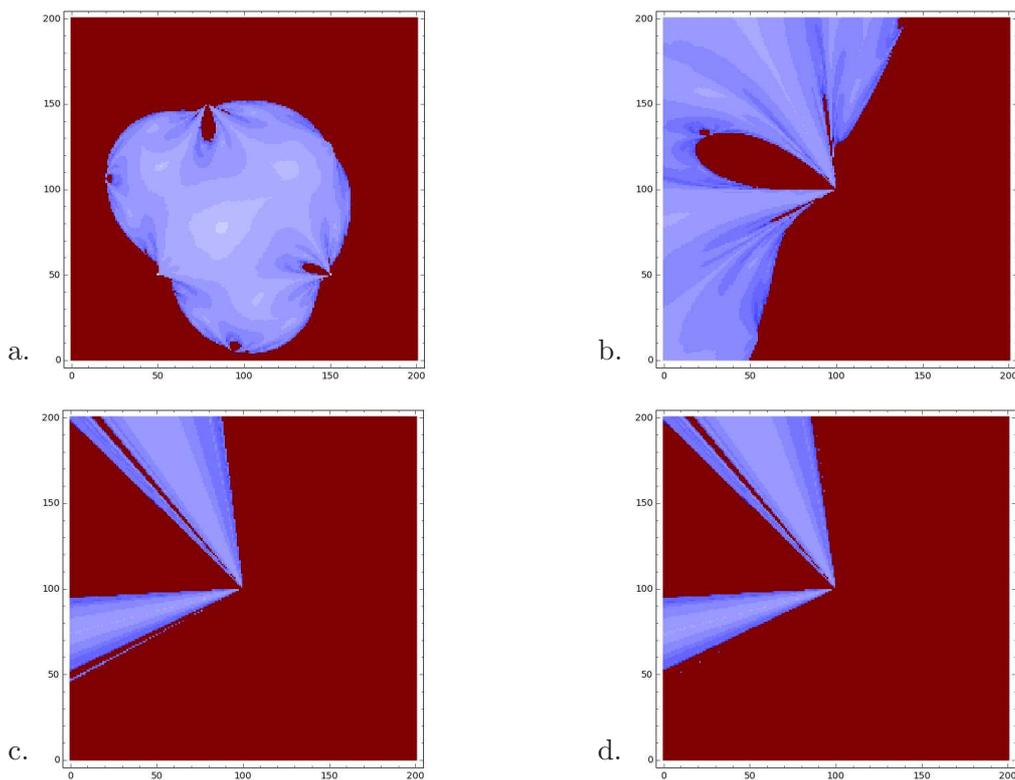


Slika 132.

sa središtem u točki B. Sva četiri područja prekrivena su pravilnim mrežama koje sadrže  $201 \times 201$  točaka.

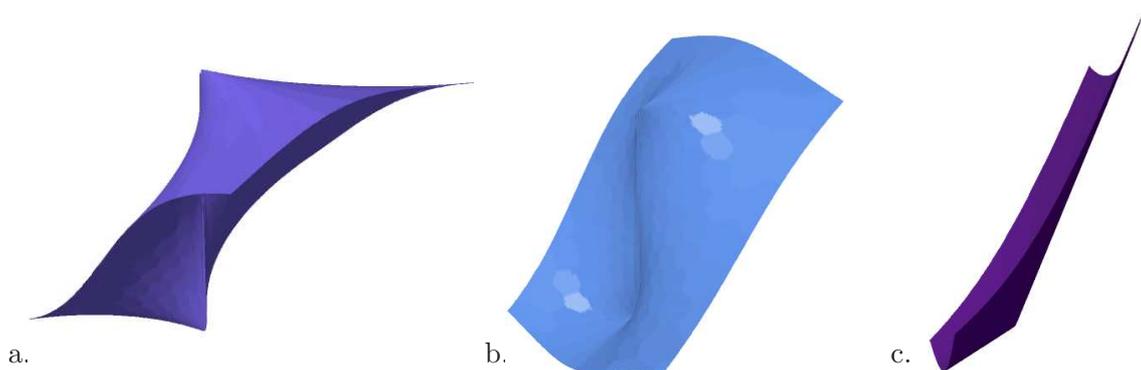
Nijanse plave boje — osim najtamnije — označavaju brojeve koraka potrebnih za do-sizanje rješenja s točnošću  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\|_{\infty} \leq 1 \cdot 10^{-5}$ . Od potrage smo odustajali ako rješenje do tridesetoga koraka nije nađeno. To znači da ne znamo hoćemo li počinjući u točkama obojenima najtamnijom nijansom plave boje, koja označava najveći broj koraka, doći do rješenja — možda već u sljedećem koraku — ili ćemo otputovati u beskraj. Iz točaka pak obojenih crvenom bojom do rješenja se ne može doći; nijanse boje označavaju brojeve koraka urađenih prije odlaska u beskraj. Na slici 133. crvenom smo bojom obojili sve točke iz kojih nismo došli do rješenja.

Budući da znamo da Fermatova točka leži u trokutu  $\triangle ABC$ , za početnu je aproksimaciju prirodno uzeti neku točku u njemu. Ipak, na slici 132.a. možemo vidjeti da i u trokutu postoje područja polazeći iz kojih ne možemo doći do rješenja ili barem ne znamo hoćemo li do rješenja doći u prihvatljivom broju koraka. Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  nisu definirane u točkama A, B i C. U izrazima kojima su zadane (na stranici 169.) u nazivnicima su pri-brojnika duljine nití, a u brojnicima razlike pojedinih koordinata čvorova između kojih su te niti razapete (brojnik prvoga pribrojnika prvog izraza u stvari je  $x - 0 = x - x_A$ , a slično vrijedi i za brojnik prva dva pribrojnika drugog izraza). Ako su vrijednosti koje poprime varijable  $x$  i  $y$  jednake koordinatama točaka A, B ili C, odgovarajući pribroj-nici postaju neodređenim izrazima  $0/0$ . Na slikama 134.a. i b. prikazani su isječci grafova funkcija  $f_1$  i  $f_2$  u neposrednim okolišima točaka  $(x_B, y_B, f_1(x_B, y_B))$  i  $(x_B, y_B, f_2(x_B, y_B))$ . Funkcije poprimaju različite granične vrijednosti prilazi li se točki B po različitim prav-



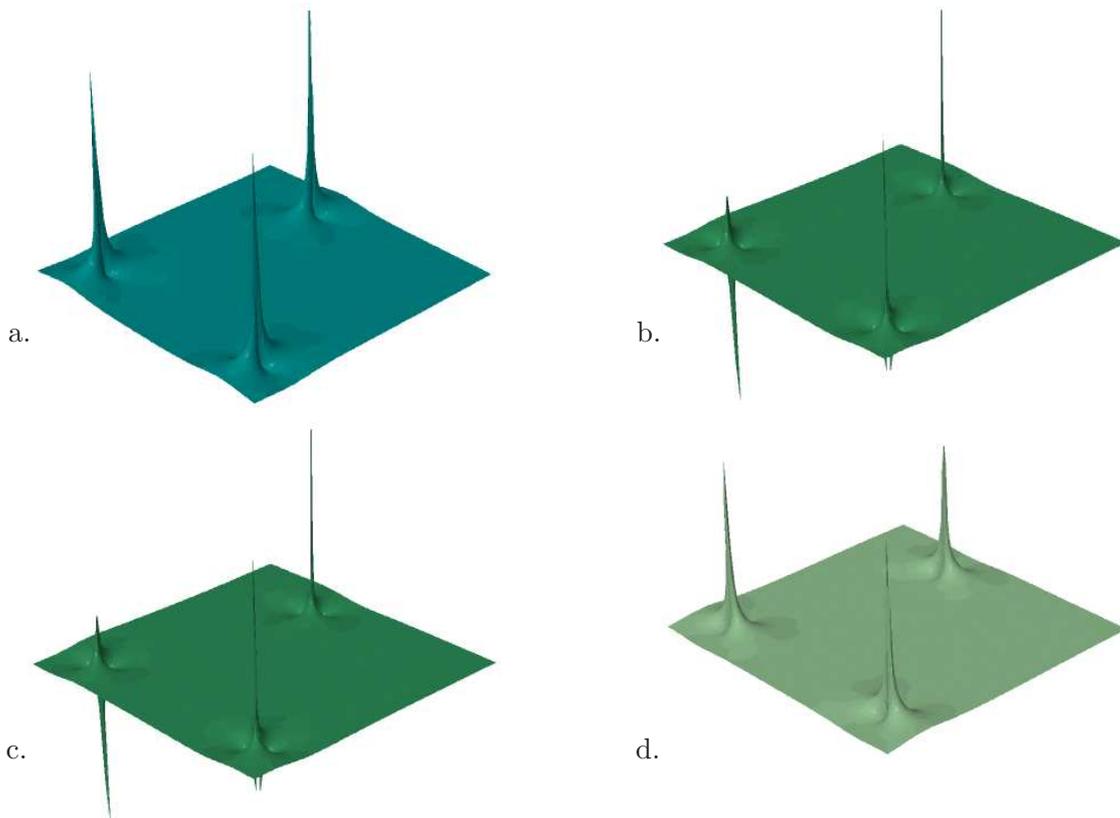
Slika 133.

cima, a slično se — nimalo „pristojno” — ponašaju i u okolišima točaka A i C (slika 128.). Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  prve su parcijalne derivacije funkcije  $\mathcal{L}$ . U točkama  $(x_A, y_A, \mathcal{L}(x_A, y_A))$ ,  $(x_B, y_B, \mathcal{L}(x_B, y_B))$  i  $(x_C, y_C, \mathcal{L}(x_C, y_C))$  njezin graf  $\Gamma_{\mathcal{L}}$  (slika 122.) ima šiljke (isječak u neposrednom okolišu točke  $(x_B, y_B, \mathcal{L}(x_B, y_B))$  prikazan je na slici 134.c.), a to znači da u točkama A, B i C njezine derivacije nisu definirane.



Slika 134.

