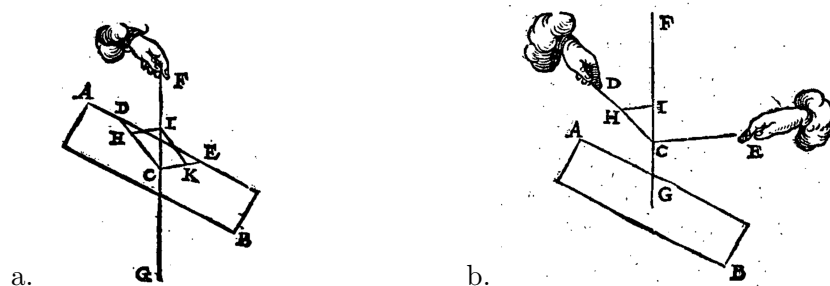


Statika točke

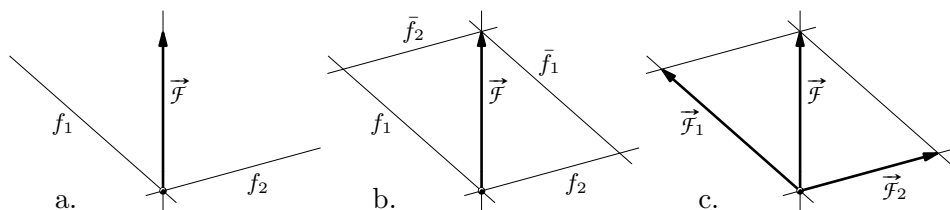
1. *Rastavljanje sile u dvije sile.* Godine 1608., u dodatku drugom izdanju knjige *Počela umijeća vaganja*, naslovljenu *O užadi koja nosi terete*, Simon Stevin uveo je *pravilo paralelograma sile* (slika 1.a.) i *pravilo trokuta sile* (slika b.) kao osnovu postupka rastavljanja koncentrirane sile u dvije sile na zadanim pravcima koji prolaze njezinim hvatištem, pri čemu su pravac djelovanja sile i zadani pravci u jednoj ravnini: silu u užetu GF, kojom ruka pridržava prizmu, te je intenziteta jednakoga težini prizme, a suprotnoga smisla djelovanja, zamjenjujemo silama u užadi CD i CE (slika a.).



Slika 1.

Budući da su pravci djelovanja zadane i traženih sile u jednoj ravnini, zadatak je ravninski. Neka je ta ravnina ravnina crteža. Sile ćemo, kao što je danas uobičajeno, prikazivati strelicama na pravcima njihovih djelovanja, pri čemu su početne točke strelica u njihovu hvatištu, orijentacije strelica njihove su orijentacije, dok su duljine strelica proporcionalne njihovim intenzitetima, pa su odabirom *mjerila sile* ti intenziteti određeni. Sa strelicama ćemo stoga postupati kao s orijentiranim dužinama.

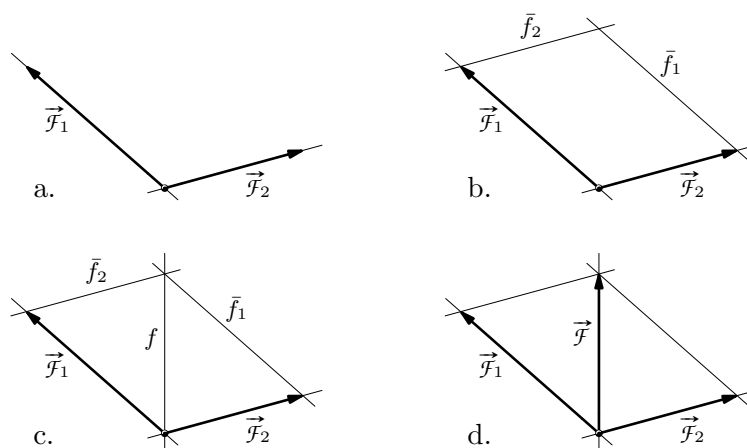
Silu $\vec{F}$ rastavljamo u sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na pravcima f_1 i f_2 kroz njezino hvatište (slika 2.a.) tako da vrškom orijentirane dužine kojom je sila $\vec{F}$ prikazana povučemo pravce $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_2$ usporedne sa zadanim pravcima (slika b.). Time smo oblikovali paralelogram jedna dijagonala kojega je prikaz sile $\vec{F}$, a dvije njegove stranice, koje prolaze hvatištem sile $\vec{F}$, orijentirane su dužine koje prikazuju sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, pri čemu im orijentacije određuje to što su i njihova hvatišta u hvatištu sile $\vec{F}$ (slika c.); duljine tih dužina u mjerilu sile daju intenzitete sile. Očito je da je moguć samo jedan — opisani — rastav. Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ nazivamo i *komponentama* sile $\vec{F}$.



Slika 2.

Na Stevinovu crtežu na slici 1.a. sila u užetu GF — sila $\vec{F}$ u našoj priči — proporcionalna je dijagonali CI paralelograma CKIH, dok su sile u užadi CD i CE — naše sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ — proporcionalne njegovim stranicama CH i CK.

2. Zbrajanje dviju sila. Možemo, međutim, reći i da je sila $\vec{F}$ nastala *sastavljanjem* ili *zbrajanjem* sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ koje djeluju u istom hvatištu (slika 3.a.); sila $\vec{F}$ naziva se tada i *rezultantom* sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Pravac njezina djelovanja, f , pravac je na kojem je dijagonala paralelograma razapetoga prikazima sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ (slika b.: kroz vršak orijentirane dužine koja prikazuje silu $\vec{F}_1$ povlačimo paralelu $\vec{f}_2$ s pravcem djelovanja sile $\vec{F}_2$, a kroz vršak orijentirane dužine/prikaza sile $\vec{F}_2$ paralelu $\vec{f}_1$ s pravcem djelovanja sile $\vec{F}_1$), i to ona dijagonala jedna krajnja točka koje je u njihovu hvatištu (slika c.). Orijentirana dijagonala prikaz je rezultante $\vec{F}$: kako joj je hvatište u hvatištu sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, smisao je njezina djelovanja od te točke prema suprotnome vrhu paralelograma, a njezin je intenzitet dan duljinom dijagonale (u odabranom mjerilu sila). Sila $\vec{F}$ je, očito je, jedina sila koja može nastati zbrajanjem sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.



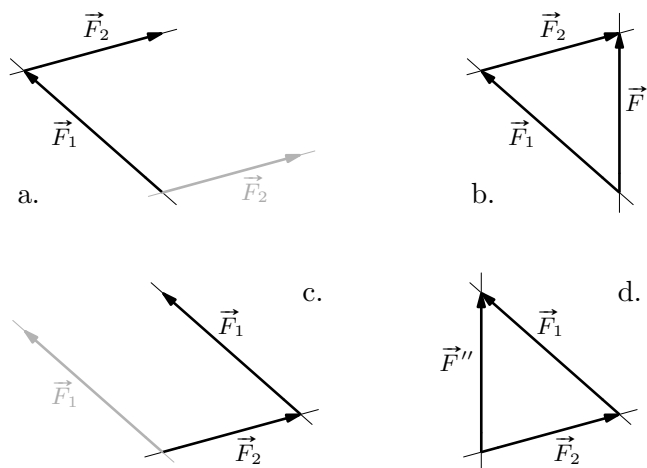
Slika 3.

3. Trokut sila. Budući da su duljine usporednih stranica paralelograma — primjerice, stranica CK i HI na slici 1.a. — jednake, umjesto paralelograma možemo, kao i Simon Stevin na slici 1.b., konstruirati trokut.

Silu $\vec{F}_2$ pribrojiti ćemo sili $\vec{F}_1$ tako da orijentiranu dužinu kojom je prikazana iz njezina hvatišta i s pravca njezina djelovanja »pomaknemo« u vršak orijentirane dužine/prikaza sile $\vec{F}_1$ na usporedan pravac (slika 4.a.); rezultanta $\vec{F}$ sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ prikazana je orijentiranom dužinom s početnom točkom u početnoj točki strelice/prikaza sile $\vec{F}_1$ i vrškom u točki u kojoj je vršak strelice/prikaza sile $\vec{F}_2$ (slika b.).

Na crtežima smo za oznake sila upotrijebili »obična« kurzivna slova (ali također sa strelicama ponad): $\vec{F}$, $\vec{F}_1$, ... Kako smo prikaz jedne sile pomaknuli s pravca njezina djelovanja, takvim »neuglednijim« oblikom slova ističemo da se položajni odnosi više ne mogu očitati iz crteža. Svejedno je jesmo li pomaknuli samo jednu silu, neke ili sve sile, pa hvatište nismo ni nacrtali.

4. Umjesto da sili $\vec{F}_1$ pribrojimo silu $\vec{F}_2$, možemo silu $\vec{F}_1$ pribrojiti sili $\vec{F}_2$: prikaz sile $\vec{F}_1$ pomaknut ćemo u vršak prikaza sile $\vec{F}_2$ na usporedan pravac (slika 4.c.), pa je njihov zbroj $\vec{F}''$ prikazan orijentiranom dužinom od početne točke prikaza sile $\vec{F}_2$ do vrška prikaza sile $\vec{F}_1$ (slika d.).



Slika 4.

Lako je, usporedbom paralelograma sila prikazanoga na slici 3.d. i trokutā sila prikazanih na slikama 4.b. i d., vidjeti da je $\vec{F}' = \vec{F} = \vec{F}''$. Trokut sila na slici 4.b. opisali smo riječima »sili $\vec{F}_1$ pribrojili smo silu $\vec{F}_2$ «, pa mu pri uobičajenu »čitanju« matematičkih izraza slijeva nadesno odgovara izraz $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Opišemo li trokut sila na slici d. riječima »sili $\vec{F}_2$ pribrojili smo silu $\vec{F}_1$ «, odgovarat će mu izraz $\vec{F}_2 + \vec{F}_1$. Slijedi

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1; \quad (1)$$

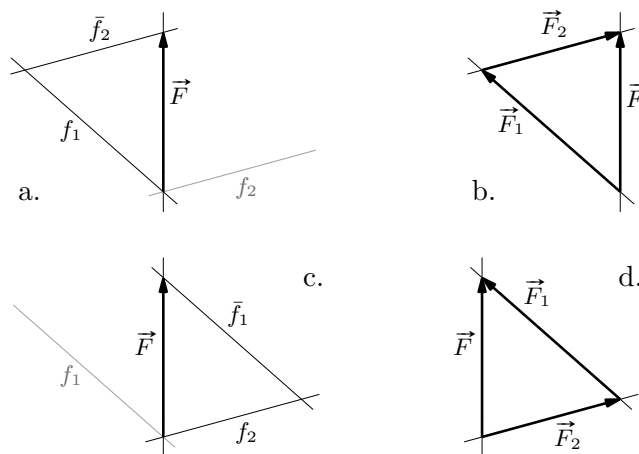
kažemo da je zbrajanje sila *komutativno*. (Pri zbrajanju sila primjenom pravila paralelograma svojstvo je komutativnosti tako očito i trivijalno — pogledajte ponovno sliku 3.d. — da na njega ni ne obraćamo pozornost, te se čini da ga ne treba ni spominjati ni objašnjavati.)