I kao da sve to već nije dovoljno loše, za provođenje Newton–Raphsonova postupka potrebne su nam i parcijalne derivacije funkcija  $f_1$  i  $f_2$ , a deriviranjem se diskontinuiranost i „neuglađenost” funkcija povećavaju (grafovi su prikazani na slici 135.; a.:  $\partial f_1/\partial x$ , b.:  $\partial f_1/\partial y$ , c.:  $\partial f_2/\partial x$ , d.:  $\partial f_2/\partial y$ ).

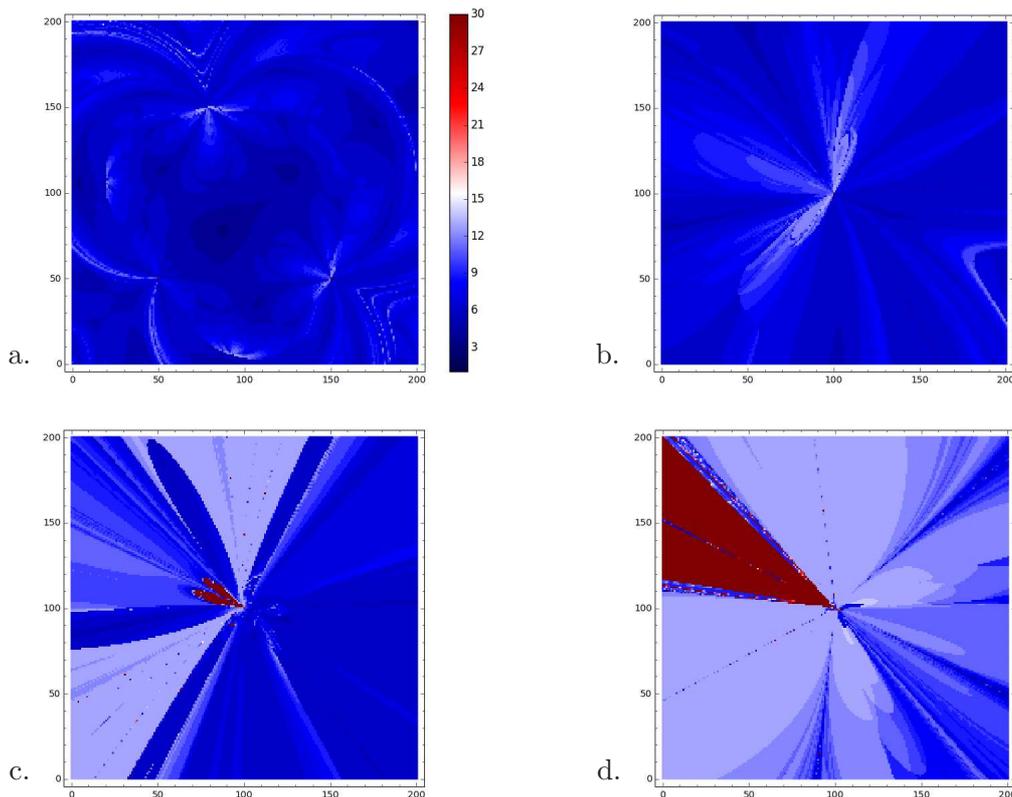


Slika 135.

Neka je  $\mathbf{f} : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ , funkcija nul-točku koje tražimo. Skup točaka u prostoru  $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{D}_f$  (u našem primjeru u ravnini  $(xy) = \mathbb{R}^2$ ), polazeći iz kojih se u nekom iteracijskom postupku može doći do rješenja, nazivamo *područjem konvergencije* tog postupka. Područja konvergencije ponajčešće su izrazito nepravilnih oblika i vrlo fine, upravo filigranske građe, posebno izražene na njihovim rubovima — neznatan pomak može prouzročiti bitno drugačije ponašanje i odlučiti između konvergencije i divergencije [22, 23], kao što smo za naš primjer vidjeli na slikama 132. i 133. Različiti iteracijski postupci imaju različita područja konvergencije.

Područje konvergencije Newton–Raphsonova postupka može se *pretraživanjem po pravcu* povećati tako da prekrije gotovo cijeli prostor [37]. Na slici 136. prikazana su ista područja kao na slikama 132. i 133., ali boje sada označavaju brojeve koraka u rješavanju sustava ( $\spadesuit$ ) Newton–Raphsonovim postupkom s pretraživanjem po pravcu.<sup>33</sup> Iz točaka obojenih bojom koja označava najveći broj koraka do rješenja se najvjerojatnije ne može doći.

<sup>33</sup> Nećemo ulaziti u detalje nego ćemo tek napomenuti, potpunosti radi, da je primijenjena programska funkcija `newton_krylov()`, sadržana u programskom paketu SciPy [54] koji je (uz mnoge druge) uključen u simbolički programski paket Sage [59]. Ta je funkcija programska realizacija Newton–Krilovljevih postupaka u kojima se u svakom koraku vanjske, Newton–Raphsonove petlje linearni sustavi (211) rješavaju odabranim Krilovljevim iteracijskim postupcima (poput postupka konjugiranih gradijenata (Conjugate Gradient, CG) ili postupka poopćenoga najmanjeg reziduala (Generalized Minimal RESidual, GMRES)) koji tvore unutarnju petlju [37]. Duljina koraka se u pretraživanju po pravcu određuje pomoću Armijova pravila [37].



Slika 136.

## 5.8. Poopćene minimalne mreže kabelâ

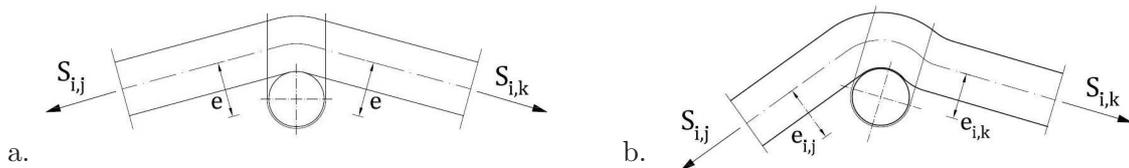
### 5.8.1. Različite vrijednosti sila

Lako je vidjeti da za međusobno različite vrijednosti  $S_{i,j}$  sila u štapovima sustav jednadžbi ravnoteže (202) izražava uvjete minimuma funkcije  $\mathfrak{E}$  dane izrazom

$$\mathfrak{E}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}} S_{\{i,j\}} \ell_{\{i,j\}}. \quad (212)$$

Spoje li se u čvoru dva mimoilazna užeta prije no što se izjednače vrijednosti sila uzduž njih, sile će u priključenim štapovima istoga užeta biti različite, pa spoj mora s jednoga užeta na drugo, „poprečno”, osim normalne kontaktne sile prenijeti i tangencijalnu. Kako jedno uže prelazi preko ili ispod drugoga, njihove se osi ne sijeku (sijeku se samo u našem proračunskom modelu). Budući da se vrijednosti sila u dva u čvor priključena štapa jednoga užeta međusobno razlikuju,  $S_{\{i,j\}} \neq S_{\{i,k\}}$ , razlikovat će se međusobno i vrijednosti momenata tih sila u odnosu na os poprečnog užeta:  $e S_{\{i,j\}} \neq e S_{\{i,k\}}$  (slika 137.a.). Čvor će se zaokrenuti kako bi se smanjio krak sile veće vrijednosti i time uravnotežili momenti:  $e_{\{i,j\}} S_{\{i,j\}} = e_{\{i,k\}} S_{\{i,k\}}$  (slika 137.b.). Razlike vrijednosti sila u štapovima jednoga užeta moraju biti što manje, tako da i zaokretanje čvorova bude maleno.

Napinju li se različiti kabeli različitim silama i spoje u čvorovima tek kad dokližu u ravnotežnu konfiguraciju, uzduž pojedinih će kabela vrijednosti sila  $S_{i,j}$  biti međusobno jednake, pa se čvorovi neće izobličiti. Takve mreže, s različitim vrijednostima sila u



Slika 137.

različitim kabelima, ali nepromjenjivih uzduž kabela, nazvat ćemo „prirodnim” *poopćenim minimalnim mrežama kabela* (jer „[m]reža dolazi u prirodnu ravnotežnu konfiguraciju ako se za prednapinjanja omogući klizanje”, [21]), za razliku od „apstraktnoga” *poopćenja* u kojem su vrijednosti sila  $S_{i,j}$  međusobno potpuno neovisne. Treba, međutim, reći da će se, nakon povezivanja kabela, vrijednosti sila u štapovima pod promjenjivim opterećenjem mijenjati u različitim omjerima, pa ni u „prirodnim” mrežama neće više biti jednake uzduž pojedinih kabela. No, te će razlike biti malene u odnosu na vrijednosti prednaponskih sila.

Mogućnost zadavanja različitih vrijednosti sila u različitim kabelima bitno povećava skup oblika ostvarivih u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi. Pritom su važni omjeri vrijednosti sila u kabelima, a ne njihove „apsolutne” vrijednosti: pomnožimo li sve vrijednosti sila istim koeficijentom  $s \neq 0$ , bit će

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} s S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} = s \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} \quad \text{Étc.},$$

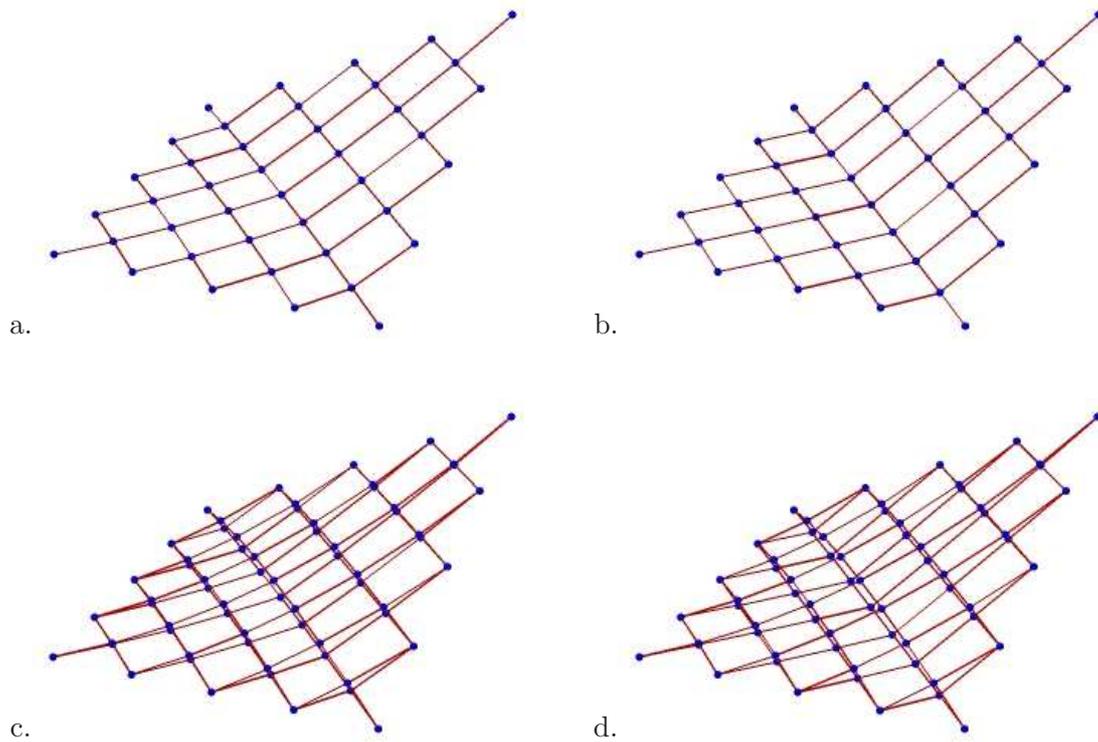
a znamo da je

$$sA = 0 \quad \iff \quad A = 0 \quad \text{za } s \neq 0.$$

Ako se sile u drugim kabelima ne mijenjaju, odabrano se uže povećanjem sile u njemu nateže, pa se ukupna duljina štapova od kojih je sastavljeno smanjuje, pri čemu se prostorna poligonalna linija koju ti štapovi tvore izravnava i približava pravocrtnoj spojnici njegovih krajeva. (Iako je uže poligonalna linija, a ne krivulja, često se kaže da se natezanjem njegova zakrivljenost smanjuje.) Na slici 138.a. prikazana je mreža u kojoj je vrijednost sile u jednom kabelu [kojem?] 10 puta veća od vrijednosti sila u ostalim kabelima, dok je u mreži na slici b. vrijednost sile u tom kabelu 50 puta veća. Na slikama c. i d. te su mreže usporedbe radi „preklopljene” preko mreže u kojoj su vrijednosti sila u svim kabelima jednake (prikazane na slici 112.b.).

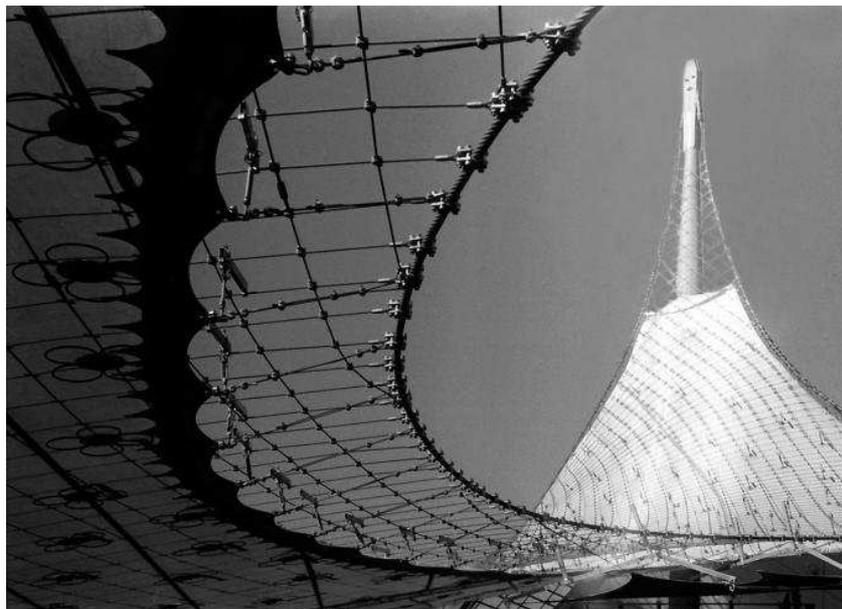
### 5.8.2. Rubni kabeli

Mreže užadi u primjerima na slikama 112. i 138.a. i b. imaju „krute” rubove (ravne ili zakrivljene grede), pa su koordinate svih rubnih čvorova poznate. Prednapete konstrukcije od užadi često se, međutim, izvode s rubnom užadi (slike 1., 8. i 139.). Ti su rubni kabeli samo u nekim točkama, obično krajnjima, spojeni s „krutim” konstrukcijskim elementima, tako da su poznate koordinate samo tih, „ležajnih” čvorova. Stoga nalaženje oblika rubnih kabela postaje dijelom nalaženja oblika cijele mreže. U rubnim



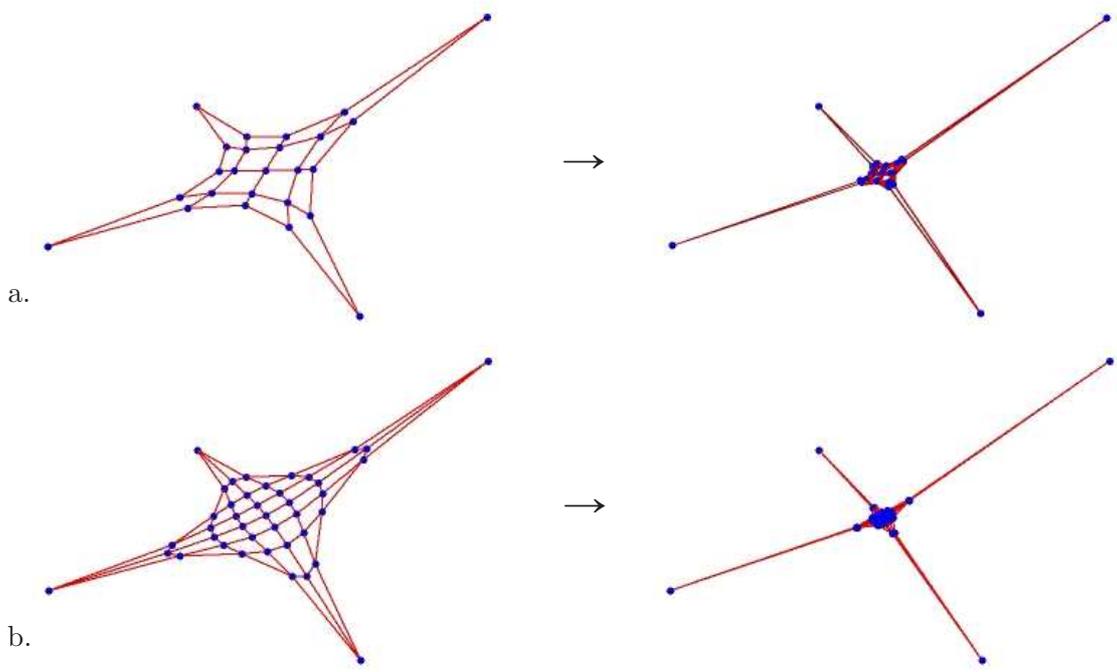
Slika 138.

su kabelima vrijednosti sila znatno veće negoli u unutarnjima. Zbog tih su većih sila i promjeri rubnih kabela veći (slika 139.), no, kao što smo već rekli, u fazi nalaženja oblika ploštine poprečnih presjeka ne treba definirati.



Slika 139. Frei Otto: Njemački paviljon na izložbi Expo '67 u Montrealu

Međutim, kao što primjeri na slici 140. pokazuju, može se dogoditi da po rubnim kabelima dva čvora ili više njih otkližu u jednu točku. To će se dogoditi neovisno o vrijednostima sila u rubnim kabelima — ni znatnim povećanjem vrijednosti tih sila u odnosu na vrijednosti sila u priključenim kabelima ne možemo spriječiti neograničeno približavanje i stapanje čvorova. Povećavanjem vrijednosti sila u rubnim kabelima približavanje čvorova možemo „usporiti”, ali netrivialno, nesingularno ravnotežno stanje ne postoji.



Slika 140.



Slika 141.

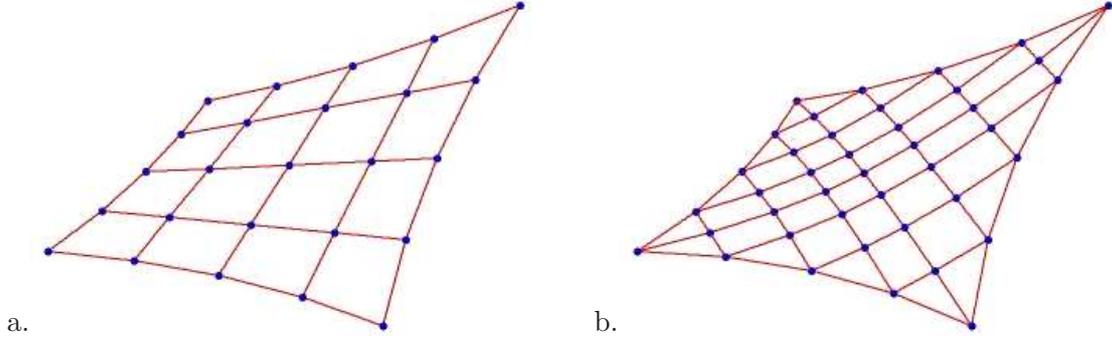
Zbog toga ćemo spriječiti klizanje u spojevima unutarnjih kabela s rubnim kablom (spoj je prikazan na slici 141.) i kinematičkim ograničenjima propisati duljine  $\bar{\ell}_{\{i,j\}}$  štapova na rubnim kabelima:

$$\ell_{\{i,j\}} = \bar{\ell}_{\{i,j\}} \quad (213)$$

za  $\{i, j\} \in \mathcal{B}_c$ , gdje je  $\mathcal{B}_c$  niz štapova na rubnim kabelima. Općenitije,  $\mathcal{B}_c$  je niz štapova

duljine kojih su zadane — pri zadavanju duljina štapova ne moramo se ograničiti na rubne kabele. Broj je kinematičkih ograničenja  $n_c$ .