5. Rastavljamo li silu $\vec{F}$ u komponente, kroz vršak njezina prikaza možemo povući paralelu $\vec{f}_2$ s pravcem djelovanja sile $\vec{F}_2$ te njome presjeći pravac djelovanja sile $\vec{F}_1$ (slika 5.a.). Sila $\vec{F}_1$ prikazana je, kao i pri rastavljanju s pomoću paralelograma sila, orijentiranom dužinom na pravcu njezina djelovanja; njezina se početna točka poklapa s početnom točkom orijentirane dužine/prikaza sile $\vec{F}$, a vršak joj je u dobivenu sjecištu. Sila $\vec{F}_2$ je, međutim, prikazana orijentiranom dužinom na paraleli s pravcem njezina djelovanja; početna joj je točka u vršku orijentirane dužine/prikaza sile $\vec{F}_1$, dok joj se vršak poklapa s vrškom prikaza sile $\vec{F}$ (slika b.).

Jasno je da silu $\vec{F}$ možemo u komponente rastaviti i tako da vrškom njezina prikaza povučemo paralelu s pravcem djelovanja sile $\vec{F}_1$ i njome presiječemo pravac djelovanja sile $\vec{F}_2$ (slika 5.c.). Sada prikaz sile $\vec{F}_2$ ostaje na pravcu njezina djelovanja, dok se prikaz sile $\vec{F}_1$ pomiče na paralelu, a orijentacije su im takve da se poklapaju početne točke prikazā sila $\vec{F}_2$ i $\vec{F}$ te da se poklapaju vršci prikazā sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}$ (slika d.).

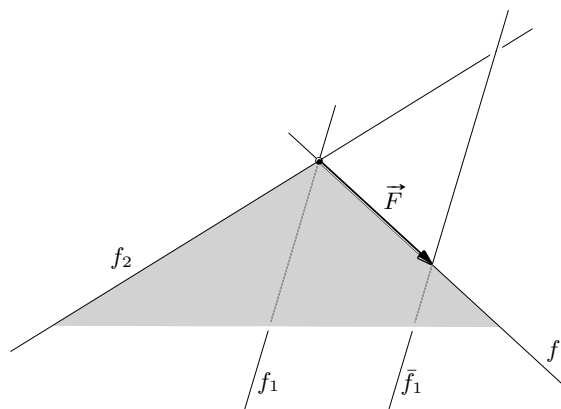
6. Zadatak zbrajanja dviju sila s istim hvatištem uvijek je rješiv: pravci djelovanja sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ određuju ravninu u kojoj je i pravac djelovanja rezultante $\vec{F}$ (koji uz to prolazi njihovim sjecištem, hvatištem sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$). U istoj su ravnini i svi pravci koji sijeku pravac djelovanja jedne sile, a usporedni su s pravcem djelovanja druge.

Zadatak rastavljanja sile u dvije komponente na pravcima koji prolaze njezinim hvatištem rješiv je samo u slučaju koji smo opisali u odsječku 1.: pravci djelovanja komponenata



Slika 5.

zadani su tako da je u ravnini koju razapinju jedan od njih i pravac djelovanja sile sadržan i drugi pravac. Ako pravac f_1 nije u ravnini razapetoj pravcima f i f_2 , onda ni pravac $\bar{f}_1$, koji vrškom sile $\vec{F}$ prolazi usporedno s pravcem f_1 , nije u toj ravnini, pa ne siječe pravac f_2 , nego ga mimoilazi (slika 6.), tako da trokut sila ne možemo sklopiti. Silu, dakle, možemo rastaviti u dvije komponente ako i samo ako su pravac njezina djelovanja i pravci djelovanja komponentata *konkurentni* i *komplanarni*.



Slika 6.

7. Oduzimanje sile. Silu koja ima isti pravac djelovanja i jednaki intenzitet kao sila $\vec{F}_2$, ali suprotan smisao, označit ćemo s $-\vec{F}_2$.

Zbrajanje sile $\vec{F}_1$ i $-\vec{F}_2$ (na slici 7.a. primjenom pravila paralelograma sila; na slici b. primjenom pravila trokuta sila) nazivamo *oduzimanjem* sile $\vec{F}_2$ od sile $\vec{F}_1$:

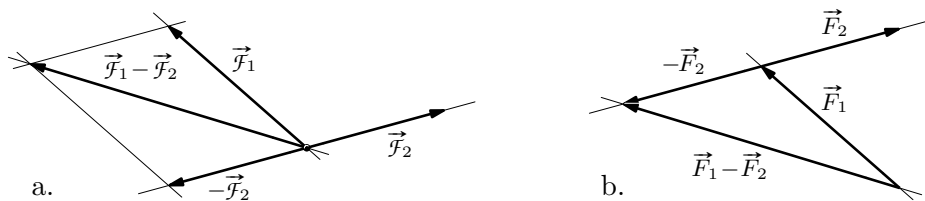
$$\vec{F}_1 + (-\vec{F}_2) = \vec{F}_1 - \vec{F}_2. \quad (2)$$

Na slici 8. možemo vidjeti da

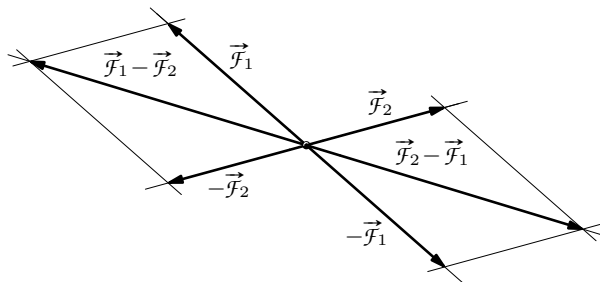
$$\vec{F}_2 - \vec{F}_1 \neq \vec{F}_1 - \vec{F}_2,$$

nego

$$\vec{F}_2 - \vec{F}_1 = -(\vec{F}_1 - \vec{F}_2).$$



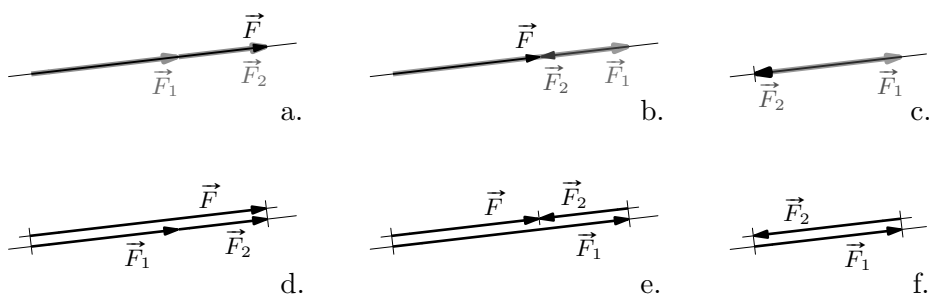
Slika 7.



Slika 8.

8. Dósada smo prešutno isključili mogućnost da pravci djelovanja traženih komponenata padnu u jedan pravac, odnosno da sile koje zbrajamo djeluju na istome pravcu.

Postupak zbrajanja sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ s istim pravcem djelovanja ne razlikuje se od postupka kojim smo konstruirali trokut sila: orijentiranu dužinu/prikaz sile $\vec{F}_2$ pomičemo tako da joj je početna točka u vršku prikaza sile $\vec{F}_1$, te je njihova rezultanta $\vec{F}$ prikazana orijentiranom dužinom s početnom točkom u početnoj točki prikaza sile $\vec{F}_1$ i s vrškom u vršku prikaza sile $\vec{F}_2$; na slici 9.a. zbrojene su sile istoga, a na slici b. suprotnoga smisla djelovanja. Rezultanta je, dakako, na pravcu na kojem su i sile zbrajanjem kojih je nastala. Slikovito rečeno, trokut sila »zakržljao« je i stegnuo se u (orijentiranu) dužinu jer je treći njegov vrh pao na pravac na kojem su ostala dva. Kako se orijentirane dužine kojima su sile prikazane preklapaju, neke je od njih zgodno preglednosti radi lagano izmaknute na usporedan pravac: slike d. i e. tako prikazuju ista zbrajanja kao slike a. i b. Treba, međutim, naglasiti da su samo prikazi sila na crtežu pomaknuti; u »stvarnosti« sve sile djeluju na istom pravcu.



Slika 9.

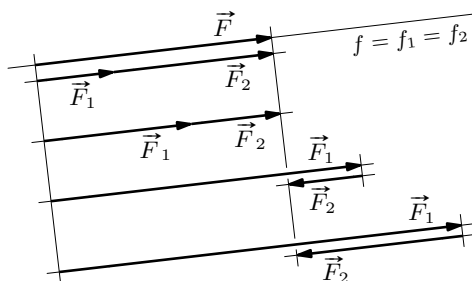
Poseban slučaj, koji treba istaknuti, zbrajanje je dviju sila jednakih intenziteta ali suprotnih orijentacija na istome pravcu djelovanja, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Budući da nakon pomicanja

vršak prikaza druge sile pada u početnu točku prikaza prve, njihova je rezultanta iščeznula, ne postoji (slika 9.c. ili, razmaknuto, f.). Djelovanja se tih sila, dakle, poništavaju. Za iščezlu ćemo silu pisati 0, pa je u našem slučaju

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = 0.$$

Par je sila, djelovanja kojih se poništavaju, statički neutralan ili uravnotežen, dok je točka na koju te sile djeluju — njihovo hvatište — u ravnoteži.

9. Ako su pravci djelovanja komponenata $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ u koje želimo rastaviti silu $\vec{F}$ zajedno s pravcem njezina djelovanja pali u jedan pravac, mogućih je rastava bezbroj: na tom pravcu možemo odabrati bilo koju točku¹ te prikaz komponente $\vec{F}_1$ uzeti od početne točke sile $\vec{F}$ do odabrane točke, a prikaz komponente $\vec{F}_2$ od odabrane točke do vrška prikaza sile $\vec{F}$; nekoliko je rastava prikazano (razmaknuto, na nizu usporednih pravaca) na slici 10. Zadatak o silama koji ima bezbroj rješenja naziva se *statički neodređenim*, dok je zadatak s jednim — i samo s jednim — rješenjem *statički određen*.



Slika 10.

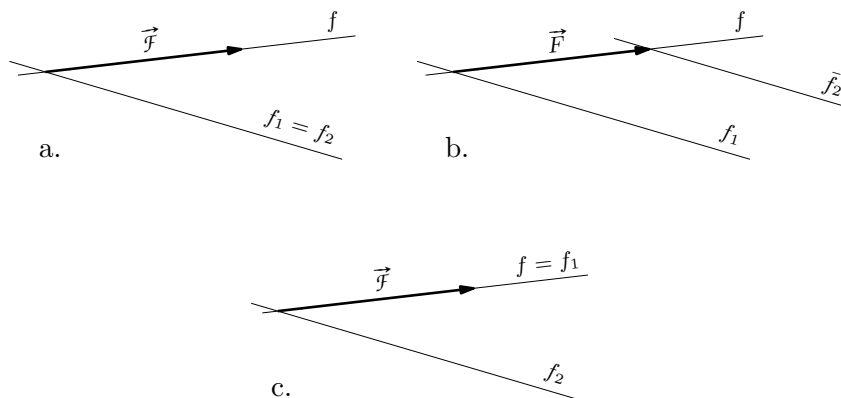
Ako se pak pravci djelovanja traženih komponenata poklapaju međusobno, ali ne i s pravcem djelovanja sile koju želimo rastaviti (slika 11.a.), rastav nije moguć: pravac $\vec{f}_2$ koji vrškom prikaza sile prolazi usporedno s pravcem f_2 usporedan je s pravcem f_1 (slika b.), pa se pravci $\vec{f}_2$ i f_1 sijeku u njihovoj zajedničkoj neizmjerljivo dalekoj točki. Intenziteti komponenata $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ trebali bi stoga biti neizmjerljivo veliki, a to je neostvarivo. (Zadatak nije statički neodređen, nego je nerješiv.)