Na slici 142. prikazane su dvije mreže sa zadanim duljinama štapova na rubnim kabeleima. Za razliku od mreža sa slika 112.a. i b., ležajni su samo ugaoni čvorovi, a ostali rubni čvorovi leže na rubnim kabeleima.



Slika 142.

Kinematička ćemo ograničenja u proračun uvesti pomoću Lagrangeovih multiplikatora [41]. Jednadžbe kinematičkih ograničenja pišemo stoga u obliku

$$\ell_{\{i,j\}} - \bar{\ell}_{\{i,j\}} = 0, \quad (214)$$

lijeve strane množimo novouvedenim varijablama  $\lambda_{\{i,j\}}$ , nazvanima Lagrangeovim multiplikatorima, i pribrajamo funkciji  $\mathfrak{E}$ . Time dobivamo novu funkciju  $\mathfrak{E}_c : \mathbb{R}^{3n_f+n_c} \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu izrazom

$$\mathfrak{E}_c(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}, \{\lambda\}_{\{i,j\} \in \mathcal{B}_c}) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}} S_{\{i,j\}} \ell_{\{i,j\}} + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}_c} \lambda_{\{i,j\}} (\ell_{\{i,j\}} - \bar{\ell}_{\{i,j\}}). \quad (215)$$

Izjednačavanje njezinih derivacija po koordinatama slobodnih čvorova s nulom daje (nakon množenja sa  $-1$ ) jednadžbe

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^c} \lambda_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^c} \lambda_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\ell_{\{i,j\}}} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^c} \lambda_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\ell_{\{i,j\}}} &= 0 \end{aligned} \quad (216)$$

za  $i \in \mathcal{N}_f$ , pri čemu smo sa  $\mathcal{N}_i^c$  označili podniz niza  $\mathcal{N}_i$  koji sadrži indekse „susjedâ” čvora  $i$  s njim povezanih štapovima zadane duljine. Izjednačavanjem pak s nulom derivacija funkcije  $\mathfrak{E}_c$  po Lagrangeovim multiplikatorima dobivamo jednadžbe kinematičkih ograničenja (214). Jednadžbe (216) i (214) zajedno čine sustav koji sadrži  $3n_f+n_c$  jednadžbi sa  $3n_f+n_c$  nepoznanica; sada su, naime, osim koordinata slobodnih čvorova, nepoznanice i multiplikatori  $\lambda_{i,j}$ .

Međutim, Newton–Raphsonov postupak primijenjen na rješavanje tog sustava razočaravajuće sporo konvergira. Razlog tomu nije veći broj jednadžbi i nepoznanica (u primjerima sa slike 142. dodatnih  $12 \times 3$  koordinata čvorova na rubnim kabeleima i 16 multiplikatora, odnosno

dotatnih 36 jednadžbi ravnoteže i 16 jednadžbi kinematičkih ograničenja). Konvergencija je usporena ponajprije zato što, kao što ćemo pokazati u sljedećem odjeljku, uporaba Lagrangeovih multiplikatora problem minimizacije pretvara u problem sedlaste točke.

Jednadžbe (216) možemo pisati i u obliku

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \mathcal{N}_i^c} S_{i,j} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^c} (S_{\{i,j\}} + \lambda_{\{i,j\}}) \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} = 0 \quad \text{etc.} \quad (217)$$

gdje je  $\mathcal{N}_i \setminus \mathcal{N}_i^c$  podniz niza  $\mathcal{N}_i$  s indeksima „susjedâ” čvora  $i$  koji s njim nisu povezani štapovima zadane duljine. Izraz pokazuje da su multiplikatori  $\lambda_{\{i,j\}}$  dodatne vrijednosti sila, potrebne da se osiguraju tražene duljine štapova. To znači da više nemamo potpunu kontrolu nad vrijednostima sila u kabelima — zadane vrijednosti sila u rubnim kabelima promijenit će se za vrijednosti  $\lambda_{\{i,j\}}$  koje nisu poznate prije rješavanja sustava. I, budući da smo spriječili klizanje, vrijednosti sila u štapovima jednog rubnog kabela neće biti međusobno jednake.

U svim su unutarnjim kabelima mreža prikazanih na slici 142. vrijednosti sila 1. Početne su vrijednosti sila u rubnim kabelima bile 10. Dobivene vrijednosti  $\lambda_{\{i,j\}}$  u rasponu su od  $-0,524$  do  $0,309$ , što znači da se konačne vrijednosti sila u štapovima rubnih kabela kreću u rasponu od  $9,476$  do  $10,309$ .

## 5.9. Steinerov problem (varijacija)

Propisat ćemo sada duljinu niti  $\{C, F\}$ : neka je  $\ell_{\{C,F\}} = \bar{\ell}_{\{C,F\}} = 2,625$  (u rješenju je izvornoga Steinerova problema  $\ell_{\{C,F\}} \cong 3,656$ ). Točka  $F$  mora stoga ležati na kružnici polumjera  $\bar{\ell}_{\{C,F\}}$  sa središtem u točki  $C$ , tako da sada tražimo točku  $(x, y)$  za koju je  $(x, y, \mathfrak{L}(x, y))$  najniža točka prodorne krivulje plohe  $\Gamma_{\mathfrak{L}}$  i uspravnoga valjka  $\mathfrak{c}$  kojemu je ta kružnica osnovica (slika 143.), a ne najniža točka plohe  $\Gamma_{\mathfrak{L}}$ .

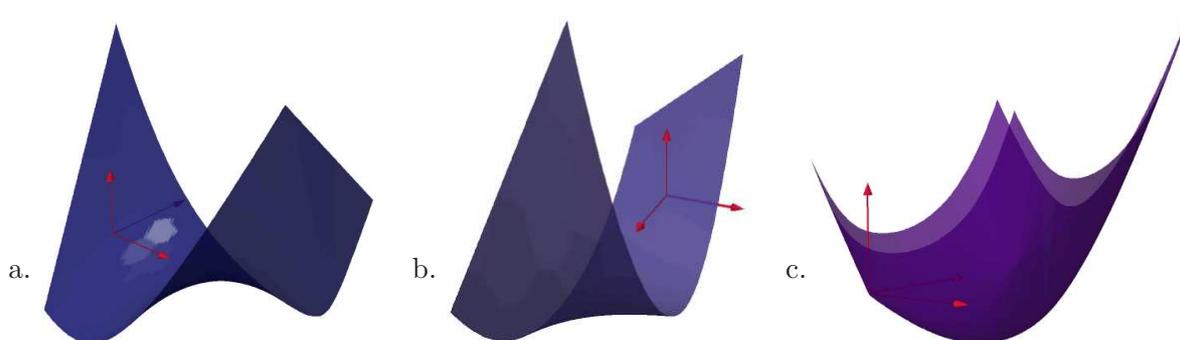


Slika 143.

Uvedeno kinematičko ograničenje pisat ćemo u obliku  $\ell_{\{C,F\}} - 2,625 = 0$ . Množenjem lijeve strane tog izraza Lagrangeovim multiplikatorom  $\lambda$  i pribrajanjem funkciji  $\mathfrak{L}$ , dobivamo funkciju

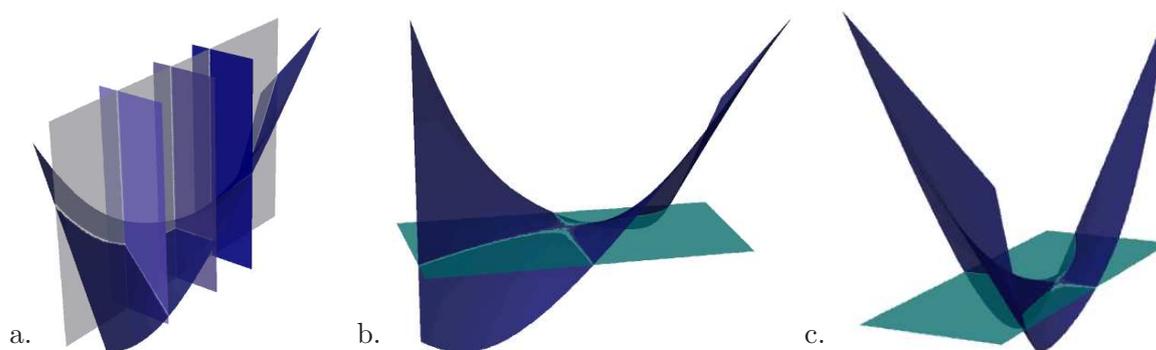
$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\mathfrak{c}} : (x, y, \lambda) \mapsto & \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1,425)^2 + (y-5)^2} \\ & + \lambda \left( \sqrt{(x-1,425)^2 + (y-5)^2} - 2,625 \right). \end{aligned} \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Kako je to funkcija triju varijabli, njezin je graf hiperploha u četverodimenzionalnom prostoru. Presjek hiperplohe i hiperravnine  $x = 1,79755$  ploha je u trodimenzionalnom prostoru te hiperravnine. Drugim riječima, ta je ploha graf funkcije  $\mathfrak{L}_c(1,79755; \cdot; \cdot)$  dviju varijabli  $y$  i  $\lambda$ . Na slici 144.a. prikazan je isječak te plohe za  $(y, \lambda) \in [-1, 6] \times [-1, 1]$ , dok je na slici b. prikazan isječak presjeka grafa funkcije  $\mathfrak{L}_c$  hiperravninom  $y = 2,40157$  za  $(x, \lambda) \in [-1, 6] \times [-1, 1]$ . I na kraju, na slici c. prikazan je graf funkcije  $\mathfrak{L}_c(\cdot; \cdot; 0,414860)$  nad područjem  $[-1, 6]^2$ . Ta je ploha vrlo slična grafu funkcije  $\mathfrak{L}$  (slika 122.a.), što nije nimalo slučajno, jer je  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_c(\cdot, \cdot, 0)$ .



Slika 144.