Spomenut ćemo još i slučaj u kojem su pravci djelovanja traženih komponenata različiti, ali se jedan od njih, recimo f_1 , poklapa s pravcem djelovanja sile $\vec{F}$ (slika 11.c.). Očito je da će biti $\vec{F}_1 = \vec{F}$ i $\vec{F}_2 = 0$: trokut sila sada možemo »zatvoriti«, ali tako da dva njegova vrha padnu zajedno i da mu jedna stranica iščezne, tako da »zakržlja« skupivši se u orijentiranu dužinu.

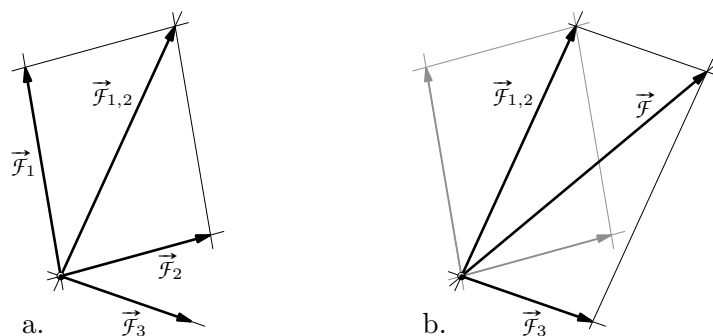
10. *Zbrajanje triju sila.* Djeluju li u istome hvatištu na tri različita pravca sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, njihovu rezultantu $\vec{F}$ možemo naći tako da prema pravilu paralelograma zbrojimo sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ (slika 12.a.), a zatim dobivenoj sili $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{1,2}$ pribrojimo silu $\vec{F}_3$ (slika b.):

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}$$

¹ Na pravcu ima ∞^1 točaka, pa je i rastavā ∞^1 .



Slika 11.



Slika 12.

11. Pravci djelovanja sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ ne moraju, ali mogu ležati u jednoj ravnini. Ako su u jednoj ravnini (na slici 12. u ravnini crteža), i pravac je djelovanja rezultante tih sila u njoj. Ako pak nisu, naš je crtež paralelna projekcija prostornoga sklopa pravaca i orijentiranih dužina na ravninu stranice knjige.

12. Na slici 13.b. prikazani su prostorni odnosi pri zbrajanju triju nekomplanarnih sila prema izrazu $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3$: rezultanta $\vec{F}_{1,2}$ sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ određena je (primjenom pravila paralelograma sila) u ravnini koju razapinju pravci djelovanja tih dviju sila, te je potom rezultanta $\vec{F}$ svih triju sila određena u ravnini razapetoj pravcima djelovanja sila $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_3$.

Slika 13.c. prikazuje prostorne odnose pri zbrajanju prema izrazu

$$\vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2,3}:$$

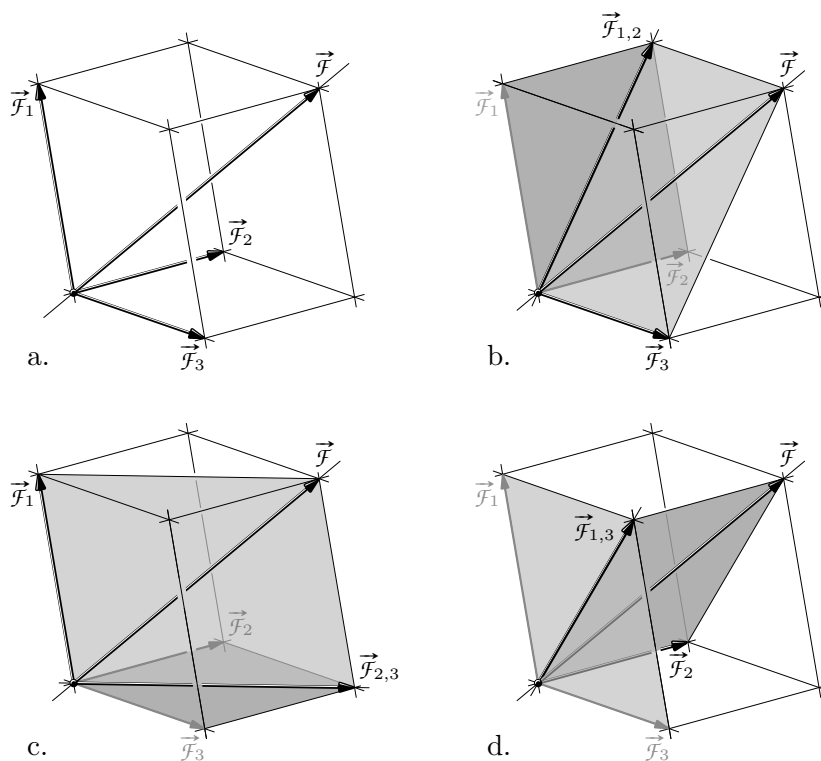
sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ zbrojili smo primjenom pravila paralelograma u ravnini razapetoj pravcima njihovih djelovanja, a potom dobivenu silu $\vec{F}_{2,3}$ pribrojili sili $\vec{F}_1$ u ravnini koju razapinju pravci tih dviju sila.

Usporedba slika b. i c. pokazuje da je u oba slučaja konačna sila ista orijentirana prostorna dijagonala istoga paralelepipeda, paralelepipeda razapetoga silama $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3).$$

Kažemo da je zbrajanje sila *asocijativno* te u izrazu za zbroj sila zgrade ne treba pisati:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad (3)$$



Slika 13.

Kao što je na slici 13.d. prikazano, ista će orijentirana prostorna dijagonala biti rezultanta i ako prvo zbrojimo sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ pa dobivenoj sili $\vec{F}_{1,3}$ pribrojimo silu $\vec{F}_2$:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + \vec{F}_2 = \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_2 = \vec{F}$$

To znači da redoslijed kojim sile uvodimo u zbroj nije važan. Posljedica je to ispreplitanja svojstava komutativnosti i asocijativnosti.

Budući da je $\vec{F}_{1,2}$ jedina sila koja može nastati zbrajanjem sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ i da je $\vec{F}$ jedina sila koja može nastati zbrajanjem sila $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_3$, zaključujemo da je $\vec{F}$ jedina sila koja može nastati zbrajanjem triju sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$. Isti zaključak vrijedi za ostale redoslijede uvođenja sila u zbroj.

13. Kako je u sva tri slučaja rezultanta $\vec{F}$ orijentirana prostorna dijagonala paralelepipeda koji razapinju sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, možemo je umjesto uzastopnom primjenom pravila paralelograma sila neposredno odrediti kao tu dijagonalu (slika 13.a.). (Paralelepiped ima četiri prostorne dijagonale, pri čemu su na svakoj moguće dvije orijentacije, no jasno je da je riječ o dijagonali kojoj je jedna krajnja točka hvatište sila koje zbrajamo i da joj je orijentacija određena time što je i njezino hvatište u toj točki.)

14. Opisani postupak zbrajanja sila s pomoću paralelogramā sila može se nastaviti dodavanjem sila $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$, ... u istom hvatištu:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \dots \\ = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \dots = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{\mathcal{F}}_{1,2} + \vec{\mathcal{F}}_3) + \vec{\mathcal{F}}_4 + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots = \vec{\mathcal{F}}_{1,2,3} + \vec{\mathcal{F}}_4 + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots \\
&= (\vec{\mathcal{F}}_{1,2,3} + \vec{\mathcal{F}}_4) + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots = \vec{\mathcal{F}}_{1,2,3,4} + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots = \cdots
\end{aligned}$$

Budući da je zbrajanje komutativno i asocijativno, moguće su i brojne druge kombinacije sila u međuzbrojevima; primjerice

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{\mathcal{F}}_2 + \vec{\mathcal{F}}_3 + \vec{\mathcal{F}}_4 + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots \\
&= (\vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{\mathcal{F}}_2) + (\vec{\mathcal{F}}_3 + \vec{\mathcal{F}}_4) + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots = \vec{\mathcal{F}}_{1,2} + \vec{\mathcal{F}}_{3,4} + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots \\
&= \vec{\mathcal{F}}_{1,2} + (\vec{\mathcal{F}}_{3,4} + \vec{\mathcal{F}}_5) + \cdots = \vec{\mathcal{F}}_{1,2} + \vec{\mathcal{F}}_{3,4,5} + \cdots = \cdots
\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{\mathcal{F}}_2 + \vec{\mathcal{F}}_3 + \vec{\mathcal{F}}_4 + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots \\
&= (\vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{\mathcal{F}}_3) + (\vec{\mathcal{F}}_2 + \vec{\mathcal{F}}_4) + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots = \vec{\mathcal{F}}_{1,3} + \vec{\mathcal{F}}_{2,4} + \vec{\mathcal{F}}_5 + \cdots \\
&= (\vec{\mathcal{F}}_{1,3} + \vec{\mathcal{F}}_5) + (\vec{\mathcal{F}}_{2,4} + \cdots) + \cdots = \vec{\mathcal{F}}_{1,3,5} + \vec{\mathcal{F}}_{2,4,\dots} + \cdots = \cdots
\end{aligned}$$

15. Skup/niz/sistem koji sadrži n sila $\vec{\mathcal{F}}_i$ označavat ćemo s $\{\vec{\mathcal{F}}_i\}_{i=1}^n$, a za njihov ćemo zbroj sažeto pisati $\sum_{i=1}^n \vec{\mathcal{F}}_i$.

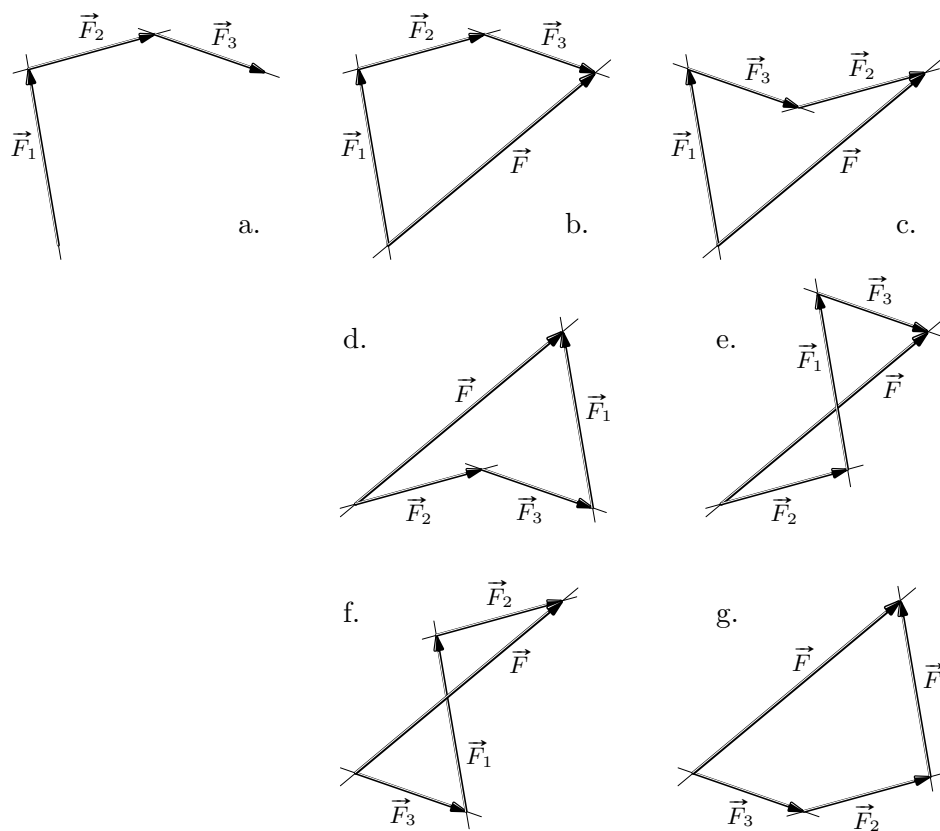
16. *Poligon sila.* Zbrajamo li više od dvije sile, postupak slaganja trokuta sila, uveden u odsječku 3., prelazi u sklapanje *poligona sila*: prikaze sila $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2, \dots, \vec{\mathcal{F}}_n$ (ne nužno tim redoslijedom) nižemo tako da u vršak prikaza prethodne stavljamo početnu točku prikaza sljedeće (slike 14.a. i 16.a.); prikaz rezultante $\vec{\mathcal{F}}$ »zatvara« poligon ostale stranice kojega su prikazi sila koje zbrajamo, pri čemu je njegova početna točka u početnoj točki prikaza prve (ne nužno $\vec{\mathcal{F}}_1$), a šiljak u šiljku prikaza posljednje (ne nužno $\vec{\mathcal{F}}_n$) sile u nizu (slike 14.b. i 16.b.). Rezultanta ne ovisi o redoslijedu kojim prikaze sile unosimo u poligon: slika 15. (različitim su nijansama sive boje prikazana tri različita redoslijeda); usporedite i slike 14.b. do g. na kojima je prikazano svih šest mogućih redoslijeda unošenja triju sila u poligon sila te slike 16.b. i c. na kojima su prikazana dva (od dvadeset i četiri moguća) redoslijeda unošenja sila.

Prikazi sila u poligonu sila (slike 17.b. i c.) na pravcima su usporednima s pravcima njihovih djelovanja (slika a.). Za međusobno usporedne pravce kažemo da imaju isti *smjer*. Svi međusobno usporedni pravci prostora prolaze istom neizmjereno dalekom točkom.

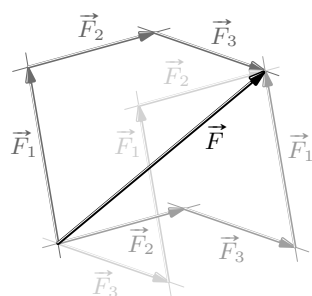
Iako usporedni s njima, pravci u poligonu sila (slike 17.b. i c.) nisu u istim položajnim odnosima kao pravci djelovanja tih sila (slika a.). O položajnim odnosima pravaca djelovanja sila ne možemo iz poligona sila ništa saznati. (Zásada to, doduše, nije pretjerano važno jer znamo da sve sile djeluju u istoj točki.)

17. Ako su pravci djelovanja svih sila koje zbrajamo u jednoj ravnini, poligon je sila ravninski, a ako nisu, poligon će biti prostoran; u prvome će slučaju i rezultanta ležati u istoj ravnini. Djeluju li pak sve sile koje zbrajamo na jednome pravcu, na njemu će biti i njihova rezultanta.

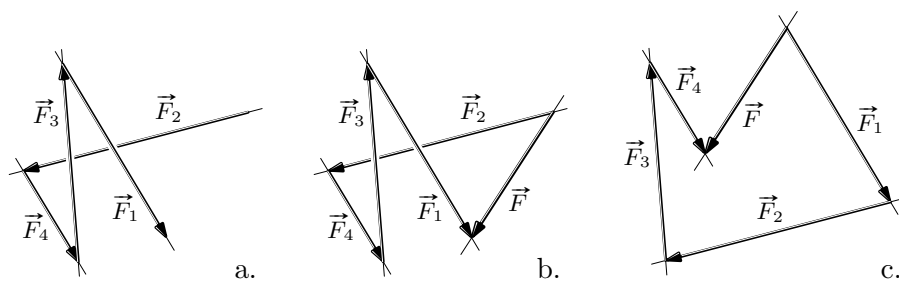
18. Za sile koje djeluju na istome pravcu, a jednakih su intenziteta i orijentacija, kažemo da su *jednake*. Budući da se jednake sile međusobno ni po čemu ne razlikuju, označavat ćemo ih istim slovom. Zbrojimo li n jednakih sila $\vec{\mathcal{F}}$ intenziteta $|\vec{\mathcal{F}}|$, rezultanta $\vec{\mathcal{R}}$ djelovat



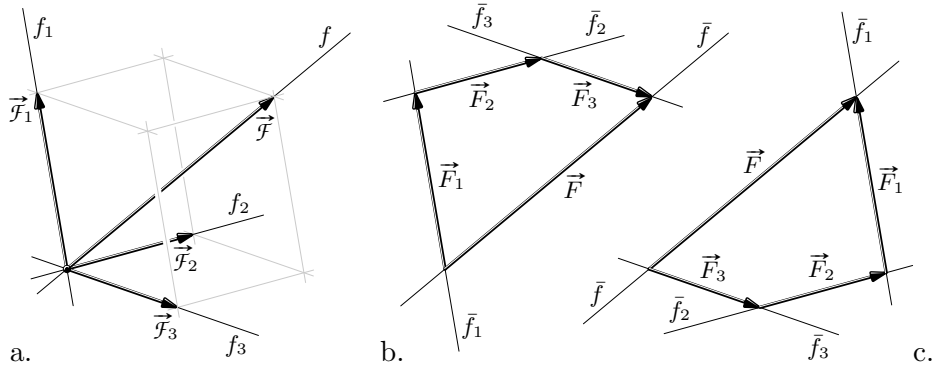
Slika 14.



Slika 15.



Slika 16.

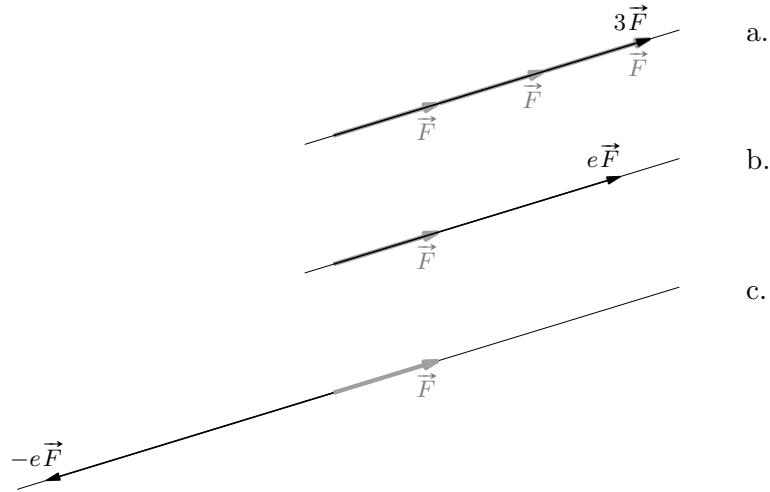


Slika 17.

će na istome pravcu, bit će orijentirana kao i te sile, a intenzitet će joj biti n puta veći od njihova inteziteta: $|R| = \sum_{i=1}^n |F| = n|F|$. Pisat ćemo

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F} = n\vec{F}$$

(slika 18.a. za $n = 3$); desna je strana izraza umnožak prirodnoga broja n i sile $\vec{F}$, pa smo time u stvari definirali *množenje sile prirodnim brojem*.



Slika 18.

Množenje sile realnim brojem definirat ćemo na analogan način: umnožak $c\vec{F}$ realnoga broja c i sile $\vec{F}$ sila je na istome pravcu djelovanja, intenziteta jednakoga umnošku $|c||F|$ apsolutne vrijednosti broja c i intenziteta sile $\vec{F}$ i, ako je broj c pozitivan, smisla djelovanja jednakoga smislu djelovanja sile $\vec{F}$ (slika 18.b.: $c = e$, baza prirodnoga logaritma), a suprotnoga ako je broj c negativan (slika c.: $c = -e$). Posebno, $0 \cdot \vec{F} = \vec{0}$ i $-1 \cdot \vec{F} = -\vec{F}$.

Dijeljenje sile brojem (različitim od nule) množenje je sile recipročnom vrijednošću toga broja:

$$\frac{\vec{F}}{c} = \frac{1}{c} \vec{F} = c^{-1} \vec{F}.$$

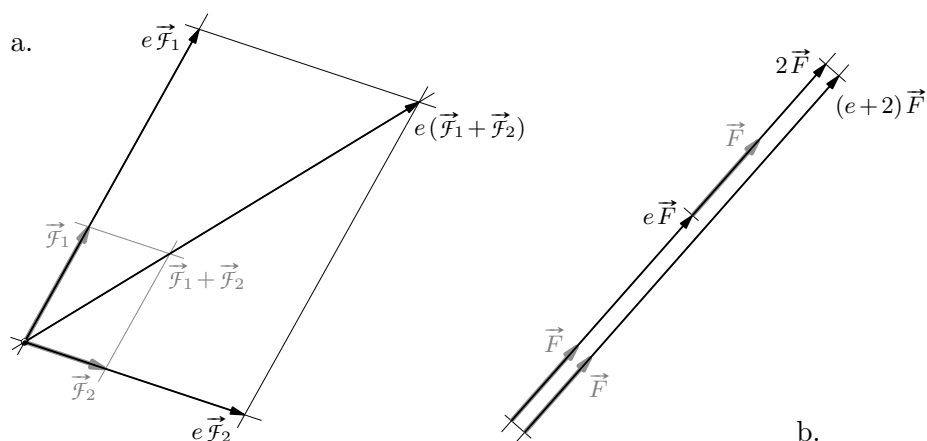
19. Jediničnu silu na pravcu f na kojem djeluje sila $\vec{F}$, smisla djelovanja kao ta sila, možemo naći tako da silu podijelimo njezinim intezitetom:

$$\vec{1}_f = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}. \quad (4)$$

20. Slika 19.a. pokazuje da je množenje sile brojem *distributivno* s obzirom na zbrajanje sile:

$$c\vec{F}_1 + c\vec{F}_2 = c(\vec{F}_1 + \vec{F}_2); \quad (5)$$

svejedno je, prema tome, pomnožimo li prvo svaku silu (istim) brojem, pa dobivene sile zbrojimo, ili prvo zbrojimo sile, pa zbroj pomnožimo tim brojem.



Slika 19.