Grafovi svih funkcija  $\mathfrak{L}_c(\cdot, \cdot, \lambda)$  za odabrane  $\lambda$  konveksne su plohe. Grafovi funkcija  $\mathfrak{L}_c(x, \cdot, \cdot)$  i  $\mathfrak{L}_c(\cdot, y, \cdot)$  to, međutim, nisu. Presjeci tih ploha ravninama  $\lambda = \text{const}$  jesu konkavne krivulje, ali su presjeci prve plohe ravninama  $y = \text{const}$ , a druge ravninama  $x = \text{const}$  pravci (slika 145.a.: prva ploha). U najnižoj točki konveksne plohe, koja odgovara minimumu funkcije kojoj je ploha graf, dirna je ravnina horizontalna, a ploha je cijela iznad nje. Horizontalne dirne ravnine grafova funkcija  $\mathfrak{L}_c(x, \cdot, \cdot)$  i  $\mathfrak{L}_c(\cdot, y, \cdot)$  te plohe ujedno i sijeku (slike 145.b. i c.: graf funkcije  $\mathfrak{L}_c(x, \cdot, \cdot)$ ). Diralište horizontalne dirne ravnina koja plohu dira i sijече naziva se *sedlastom točkom*, a sama ploha *sedlastom plohom*. Ploha je dijelom iznad, a dijelom ispod dirne ravnine u sedlastoj točki, što znači da sedlasta točka nije najniža točka plohe, te da funkcija, graf koje je ta ploha, u pripadnoj točki nema minimum. Izjednačavanje derivacija funkcije s nulom izražava uvjete *stacionarnosti*, koji su samo za funkcije s konveksnim grafovima uvjeti minimuma. Budući da funkcije  $\mathfrak{L}_c(x, \cdot, \cdot)$  i  $\mathfrak{L}_c(\cdot, y, \cdot)$  nemaju minimume (iako ga funkcija  $\mathfrak{L}_c(\cdot, \cdot, \lambda)$  ima), minimum nema ni funkcija  $\mathfrak{L}_c$ .



Slika 145.

Uvjeti stacionarnosti funkcije  $\mathfrak{L}_c$  su

$$\begin{aligned} \frac{(1+\lambda)x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2+y^2}} + \frac{x-1,425}{\sqrt{(x-1,425)^2+(y-5)^2}} &= 0, \\ \frac{(1+\lambda)y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-5)^2+y^2}} + \frac{y-5}{\sqrt{(x-1,425)^2+(y-5)^2}} &= 0, \quad (\spadesuit\spadesuit) \\ \sqrt{(x-1,425)^2+(y-5)^2} - 2,625 &= 0. \end{aligned}$$

Stacionarna je točka  $(1,797\,55; 2,401\,57; 0,414\,860)$ , pa su  $F(1,797\,55; 2,401\,57)$  i  $\lambda = 0,414\,860$ , tako da, želimo li da duljina niti  $\{C, F\}$  bude  $\ell_{C,F} = 2,625$  i da zbroj duljina druge dvije niti biti najmanji mogući, omjeri vrijednosti sila u nitima moraju biti

$$S_{\{F,A\}} : S_{\{F,B\}} : S_{\{F,C\}} = 1 : 1 : (1 + \lambda) = 1 : 1 : 1,414\,86.$$

Sila u niti  $\{C, F\}$  treba, prema tome, biti veća od sila u druge dvije niti, što je u skladu s našim očekivanjem: budući da je tražena duljina niti  $\{C, F\}$  manja od duljine u minimalnoj mreži, sila u njoj mora točku  $F$  privući točki  $C$ . Ako je pak propisana duljina niti  $\{C, F\}$  veća od duljine u minimalnoj mreži, vrijednost sile u njoj bit će manja od vrijednosti u ostalim nitima, jer će tada te dvije sile morati točku  $F$  privući spojnici točaka  $A$  i  $B$ . Primjerice, za  $\ell_{\{C,F\}} = \bar{\ell}_{\{C,F\}} = 4,325$  su  $F(1,771\,86; 0,688\,931)$  i  $\lambda = -0,427\,051$ , tako da će omjeri vrijednosti sila u nitima biti  $S_{\{F,A\}} : S_{\{F,B\}} : S_{\{F,C\}} = 1 : 1 : 0,572\,949$ .

Nalaženje sedlaste točke mnogo je teže od nalaženja minimuma — intuitivno, dok pri nalaženju minimuma funkcije „spuštanje nizbrdo” osigurava približavanje rješenju, u problemu traženja sedlaste točke to može biti strmoglavi pad u ponor, u  $-\infty$ . Konkretnije pak, Jacobijeve matrice u problemima sa sedlastim točkama imaju posebnu strukturu. Jednadžbe kinematičkih ograničenja ne sadrže Lagrangeove multiplikatore, pa derivacije njihovih lijevih strana po multiplikatorima iščezavaju. Stoga, ako se jednadžbe kinematičkih ograničenja svrstaju iza jednadžbi ravnoteže, a Lagrangeovi multiplikatori, kao nepoznanice, iza koordinata slobodnih čvorova, donji desni blok Jacobijeve matrice bit će kvadratna nul-matrica tipa  $n_c \times n_c$ . U našem je primjeru  $\lambda$  treća nepoznanica, a jednadžba kinematičkog ograničenja treća jednadžba u sustavu koji izražava uvjete stacionarnosti, pa je Jacobijeva matrica, izračunana, recimo, u točki  $(1; 1; 0,1)$ ,

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(1; 1; 0,1) = \begin{bmatrix} 0,638\,228 & -0,325\,217 & -0,105\,655 \\ -0,325\,217 & 0,584\,875 & -0,994\,403 \\ -0,105\,655 & -0,994\,403 & 0 \end{bmatrix}.$$

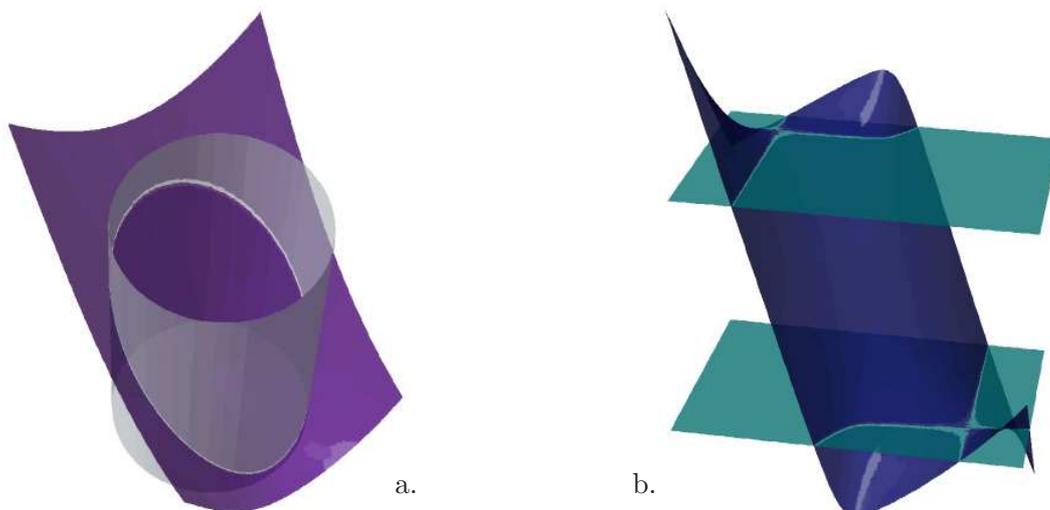
Ta matrica nije pozitivno definitna<sup>34</sup>, što ograničava broj postupaka kojima se pripadni linearni sustav može riješiti<sup>35</sup>.

Našu priču dodatno zapliće to što prodorna krivulja plohe  $\Gamma_{\mathfrak{L}}$  i valjka  $c$  osim najniže ima i najvišu točku (slika 146.a.), a to pak znači da grafovi funkcija  $\mathfrak{L}_c(x, \cdot, \cdot)$  i  $\mathfrak{L}_c(\cdot, y, \cdot)$  imaju po dvije horizontalne dirne ravnine u dvije sedlaste točke (slika 146.b.: graf prve funkcije). Sustav  $(\spadesuit\spadesuit)$  ima stoga dva rješenja.

Drugo je rješenje  $(0,946\,157; 7,580\,96; -2,906\,12)$ . Točka  $G(0,946\,157; 7,580\,96)$  je izvan trokuta  $\triangle ABC$ , a  $\lambda = -2,906\,12$  daje omjere vrijednosti sila  $S_{\{G,A\}} : S_{\{G,B\}} : S_{\{G,C\}} = 1 : 1 : -1,906\,12$ . Ako su sile  $S_{\{G,A\}}$  i  $S_{\{G,B\}}$  vlačne, sila  $S_{\{G,C\}}$  mora biti tlačna, pa  $\{C, G\}$  ne može biti nit. Ako je pak sila  $S_{\{G,C\}}$  vlačna, druge dvije sile moraju biti tlačne.

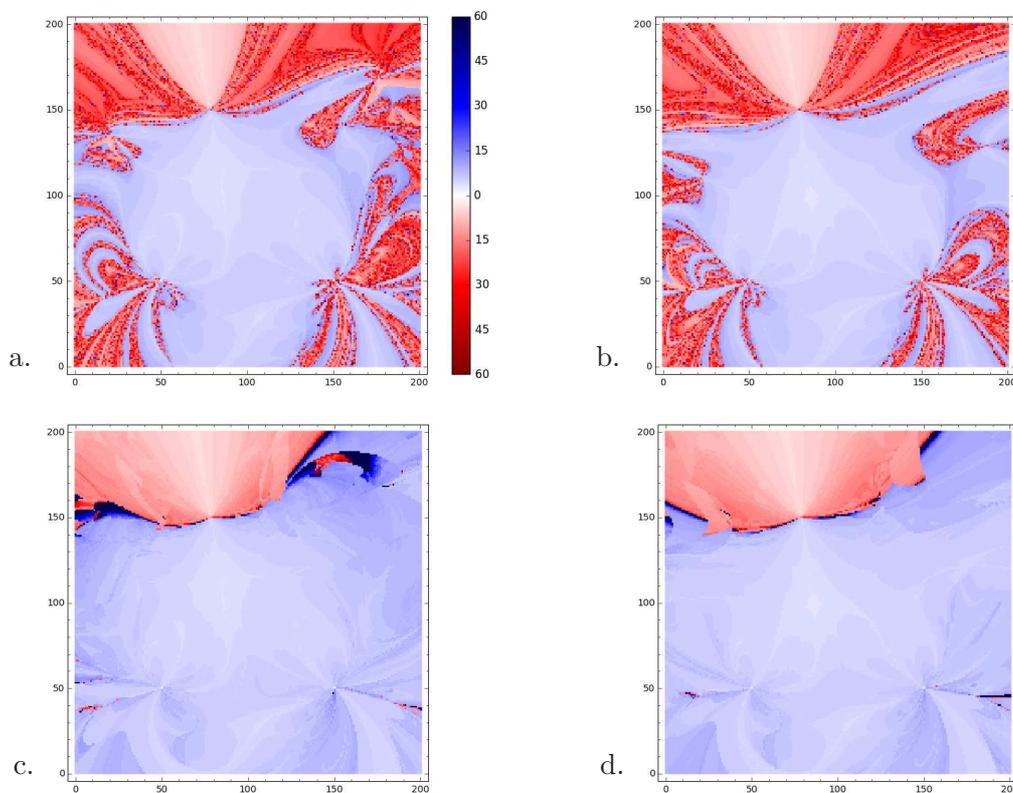
<sup>34</sup> Dvije su joj svojstvene vrijednosti pozitivne, a jedna negativna.

<sup>35</sup> Jedan je od primjenjivih iteracijskih postupaka GMRES.



Slika 146.

U iteracijskom se postupku ta dva rješenja nažalost ne mogu razlikovati. Ovisno o pretpostavljenoj početnoj aproksimaciji, postupak će konvergirati prema jednom ili prema drugom rješenju (ako će uopće konvergirati). Primjerice, na slici 147. nijansama crvene boje obojene su točke kvadratnoga područja  $[-2,5; 7,5]^2$  u ravnini  $(xy)$  polazeći iz kojih je Newton–Raphsonov postupak (bez pretraživanja po pravcu: a. i b.; s njim: c. i d.) konvergirao prema točki G, dok su točke polazeći iz kojih je postupak konvergirao prema točki F obojene nijansama plave boje



Slika 147.

(osim najtamnije plavih — postupak započet u njima nije se u šezdeset koraka dovoljno približio ni prvoj ni drugoj točki). Kako sustav sada ima tri nepoznanice, mijenjale su se koordinate  $x$  i  $y$  početne točke, dok je početna vrijednost Lagrangeova multiplikatora bila za sve početne točke ista:  $\lambda^{(0)} = 0$  (slike a. i c.) i  $\lambda^{(0)} = 0,4$  (slike b. i d.).

## 5.10. Metoda gustoća sila

U metodi gustoća sila, koju su početkom sedamdesetih godina razvili Hans–Jörg Sehek, Klaus Linkwitz i njihovi suradnici, nelinearni je problem nalaženja oblika lineariziran „drugacijim udruživanjem” veličina [60, 43]:

Jednadžbe ravnoteže čvorova možemo umjesto u obliku

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} = 0 \quad \text{etc.}$$

pisati u obliku

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{S_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} (x_j - x_i) = 0 \quad \text{etc.}$$

Omjer vrijednosti  $S_{\{i,j\}}$  sile u štapu  $\{i, j\}$  i njegove duljine  $\ell_{\{i,j\}}$ , s oznakom  $q_{\{i,j\}}$ ,

$$q_{\{i,j\}} = \frac{S_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}}, \quad (218)$$

naziva se *gustoćom sile* ili *koeficijentom sile*. Uvođenjem gustoća sila sustav jednadžbi ravnoteže (202) prelazi u

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} q_{\{i,j\}} (x_j - x_i) &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} q_{\{i,j\}} (y_j - y_i) &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} q_{\{i,j\}} (z_j - z_i) &= 0 \end{aligned} \quad (219)$$

za  $i \in \mathcal{N}_f$ .

Zadamo li umjesto vrijednosti  $S_{\{i,j\}}$  sila u štapovima gustoće sila  $q_{\{i,j\}}$ , nepoznanice će biti i vrijednosti sila i koordinate čvorova (ukupno  $n_b + 3n_f$  nepoznanica), ali te nepoznanice povezuje dodatnih  $n_b$  jednadžbi (218). Dodatne jednadžbe, međutim, ne otežavaju rješavanje sustava. Naprotiv, kako su vrijednosti  $q_{\{i,j\}}$  zadane, one u jednadžbama (219) imaju ulogu konstantnih koeficijenata, pa su te jednadžbe linearne. Štoviše, lako se može vidjeti da se sustav koji sadrži  $3n_f$  jednadžbi ravnoteže raspao u tri međusobno neovisna sustava od kojih svaki ima  $n_f$  jednadžbi sa  $n_f$  nepoznanica; nepoznanice su prvoga sustava  $\{x_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}$ , drugog  $\{y_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}$ , a trećeg  $\{z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}$ . Iako se na prvi pogled čini da su ti sustavi homogeni, koordinate su ležajnih čvorova poznate, pa  $q_{\{i,j\}} x_j$ ,  $q_{\{i,j\}} y_j$  i  $q_{\{i,j\}} z_j$  za  $j \in \mathcal{N}_s$  postaju slobodnim članovima koji su barem u nekim jednadžbama različiti od nule. Budući da su sustavi linearni, mogu se riješiti i direktnim postupkom poput Gaussove eliminacije; u tom slučaju ne treba pretpostaviti početne približne koordinate slobodnih čvorova.

Rješavanjem sustavâ dobivamo koordinate slobodnih čvorova, pa se prema izrazu (201) mogu izračunati duljine  $\ell_{\{i,j\}}$  svih štapova, a potom i vrijednosti sila u njima, jer su, iz (218),

$$S_{\{i,j\}} = q_{\{i,j\}} \ell_{\{i,j\}}.$$

Spomenut ćemo još, u skladu s prikazima u odjeljcima 5.4. i 5.8., i varijacijsku formulaciju metode gustoća sila, koju je uočio već H.–J. Schek [60]: jednadžbe metode gustoća sila (219) izražavaju uvjete minimuma funkcije

$$\mathfrak{D}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{B}} q_{\{i,j\}} \ell_{\{i,j\}}^2,$$

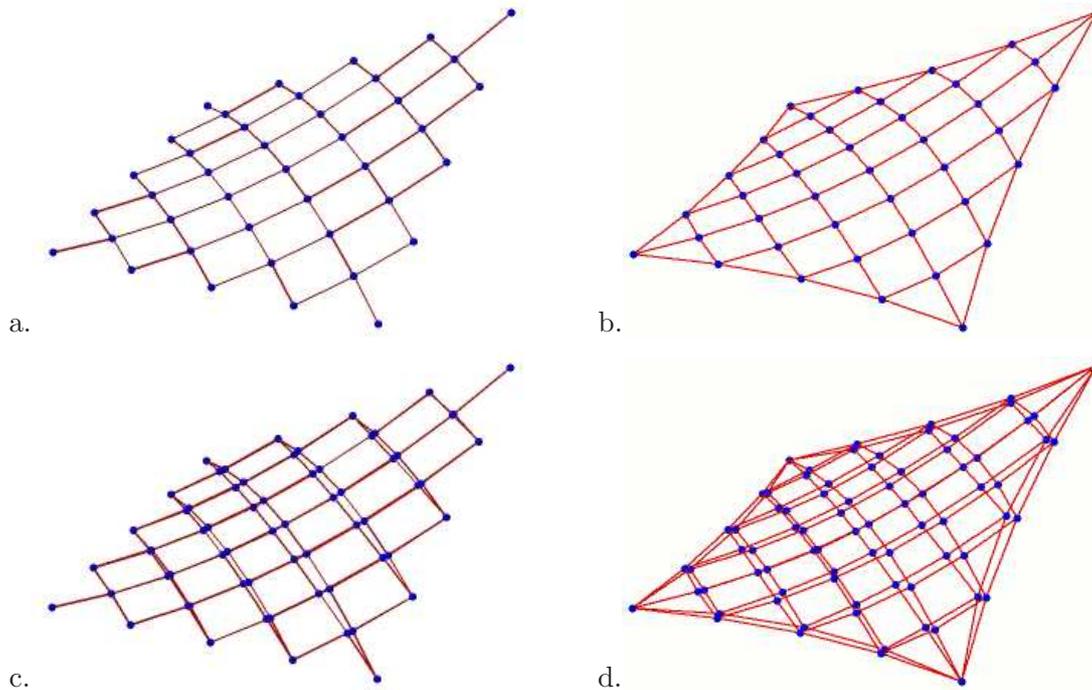
tako da za međusobno jednake gustoće sila u svim štapovima,  $q_{\{i,j\}} = q$ , rješenje tih jednadžbi daje oblik mreže za koji je zbroj kvadrata duljina kabela minimalan.

Svako rješenje dobiveno metodom gustoća sila, za bilo kako odabranu razdiobu gustoća sila po štapovima mreže zadane topologije, ravnotežna je konfiguracija. Razdiobu gustoća sila treba odabrati — između  $\infty^{\text{nb}}$  mogućih — tako da dobiveni oblik mreže zadovolji konstrukcijske i arhitektonske zahtjeve. Na temelju omjera dviju veličina — jedne statičke, druge geometrijske — treba predvidjeti i oblik mreže i razdiobu prednaponskih sila u njoj.

„Na prvi se pogled čini da je [potreba zadavanja gustoća sila u svim štapovima mreže] ozbiljna zapreka primjeni [metode], jer, kako možemo unaprijed znati gustoće sila koje odgovaraju nekom ravnotežnom obliku? Iznenadujuće je, ali mnoga su istraživanja i praktični eksperimenti pokazali da su vrlo jednostavno, gotovo trivijalno zadane gustoće sila dostatne za tvorbu ravnotežnih oblika koji mogu poslužiti kao polazište postupka nalaženja oblika” [43]: Zamislit ćemo da je razmjerno pravilna mreža zadane topologije — ponajčešće s dvije familije kabela — rasprostrta na tlu. Štapovima u unutaršnjem području mreže, gdje su oni podjednake duljine, pridjeljuju se jedinične gustoće sila, a u rubnim područjima, često nepravilni(ji)h oblika, gdje su duljine štapova koji se spajaju u oslonce ili na rubne kabele primjetno različite, štapovima treba pridijeliti gustoće sila obrnuto proporcionalne njihovim duljinama (pritom se srednja/približna duljina štapova u unutrašnjosti uzima kao jedinična).