Množenje je sile brojem distributivno i s obzirom na zbrajanje brojeva:

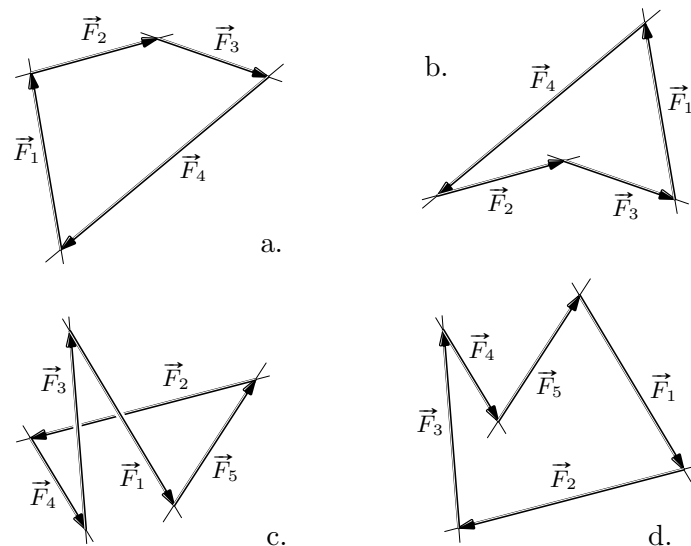
$$(c_1 + c_2)\vec{F} = c_1\vec{F} + c_2\vec{F}; \quad (6)$$

jednake ćemo sile, prema slici 19.b., dobiti ako silu pomnožimo zbrojem brojeva i ako je pomnožimo svakim od brojeva koje smo zbrajali pa dobivene sile zbrojimo.

21. *Zatvoreni poligon sile.* Padne li vršak prikaza posljednje sile niza koji zbrajamo u početnu točku prikaza prve (slika 20.), poligon će sile biti *zatvoren*. (O prvoj je i posljednjoj sili smisleno govoriti samo pri sastavljanju zatvorenoga poligona. U sklopljenome poligonu bilo koja sila može biti prva, pa možemo reći i da je poligon sile zatvoren ako je vršak prikaza svake sile niza u početnoj točki prikaza sljedeće.)

Kao što rezultanta niza sile ne ovisi o redoslijedu kojim sile uvodimo u zbroj, tako o tom redoslijedu ne ovisi ni zatvorenost poligona sile — ako je poligon zatvoren za neki redoslijed sile, bit će zatvoren i za svaki drugi (usporedite slike 20.a. i b. te c. i d.).

Za razliku od poligonā na slici 20., poligoni na slikama 14.a. i 16.a. očito su otvoreni. No, kada govorimo o zatvorenosti poligona sile, u obzir treba uzeti ne samo poklapanje »prvoga« i »posljednjega« njegovog vrha (kao u geometriji), nego i orijentaciju njegovih stranica. Stoga sam u odsječku 16. opisujući zbrajanje sile primjenom poligona sile stavio navodnike oko riječi »zatvara« u »prikaz rezultante $\vec{F}$ »zatvara« poligon«: poligoni sile na



Slika 20.

slikama 14.b. do g. i 16.b. i c. zatvoreni su u geometrijskome, ali ne i u statičkome smislu, dok su poligoni sila na slikama 20.a.–d. zatvoreni i geometrijski i statički. Poligoni sila koji su zatvoreni statički zatvoreni su uvijek i geometrijski, dok geometrijski zatvoreni poligoni sila mogu, ali i ne moraju biti zatvoreni statički. Kažem li da je poligon sila zatvoren, mislim na zatvorenost u statičkome (a time i u geometrijskome) smislu, dok ću za poligon zatvoren samo u geometrijskome smislu to tako i reći ili, kao prije, riječ »zatvoren« staviti u navodnike.

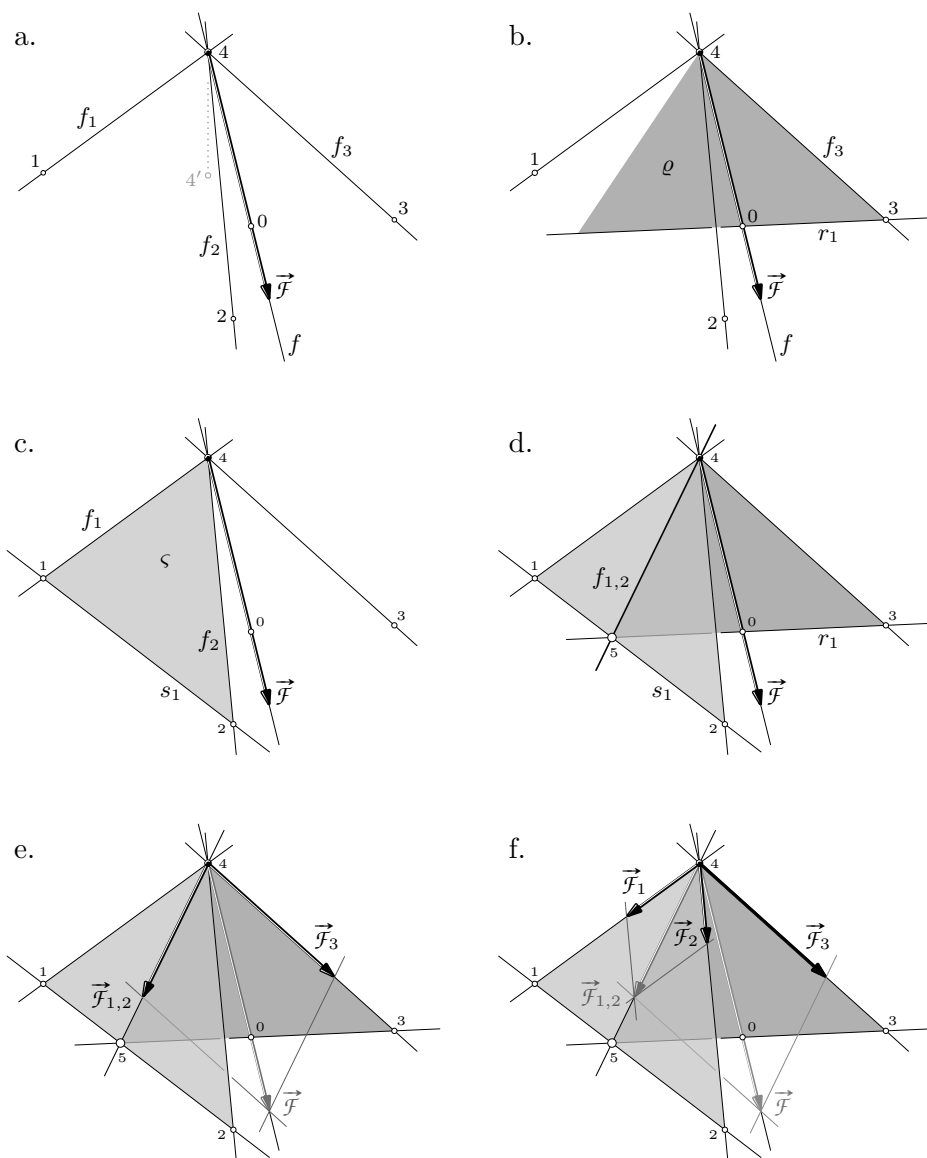
22. Ako je poligon sila zatvoren (slika 20.), njihov zbroj iščezava,

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad (7)$$

a ako zbroj sila iščezava, njihova se djelovanja na zajedničko hvatište poništavaju, pa je ono u ravnoteži, a niz je sila koje zbrajamo statički neutralan ili uravnotežen.

23. Neovisno o broju sila koje zbrajamo, postoji samo jedna rezultanta (koja može biti i 0). Prolaze li hvatištem sile tri pravca koji nisu u jednoj ravnini, sila se može rastaviti u komponente na tim pravcima, pri čemu je moguć samo jedan rastav (sljedeći odsječak). Ako su pravci u jednoj ravnini i ako je i sila u njoj, zadatak rastavljanja jest rješiv, ali rješenja je bezbroj — zadatak je, dakle, statički neodređen (odsječak 33.); ako pak sila nije u ravnini pravaca, zadatak nije rješiv (isti odsječak). A ako hvatištem sile prolaze četiri pravca ili više njih i ako svi pravci nisu u ravnini u kojoj nije sila, zadatak je rastavljanja statički neodređen (odsječak 34.).

24. *Rastavljanje sile u tri komponente na nekomplanarnim pravcima.* Neka su f_1, f_2 i f_3 tri nekomplanarna pravca kroz hvatište sile $\vec{F}$ koja djeluje na pravcu f koji nije ni u jednoj od triju ravnina razapetih parovima pravaca f_1 i f_2 , f_1 i f_3 , f_2 i f_3 (prikaz u kosoj aksonometriji na slici 21.a.). Točke 0, 1, 2 i 3 probodišta su pravaca f, f_1, f_2 i f_3 s pogodno odabranom horizontalnom ravninom π_1 ; točka 4 u kojoj se pravci sijeku iznad je te ravnine (točka 4' ortogonalna je projekcija točke 4 na tu ravninu).



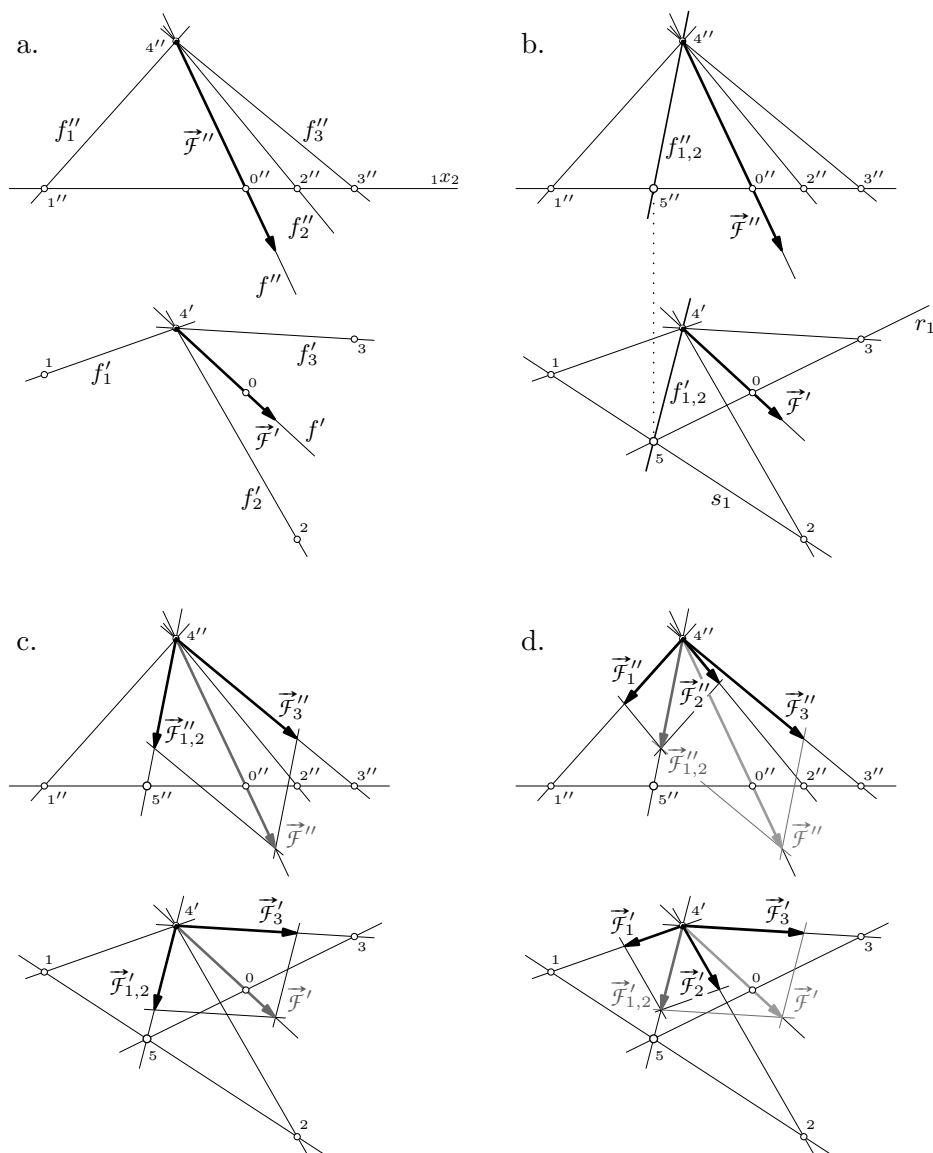
Slika 21.