Preporuku možemo obrazložiti na sljedeći način: Ako se omjeri duljina štapova u dobivenoj ravnotežnoj konfiguraciji nisu bitno promijenili u odnosu na omjere u početnoj, „rasprostrtoj” konfiguraciji, vrijednosti sila će u štapovima biti približno jednake, a ako će i postojati veće razlike, može se očekivati da će se vrijednosti sila uzduž kabela mijenjati postupno, u manjim skokovima, tako da zaokretanje čvorova (slika 137.) neće biti veliko.

Na slikama 148.a. i b. prikazane su dvije metodom gustoća sila određene mreže; prva je mreža jednake topologije i s jednakim rubnim uvjetima („kruti” oslonci uzduž rubova) kao minimalna mreža na slici 112.b., dok su topologija i rubni uvjeti (rubni kabeli, s „krutim” osloncima samo u uglovnim čvorovima) druge mreže kao u mreži na slici 142.b. U prvom su slučaju svim štapovima dodijeljene jedinične gustoće sile, a u drugom slučaju gustoće sila u rubnim kabelima deset su puta veće od gustoća u unutaršnjima; kako su oba tlocrtna područja pravilna, nije trebalo unutaršnjim štapovima koji su spajeni u oslonce ili na rubne kabele pridijeliti drugačije gustoće sila. U mreži na slici 148.b. najveća su i najmanja vrijednost sila u unutaršnjim kabelima 1,834 i 1,234, dok su sile u štapovima



Slika 148.

dijagonalnoga kabela spojena u najviši čvor redom, počevši od najdonjeg, 1,547; 1,434; 1,391; 1,394; 1,435; 1,515; 1,637; 1,834. U rubnim su kabelima najveća i najmanja vrijednost sila 22,924 i 19,966.

Usporedbe radi, na slici 148.c. preklopljene su minimalna mreža sa slike 15.b. i mreža određena metodom gustoća sila sa slike 148.a., a na slici 148.d. mreža sa slike 142.b. i mreža sa slike 148.b.

Kao što je u citiranom ulomku rečeno, metodom gustoća sila dobiveni oblik tek je „polazište u postupku nalaženja oblika”. U literaturi se obično navodi da je potreban niz pokušaja da se pronađu vrijednosti gustoća sila koje daju prihvatljivo rješenje, ali detaljnije preporuke izostaju.

U nastavku ćemo uvesti sustavan postupak kojim se iteracijskom primjenom metode gustoća sila mogu zadovoljiti zahtjevi navedeni u odjeljcima 5.4. i 5.8.

U programskoj realizaciji metode gustoće sila primijenjena je analogija te metode i metode pomakâ opisana u [31].

## 5.11. Višekoračna metoda gustoća sila

U radu [52] autori opisuju „iteracijski postupak namijenjen izračunavanju mreže s jednoliko raspodijeljnim vlačnim silama i stoga mreže minimalne duljine”. U  $k$ -tom koraku postupka gustoća sile u štapu  $\{i, j\}$  računa se prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = q_{\{i,j\}}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{\{i,j\}}^{(k-1)}}$$

gdje su  $q_{\{i,j\}}^{(k-1)}$  gustoća sile u prethodnom koraku,  $S_{\{i,j\}}^{(k-1)}$  vrijednost sile izračunana u prethodnom koraku i  $\bar{S}$  tražena vrijednost sile.

Taj izraz možemo obrazložiti na sljedeći način:

Prema definiciji danoj izrazom (218), gustoća sile  $q_{\{i,j\}}$  proporcionalna je vrijednosti sile  $S_{\{i,j\}}$ , pa je, uz nepromijenjenu duljinu štapa, omjer vrijednosti sila u dva koraka iteracije jednak omjeru gustoća sila,

$$S_{\{i,j\}}^{(k)}/S_{\{i,j\}}^{(k-1)} = q_{\{i,j\}}^{(k)}/q_{\{i,j\}}^{(k-1)},$$

a budući da bi vrijednost  $S_{\{i,j\}}^{(k)}$  trebala biti  $\bar{S}$ , neposredno dobivamo prethodni izraz. No, kako se promjenom gustoća sila mijenja i ravnotežna konfiguracija mreže, mijenjaju se i duljine štapova. Potreban je stoga iteracijski proračun kojim ćemo se postupno približiti traženoj vrijednosti.

U primjerima se autori rada ograničavaju na mreže s „krutim” rubovima — prikazani postupak ne predviđa zadavanje različitih vrijednosti sila u različitim kabelima.

No, postupak je lako proširiti: tražimo li postizanje različitih vrijednosti sila u različitim štapovima, gustoću sile u štapu  $\{i, j\}$  u  $k$ -tom koraku računat ćemo prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = q_{\{i,j\}}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{\{i,j\}}}{S_{\{i,j\}}^{(k-1)}}, \quad (220)$$

pri čemu je  $\bar{S}_{\{i,j\}}$  tražena vrijednost sile u tom štapu, koja se može razlikovati od vrijednosti sila u drugim štapovima [20, 21]. Naravno, želimo li oblikovati prirodnu poopćenu minimalnu mrežu, moramo zadati jednake vrijednosti sila u svim štapovima pojedinih kabela. Kako je  $q_{\{i,j\}}/S_{\{i,j\}} = 1/\ell_{\{i,j\}}$ , gustoću sile možemo računati i prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}^{(k-1)}}. \quad (221)$$

Analogno, propisanu duljinu  $\bar{\ell}_{\{i,j\}}$  štapa  $\{i, j\}$  možemo osigurati tako da gustoću sile u njemu računamo prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = \frac{S_{\{i,j\}}^{(k-1)}}{\bar{\ell}_{\{i,j\}}}, \quad (222)$$

gdje je  $\ell_{\{i,j\}}^{(k-1)}$  duljina štapa izračunana u prethodnom koraku. Naime, gustoća sile je, prema definiciji, obrnuto proporcionalna duljini štapa, pa je, ako se vrijednost sile ne mijenja,

$$q_{\{i,j\}}^{(k)}/q_{\{i,j\}}^{(k-1)} = \ell_{\{i,j\}}^{(k-1)}/\ell_{\{i,j\}}^{(k)},$$

odakle uz  $\ell_{\{i,j\}}^{(k)} = \bar{\ell}_{\{i,j\}}$  neposredno slijedi

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = q_{\{i,j\}}^{(k-1)} \frac{\ell_{\{i,j\}}^{(k-1)}}{\bar{\ell}_{\{i,j\}}}, \quad (223)$$

a kako je  $S_{\{i,j\}} = q_{\{i,j\}} \ell_{\{i,j\}}$ , dobivamo i izraz (222). Naravno, pri promjeni gustoća sila promijenit će se i vrijednosti sila, pa će za postizanje tražene duljine biti potrebna iteracija.

Iteracijski se postupak prekida kada su

$$r_S^{(k)} = \max_{\{i,j\}} (|S_{i,j}^{(k)} - \bar{S}_{i,j}|) < \tau_S \quad \text{i} \quad r_\ell^{(k)} = \max_{\{i,j\}} (|\ell_{i,j}^{(k)} - \bar{\ell}_{i,j}|) < \tau_\ell,$$

gdje su  $\tau_S$  i  $\tau_\ell$  propisane točnosti.

U opisanom se iteracijskom postupku u svakom koraku primjenjuje metoda gustoća sila, pri čemu se, kao što izrazi (220) ili (221) te (223) ili (222) pokazuju, gustoće sila u nekom koraku određuju na temelju zadanih uvjeta i rezultata prethodnoga koraka.

Višekoračna metoda gustoća sila ima u odnosu na druge iteracijske postupke nekoliko prednosti. Ponajprije, postupak konvergira prema traženom rješenju kroz niz ravnotežnih konfiguracija. Dakle, čak i ako se iteracijski postupak prekine prije no što su postavljene uvjeti zadovoljeni uz zahtijevanu točnost, pa i ako se ti uvjeti ne mogu zadovoljiti, dobivena je mreža u ravnoteži. Za razliku od toga, kod mnogih je drugih iteracijskih postupaka, poput Newton–Raphsonova ili Newton–Krilovljevih, sàmo konačno rješenje uravnoteženo, dok su oblici dobiveni u prethodnim koracima tek neuravnotežene aproksimacije traženoga oblika. Druga je prednost to što se ne samo zadane sile, nego i zadane duljine štapova postižu bez uvođenja Langrangeovih multiplikatora. Treće, kao što smo u prethodnom odjeljku rekli, ne treba pretpostavljati prvu aproksimaciju rješenja, jer su sustavi jednadžbi linearni, pa se mogu rješavati direktnim postupcima. I, napokon, postupak je u većini slučajeva prihvatljivo brz.

## Literatura

- [1] I. AGANOVIĆ: *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, Zagreb, 2003.
- [2] I. AGANOVIĆ i K. VESELIĆ: *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [3] M. ANĐELIĆ: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilšta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [4] S. S. ANTMAN: *Nonlinear Problems of Elasticity*, Second edition, Springer, New York, 2005.
- [5] J. H. ARGYRIS, T. ANGELOPOULOS, B. BICHAT: *A general method for the shape finding of lightweight tension structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **3** (1974), pp. 135–149.
- [6] H. BERGER: *Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Tensile Architecture*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [7] N. BIĆANIĆ, K. H. JOHNSON: *Who was 'Raphson'?*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **14** (1979), pp. 148-152.
- [8] T. E. BOOTHBY: *Engineering Iron and Stone. Understanding Structural Analysis and Design Methods of the Late 19th Century*, ASCE Press, Reston, 2015.
- [9] H. A. BUCHHOLDT: *An Introduction to Cable Roof Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [10] E. BYSKOV: *Elementary Continuum Mechanics for Everyone. With Applications to Structural Mechanics*, Springer, Dordrecht, 2013.
- [11] C. F. CANDY: *Analysis of Shear-Wall Frames by Computer*, New Zealand Engineering **19** (1964) 9, pp. 342–347.
- [12] R. W. CLOUGH, I. P. KING, E. L. WILSON: *Structural Analysis of Multi-Storey Buildings*, Journal of the Structural Division, ASCE **90** (1964) ST3, pp. 19–34.
- [13] H. CROSS: *kurz Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers **57** (1930), pp. 919–928.