Naučili ste silu rastaviti u dvije komponente s pomoću paralelograma sila (u odsječku 1.) ili s pomoću trokuta sila (u odsječku 5.); znate također da to možete napraviti samo ako su pravci djelovanja komponenata i pravac njezina djelovanja komplanarni.

U postupku rastavljanja sile $\vec{F}$ u komponente na tri nekomplanarna pravca obrnut ćemo stoga redoslijed koraka postupka zbrajanja triju sila (primjerice na slici 13.b.). U prvom ćemo koraku silu $\vec{F}$ u ravnini ϱ , razapetoj pravcima f i f_3 (slika 21.b.), rastaviti u komponente $\vec{F}_3$ na pravcu f_3 i $\vec{F}_{1,2}$ na pravcu $f_{1,2}$ (slika e.). Silu $\vec{F}_{1,2}$ ćemo u sljedećem koraku moći rastaviti u komponente na pravcima f_1 i f_2 (slika f.) samo ako je pravac $f_{1,2}$ i u ravnini ς koju razapinju ta dva pravca (slika c.). Pravac $f_{1,2}$ mora, prema tome, ležati u obje spomenute ravnine, pa je on njihova presječna. Točka 4 leži u obje ravnine (jer se u njoj sijeku parovi pravaca f, f_3 i f_1, f_2), pa njome prolazi i presječna $f_{1,2}$ tih ravnina. Stoga nam za nalaženje te presječne treba samo još jedna točka; uzet ćemo sjecište pravaca u kojima ravnine ϱ i ς sijeku ravninu π_1 . Presječna r_1 ravnina ϱ i π_1

prolazi probodištima 0 i 3 pravaca f i f_3 s ravninom π_1 , a presječna s_1 ravnina ς i π_1 probodištima 1 i 2 pravaca f_1 i f_2 s ravninom π_1 . Sjecište pravaca r_1 i s_1 , točka 5, tražena je točka pravca $f_{1,2}$; ona je njegovo probodište s ravninom π_1 (slika d.).

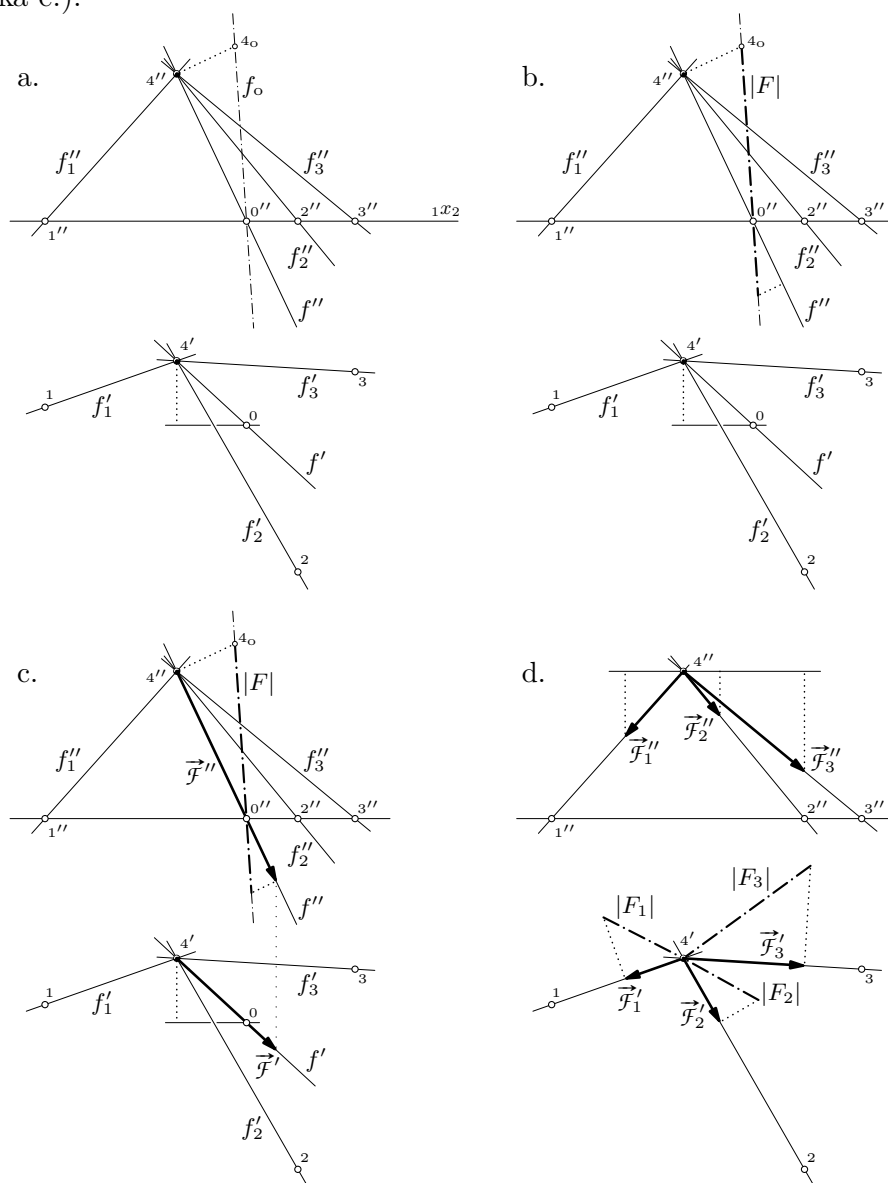
Uzmemo li da je ravnina π_1 tlocrtna ravnina, pravci r_1 i s_1 bit će prvi tragovi ravnina ϱ i ς , a točke 0, 1, 2 i 3 prva probodišta pravaca f , f_1 , f_2 i f_3 . Na slici 22. postupak je rastavljanja sile u komponente prikazan Mongeovim dvocrtnim postupkom. Sjecište prvih tragova ravnina ϱ i ς nađeno je, naravno, u tlocrtu, $5 = 5'$. Budući da je ta točka u ravnini π_1 , nacrt $5''$ joj je na osi $1x_2$ (slika b.).



Slika 22.

Silu $\vec{F}$ možemo rastaviti u tri komponente i tako da ravninu ϱ postavimo pravcima f i f_2 , a ravninu ς pravcima f_1 i f_3 , ili tako da ravninu ϱ postavimo pravcima f i f_1 , a ravninu ς pravcima f_2 i f_3 [domaće zadaće!]. Rekli smo već: moguć je samo jedan rastav sile u tri komponente na tri nekomplanarna pravca, što znači da na sva tri načina dobivamo isti rastav [usporedite rješenja!].

25. Ako je sila $\vec{F}$ zadana intenzitetom te pravcem i smislom djelovanja, njezine projekcije možemo nacrtati tako da pravac njezina djelovanja prevalimo primjerice u ravninu π_2 (slika 23.a.), od prevaljenoga hvatišta 4_o na stranu određenu smislom djelovanja nanesimo dužinu duljine jednake njezinu intenzitetu $|F|$ u odabranom mjerilu (slika b.) pa na nacrt pravca djelovanja »vratimo« nacrt, a potom na tlocrt pravca »spustimo« tlocrt vrška strelice (slika c.).



Slika 23.

Prevaljivanjem sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ u nacrtanu ili, promjene radi, u tlocrtanu ravninu (kao na slici 23.d.) naći ćemo prave veličine (orijentiranih) dužina kojima su prikazane sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, a time su, uz odabrano mjerilo sila, nađeni i intenziteti tih sila.

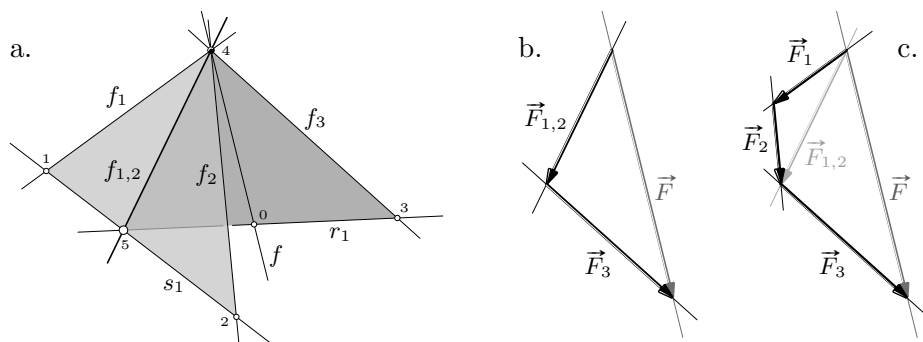
26. *Geometrijski prostor i prostor sila.* U grafičkome će rješavanju složenijih zadataka biti preglednije odvojiti »statički« od »geometrijskoga« dijela postupka: položajne odnose pravaca djelovanja sila rješavat ćemo u *geometrijskom prostoru*, a intenzitete i orijentacije sila te pravce s kojima su pravci djelovanja nekih od njih usporedni tražit ćemo u *pro-*

storu sila (sinonimno: u *statičkom prostoru*). Geometrijski je prostor »stvarni« prostor u kojem na tijela, ogoljena do čistih, često i idealiziranih oblika, u određenim točkama i na određenim pravcima djeluju sile orijentacije i intenzitete kojih u tom prostoru ostavljamo neutvrđenima; zásada, u statici točke, u geometrijskom prostoru postoji samo jedna točka na koju djeluju sile na pravcima koji njome prolaze. Prostor sila pak zamišljeni je prostor bez tijelā, u kojem sile, *na pravcima koji nisu pravci njihovih djelovanja, nego su tek usporedni s njima*, imaju određene orijentacije i određene intenzitete. Riječ je o istim silama smještenima u dva prostora, ali im u različitim prostorima uočavamo ili utvrđujemo različite značajke.

Grafički je prikaz položajnih odnosa *položajni plan* (ili *plan položajā*), a odnosi u prostoru sila prikazuju se poligonom sila. Trokut je mnogokut/poligon s najmanjim mogućim brojem stranica, pa smo već pri crtanju trokuta sila (slike 4. i 5.) izašli iz geometrijskoga prostora i ušli u prostor sila — pomicanjem jedne sile s pravca njezina djelovanja na usporedni pravac izgubili smo »stvarne« položajne odnose; u geometrijskom su pak prostoru umjesto položajnoga plana ostale tek riječi »sve sile djeluju u istoj točki«.