- [14] H. CROSS: *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*, Transactions of the American Society of Civil Engineers **96** (1932), pp. 1–10.
- [15] K. ČALIŠEV: *O dopunitbenim naprezanjima rešetkastih nosača*, Tehnički list Udruženja Jugoslavenskih inženjera i arhitekta **4** (1922.) 1/2, str. 1–6.
- [16] K. ČALIŠEV: *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija*, Tehnički list **5** (1923) 17, 18/19, 20, 21, str. 125–127, 141–143, 151–154, 157–158.
- [17] K. ČALIŠEV: *Primijenjena statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.
- [18] P. DREW: *Frei Otto*, in *Encyclopedia of 20th Century Architecture*, Thames and Hudson, London, 1986, pp. 256–257.
- [19] J. DVORNIK: *Teorijska istraživanja u Zavodu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu*, u [69], str. 82–104.
- [20] J. DVORNIK, D. LAZAREVIĆ: *Prednapregnute gipke konstrukcije od užadi i tkanine*, Građevinar **47** (1995) 4, str. 185–199.
- [21] J. DVORNIK, D. LAZAREVIĆ: *Viseće konstrukcije od platna i užadi*, Građevni godišnjak '97, HDGI, Zagreb, 1997., str. 239–297.
- [22] J. DVORNIK, D. LAZAREVIĆ: *Fractals and formfinding — magic with real numbers*, Engineering Modelling **16** (2003) 1–2, pp. 1–11.
- [23] J. DVORNIK, D. LAZAREVIĆ, K. FRESL: *The Fractal Nature of the Form Finding Equations*, Computational mechanics in the UK — 11th Annual Conference of the Association for Computational Mechanics in Engineering (United Kingdom), University of Strathclyde, Glasgow, 2003, pp. 201–204.
- [24] N. ELEZOVIĆ: *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2003.
- [25] L. P. FELTON and R. B. NELSON: *Matrix Structural Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, 1997.
- [26] *Frei Otto, Complete Works — Lightweight Construction, Natural Design*, editor W. NERDINGER, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [27] K. FRESL: *Građevna statika 1. Predavanja*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017., <http://master.grad.hr/nastava/gS/gS1/gS1.pdf>.
- [28] K. FRESL, P. GIDAK, R. VRANČIĆ: *Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi*, Građevinar **65** (2013) 8, str. 707–720.
- [29] K. FRESL, D. LAZAREVIĆ, S. HAK, M. ŠAVOR NOVAK: *O proračunu zidova s otvorima*, Građevinar **67** (2015) 2, str. 103–121.

- [30] A. GHALI and A. M. NEVILLE: *Structural Analysis. A Unified Classical and Matrix Approach*, Fourth edition, E & FN Spon, London, 1997.
- [31] P. GIDAK, K. FRESL: *Programming the force density method*, IASS-APCS 2012. From spatial structures to space structures, Seoul, South Korea, 2012, p. 197 (abstract, full paper on CD)
- [32] R. B. HABER, J. F. ABEL: *Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I—Formulations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **30** (1982), pp. 263–284.
- bibitemheyman J. HEYMAN: *Elements of the Theory of Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [33] J. HEYMAN: *Structural Analysis. A Historical Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [34] S. HILDEBRANDT, A. TROMBA: *The Parsimonious Universe. Shape and Form in the Natural World*, Springer, New York, 1996.
- [35] K. D. HJELMSTAD: *Fundamentals of Structural Mechanics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [36] I. A. KARNOVSKY and O. LEBED: *Advanced Methods of Structural Analysis*, Springer, New York, 2010.
- [37] C. T. KELLEY: *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.
- [38] M. KRLEŽA: *U spomen Adolfa Loosa*, Danas, knjiga 1., broj 1, 1934., str. 135–138.
- [39] K.–E. KURRER: *The History of the Theory of Structures. From Arch Analysis to Computational Mechanics*, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co., Berlin, 2008.
- [40] R. KUŠEVIĆ: *Viša građevna statika*, neautorizirane bilješke s predavanja, Zagreb, 1943.
- [41] C. LANCZOS: *The Variational Principle of Mechanics*, University of Toronto Press, Toronto, 1970.
- [42] *Leksikon građevinarstva*, urednik V. SIMOVIĆ, Masmedia, Zagreb, 2002.
- [43] K. LINKWITZ: kurz About formfinding of double-curved structures, Engineering Structures **21** (1999), pp. 709–718.
- [44] E. MACH: *The Science of Mechanics*, 6th edition, Open Court, La Salle, 1960.
- [45] I. A. MACLEOD: *Lateral Stiffness of Shear Walls with Openings*, Tall Buildings (Proceedings of a Symposium on Tall Buildings, University of Southampton), Pergamon Press, Oxford, 1967, pp. 223–244.

- [46] I. A. MACLEOD: *Structural Analysis of Wall Systems*, The Structural Engineer **55** (1977) 11, pp. 487-495.
- [47] I. A. MACLEOD: *Modern Structural Analysis. Modelling Process and Guidance*, Thomas Telford, London, 2005.
- [48] Ž. MARKOVIĆ: *Uvod u višu analizu. Dio prvi*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1945.
- [49] Ž. MARKOVIĆ: *Uvod u višu analizu. II. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1952.
- [50] J. A. L. MATHESON: *Hyperstatic Structures*, Second edition, Butterworths, London, 1971.
- [51] S. B. MAURER, A. RALSTON: *Discrete Algorithmic Mathematics*, Addison–Wesley, Reading, 1991.
- [52] B. MAURIN, R. MOTRO: kurz Investigation of minimal forms with conjugate gradient method, International Journal of Solids and Structures **38** (2001), pp. 2387–2399.
- [53] C. D. MEYER: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.
- [54] Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P. et al.: *SciPy: Open source scientific tools for Python*, 2001–, <http://www.scipy.org/>, pristupljeno 25. 6. 2017.
- [55] J. S. PRZEMIENIECKI: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1968.
- [56] G. PUŽ, A. VLAŠIĆ: *Visoke građevine*, interne bilješke s predavanja, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2014./2015.
- [57] R. ROSMAN: *Zidovi oslabljeni nizovima otvora izloženi utjecajima potresa i vjetra*, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Zagreb, 1966.
- [58] Y. SAAD: *Iterative methods for sparse linear systems*, 2nd edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- [59] *SageMath, the Sage Mathematics Software System* (Version 7.6), The Sage Developers, 2016, <http://www.sagemath.org>, pristupljeno 25. 6. 2017.
- [60] H.–J. SCHEK: *The force density method for form finding and computation of computation of general networks*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **3** (1974), pp. 115–134.
- [61] M. SEKULOVIĆ: *Teorija linijskih nosača*, Građevinska knjiga, Beograd, 2005.
- [62] V. SIMOVIĆ: *Proračun horizontalno pomičnih okvira*, Građevinar **18** (1966) 1, str. 1–14.

- [63] V. SIMOVIĆ: *Prilog proračunu zidova s otvorima*, disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1969.
- [64] V. SIMOVIĆ: *Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [65] V. SIMOVIĆ: *Građevna statika I*, Građevinski institut, 1988.
- [66] V. SIMOVIĆ, Z. ŽAGAR: *Proračun zidova s otvorima džepnim računalom*, Građevinar **34** (1982) 5, str. 195–204
- [67] B. S. SMITH, A. COULL: *Tall Building Structures: Analysis and Design*, Willey, New York, 1991.
- [68] C. SMITH: *The Science of Energy. A Cultural History of Energy Physics in Victorian Britain*, University of Chicago Press, Chicago, 1998.
- [69] *Spomenica u povodu 75. obljetnice Zavoda za tehničku mehaniku 1920–1995.*, urednik V. ŠIMIĆ, Građevinski fakultet i Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1995.
- [70] B. S. TARANATH: *Structural Analysis and Design of Tall Buildings*, McGraw–Hill, New York, 1988.
- [71] S. P. TIMOSHENKO: *History of Strength of Materials, with a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, McGraw–Hill, New York, 1953.; prijevod: *Istorija otpornosti materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [72] S. P. TIMOSHENKO: *Strength of Materials. Elementary Theory and Problems*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1958.; prijevod: *Otpornost materijala I*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [73] S. P. TIMOSHENKO: *Moja sjećanja na Zagreb*, ulomci iz *As I Remember*, Van Nostrand, Princeton, 1968., odabrao i preveo N. Bićanić, u [69], str. 175–181.
- [74] Š. UNGAR: *Matematička analiza u  $\mathbb{R}^n$* , Golden Marketing • Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.
- [75] D. VEENENDAAL, P. BLOCK: *An overview and comparison of structural form finding methods for general networks*, International Journal of Solids and Structures **49** (2012), pp. 3741–3753.
- [76] K. WASHIZU: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Second edition, Pergamon Press, Oxford, 1974.
- [77] H. WERNER: *Uvod u proračun konstrukcija*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1985.
- [78] H. WERNER: *Mehanika II. — Kinematika (Predavanja — sažetak)*, skripta, Građevinski fakultet, Zagreb, 2002.

- [79] H. WERNER: *Mehanika I — Statika*, Hrvatski savez građevinskih inženjera, Zagreb, 2007.
- [80] O. WERNER: *Prilog ispitivanju okvira po teoriji drugog reda metodom postepene aproksimacije*, Građevinar **17** (1965) 8, str. 293–300.
- [81] O. WERNER i S. SABLJIĆ: *Teorija konstrukcija. I. dio*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1963.
- [82] W. WUNDERLICH and W. D. PILKEY: *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods*, Second edition, CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [83] D. ŽUBRINIĆ: *Uvod u varijacione metode za diferencijalne jednačbe*, Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1991.