Položajni plan crtamo u *mjerilu duljina* u kojem jedan centimetar na crtežu odgovara određenome broju centimetara ili metara u prostoru, a poligon sila u *mjerilu sila* u kojem jedan centimetar na crtežu odgovara određenome broju njutna ili kilonjutna.

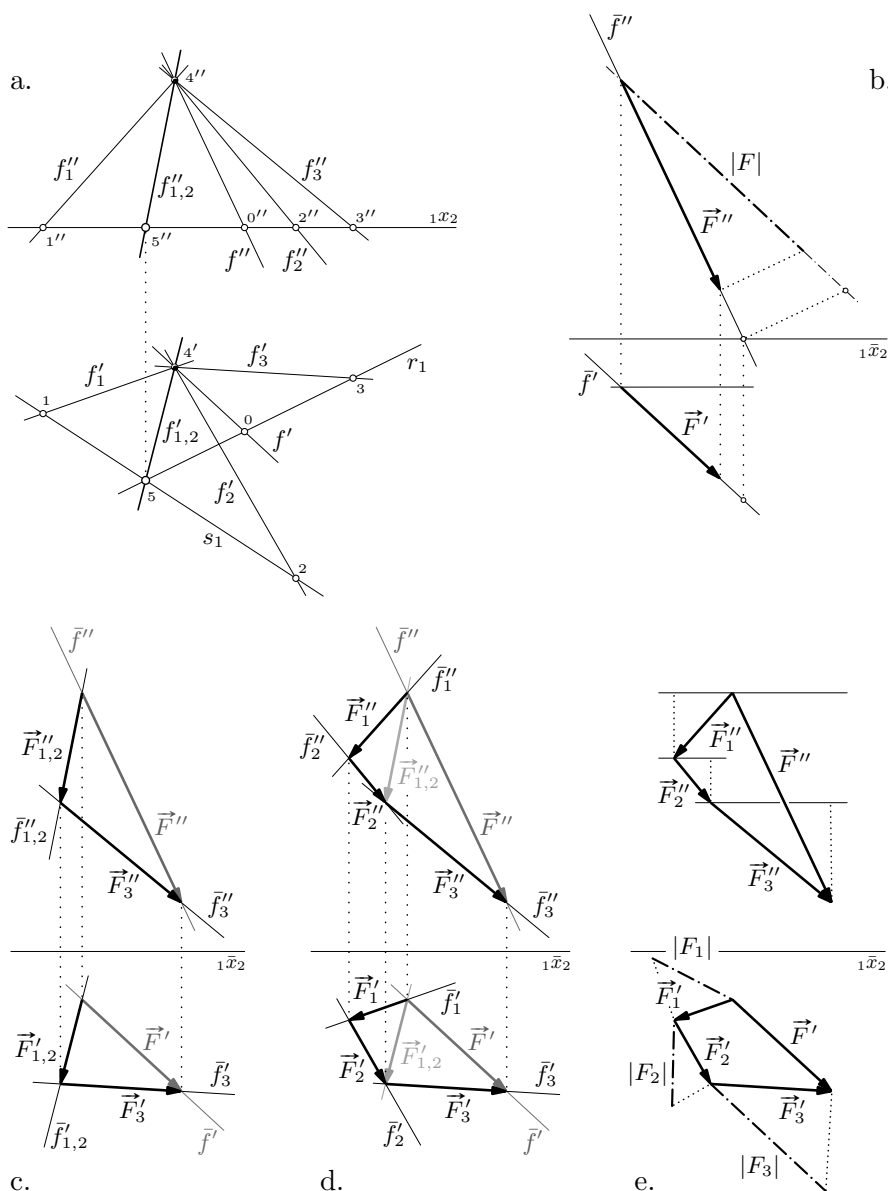
27. Riješit ćemo ponovno zadatak rastavljanja sile u tri komponente na zadanim nekomplanarnim pravcima. U planu položajā nalazimo pravac $f_{1,2}$ na kojem djeluje sila $\vec{F}_{1,2}$ (aksonometrijski prikaz na slici 24. a., tlocrt i nacrt na slici 25.a.; to su u stvari slike 21.d. i 22.b., nacrtane ponovno, bez prikazā sile $\vec{F}$).



Slika 24.

Daljnje korake provodimo u prostoru sila. Prostor je sila prostor koji »postoji« »pored« geometrijskoga prostora, pa u njemu tlocrtna i nacrtana ravnina nisu ravnine π_1 i π_2 , nego ih možemo odabrati neovisno (ali tako da su usporedne s ravninama π_1 i π_2). Nacrt i tlocrt prikaza sile $\vec{F}$ nalazimo prevajivanjem pravca usporednoga s pravcem njezina djelovanja u nacrtanu ravninu prostora sila (slika 25.b.).

Silu $\vec{F}$ primjenom pravila trokuta sila rastavljamo u komponente na pravcima $f_{1,2}$ i f_3 (slike 24.b. i 25.c.: kroz početne točke tlocrta i nacрта orijentirane dužine $\vec{F}$ kojom je ta sila prikazana crtamo pravce $\vec{f}'_{1,2}$ i $\vec{f}''_{1,2}$ usporedne s pravcima $f'_{1,2}$ i $f''_{1,2}$, a kroz njihove vrške pravce $\vec{f}'_3$ i $\vec{f}''_3$ usporedne s pravcima f'_3 i f''_3 ; na tim su pravcima tlocrti i nacrti



Slika 25.

prikaza $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_3$ sila $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_3$). U rastavljanju sile s pomoću pravila trokuta početna je točka prikaza prve komponente, znamo, u početnoj točki prikaza sile koju rastavljamo, dok je vršak prikaza druge komponente u vršku prikaza te sile; orijentacije komponentata (i njihovih tlocrta i nacrta) time su određene. Dobivenu silu $\vec{F}_{1,2}$ u sljedećem koraku na sličan način rastavljamo u komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na pravcima f_1 i f_2 (slike 24.c. i 25.d.: početnim točkama njezinih prikaza u tlocrtu i nacrtu prolaze paralele $\bar{f}_1'$ i $\bar{f}_2''$ s pravcima f_1' i f_1'' , a vršcima paralele $\bar{f}_2'$ i $\bar{f}_2''$ s pravcima f_2' i f_2''). Poligon sile prostorni je četverokut.

Intenziteti komponentata $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ određeni su na slici 25.e. prevlađivanjem u tlocrtnu ravninu prostora sile.

[Rastavite silu $\vec{F}$ u komponente na pravcima f_1 , f_2 i f_3 prema izrazu

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2,3} = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)!$$

28. Iako orijentirane dužine u poligonu sila nisu sile nego tek njihovi prikazi, stalno je isticanje te razlike razvučeno te postaje zamornim, pa ću odsada u opisima postupaka ponajčešće govoriti o silama i onda kada je riječ tek o njihovim prikazima, ali ću ih u opisima poligonā sila označavati, kao i na crtežima, »običnim« kurzivnim slovima $\vec{F}, \vec{P}$ &td.

29. Sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ u poligonu su sila povezane u »lanac«: početna točka sile $\vec{F}_2$ u vršku je sile $\vec{F}_1$, a u vršku sile $\vec{F}_2$ početna je točka sile $\vec{F}_3$. Sila $\vec{F}$, koja je njihov zbroj, počinje u početnoj i završava u završnoj točki lanca: početna joj je točka u početnoj točki sile $\vec{F}_1$, a vršak u vršku sile $\vec{F}_3$.

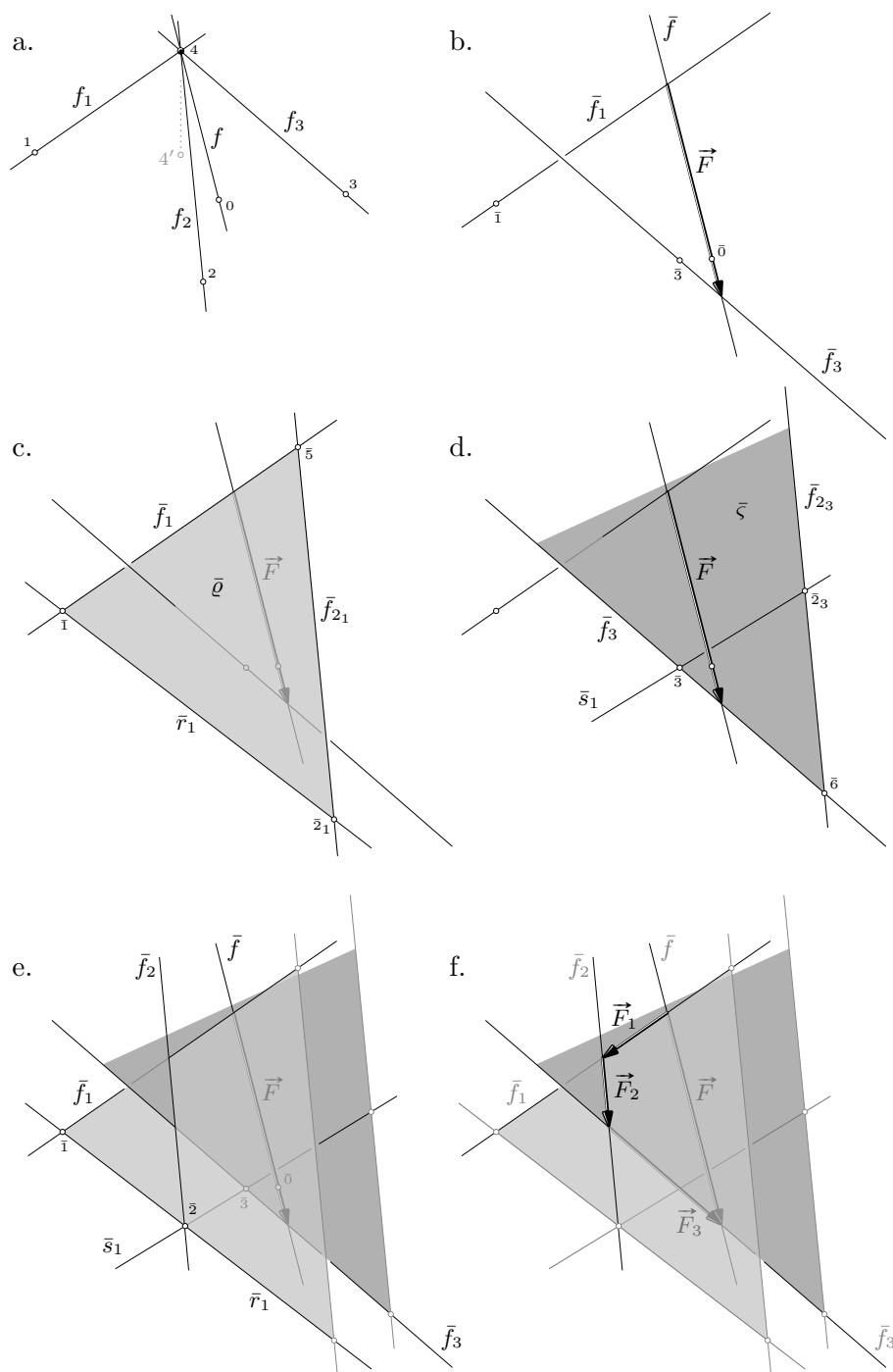
Taj je »lanac« sila temelj postupka rastavljanja sile u tri komponente na zadanim nekomplanarnim pravcima sāmō u prostoru sila, bez »međukoraka« s pravcem $f_{1,2}$ i silom $\vec{F}_{1,2}$.

U poligonu sila početnom točkom i vrškom sile $\vec{F}$ povlačimo pravce $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ usporedne s pravcima f_1 i f_3 u položajnom planu (aksonometrijski prikaz na slikama 26.b. i a., Mongeove projekcije na slikama 27.b. i a.); sila $\vec{F}_1$ će u poligonu sila biti na pravcu $\bar{f}_1$, a sila $\vec{F}_3$ na pravcu $\bar{f}_3$ (ponovit ću: to nisu pravci djelovanja tih sila; pravci su njihovih djelovanja u geometrijskome prostoru), pri čemu će početna točka sile $\vec{F}_1$ biti u početnoj točki sile $\vec{F}$, dok će u vršku sile $\vec{F}$ biti vršak sile $\vec{F}_3$. Želimo li sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ u poligonu sila nanizati u »lanac« (slike 26.f. i 27.f.), pravac $\bar{f}_2$, usporedan s pravcem f_2 , mora sjeći pravce $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$; geometrijskim rječnikom: tražimo transverzalu pravaca $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ usporednu s pravcem f_2 . (To je poseban slučaj nalaženja transverzale dvaju mimosmjernih pravaca koja prolazi zadanom točkom (koja nije ni na jednome od njih) u kojem je ta točka neizmjereno daleka točka pravca f_2 .)

Pravci koji su usporedni s pravcem f_2 i koji sijeku pravac $\bar{f}_1$, poput pravca $\bar{f}_{21}$ na slikama 26.c. i 27.c., leže u jednoj ravnini; nazovimo je $\bar{\varrho}$. Isto su tako u jednoj ravnini, nazvat ćemo je $\bar{\varsigma}$, pravci usporedni s pravcem f_2 koji sijeku pravac $\bar{f}_3$; pravac $\bar{f}_{23}$ na slikama d. jedan je od njih. Presječnica $\bar{f}_2$ tih dviju ravnina siječe i pravac $\bar{f}_1$ i pravac $\bar{f}_3$ i usporedna je s pravcem f_2 (slike e.). Vršak sile $\vec{F}_1$ i početna točka sile $\vec{F}_2$ u sjecištu su pravaca $\bar{f}_2$ i $\bar{f}_1$, dok su vršak sile $\vec{F}_2$ i početna točka sile $\vec{F}_3$ u sjecištu pravaca $\bar{f}_2$ i $\bar{f}_3$ (slike f.).

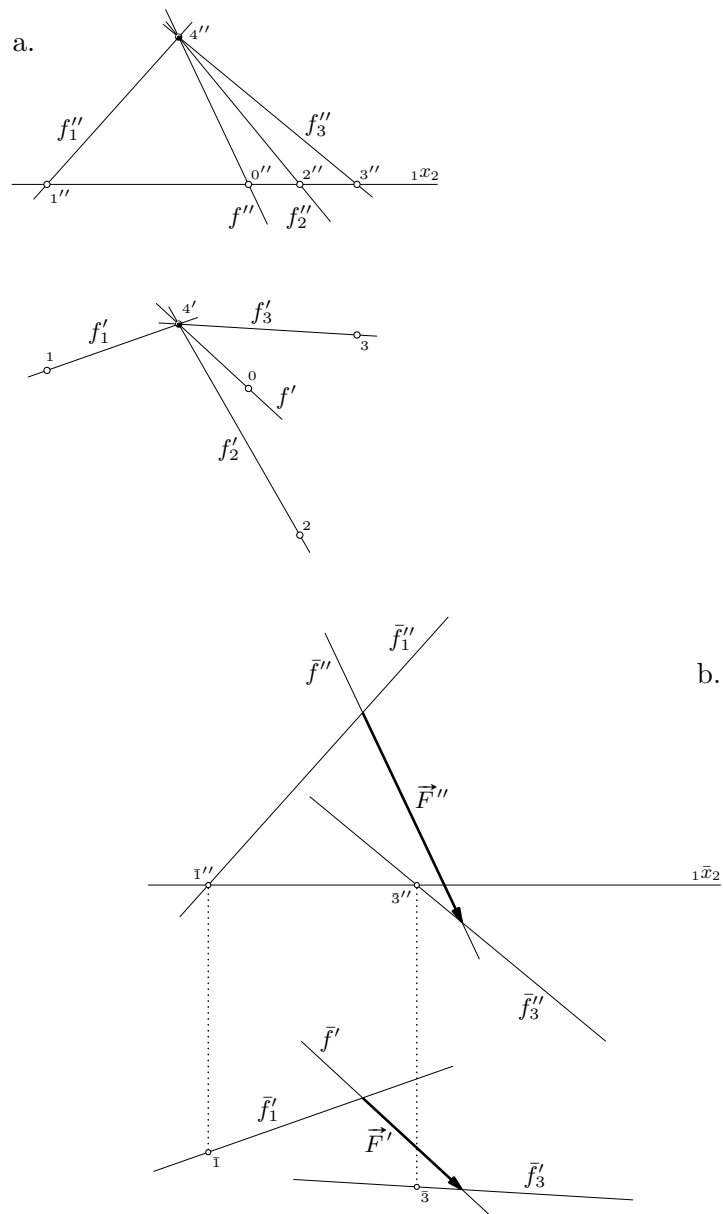
Pravac $\bar{f}_{21}$ jedan je, bilo koji, pravac usporedan s pravcem f_2 koji uz to siječe pravac $\bar{f}_1$ (u točki 5), pa pravci $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_{21}$ određuju ravninu $\bar{\varrho}$. Njezin prvi trag $\bar{r}_1$ prolazi prvim probodištima 1 i 2₁ tih pravaca (slike 26.c. i 27.c.). Prvi pak trag $\bar{s}_1$ ravnine $\bar{\varsigma}$ prolazi prvim probodištem 3 pravca $\bar{f}_3$ i prvim probodištem 2₃ nekoga, bilo kojeg, pravca $\bar{f}_{23}$ koji je usporedan s pravcem f_2 i koji siječe (u točki 6) pravac $\bar{f}_3$ (slike d.). Traženi pravac $\bar{f}_2$ prolazi sjecištem 2 tragova $\bar{r}_1$ i $\bar{s}_1$ usporedno s pravcem f_2 (slike e.); budući da je točka 2 prvo probodište pravca $\bar{f}_2$, njome prolazi tlocrt $\bar{f}_2'$ usporedno s $\bar{f}_{21}'$ i $\bar{f}_{23}'$; nacrtom 2'' prolazi nacrt $\bar{f}_2''$ usporedno s $\bar{f}_{21}''$ i $\bar{f}_{23}''$ (Mongeov postupak, slika 27.e.).

Zadatak se, dakako, može riješiti i tako da se u poligonu sila pravac $\bar{f}_1$ povuče vrškom, a pravac $\bar{f}_3$ početnom točkom sile $\vec{F}$. A može se i jednom od krajnjih točaka sile $\vec{F}$ povući

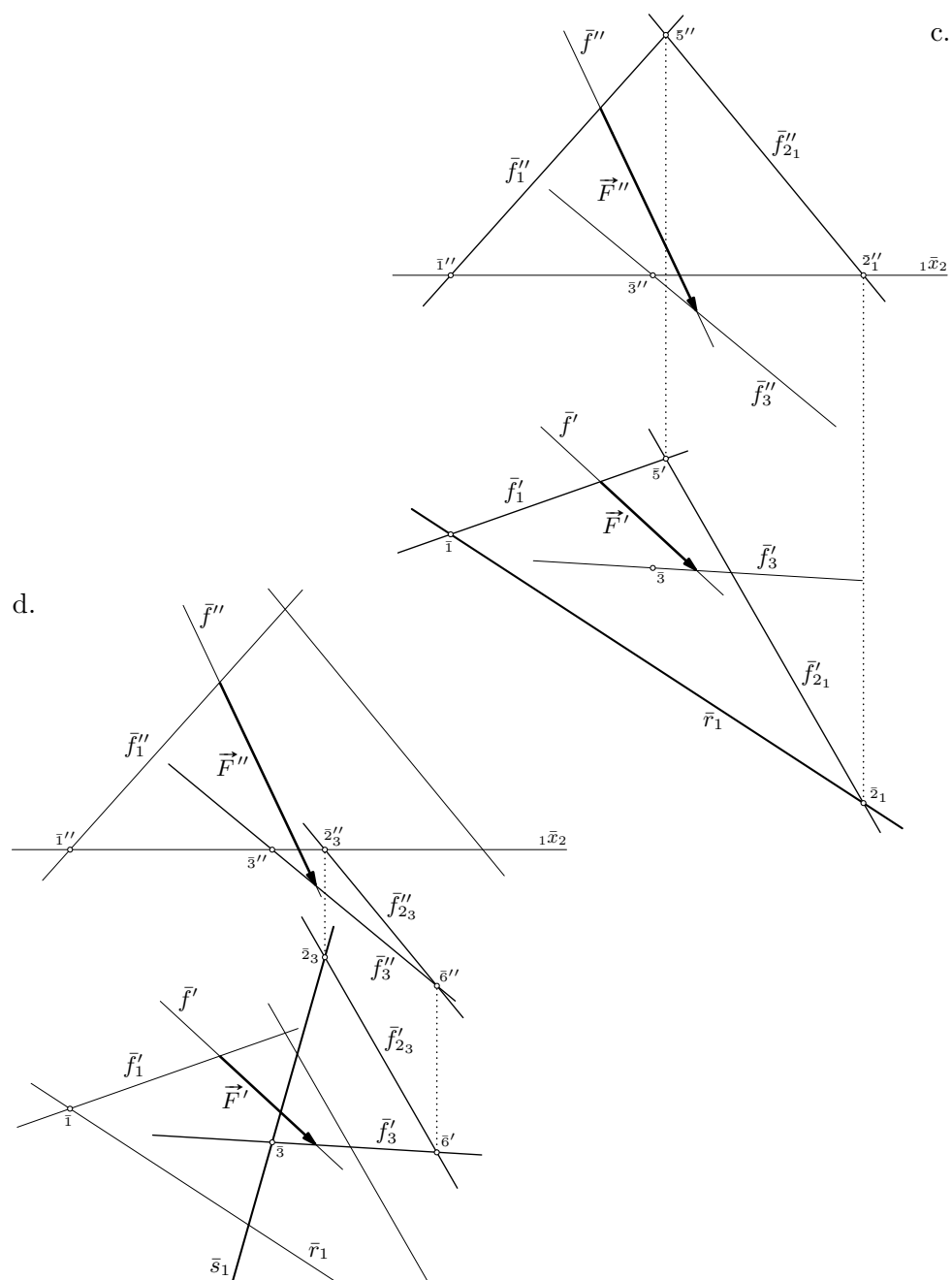


Slika 26.

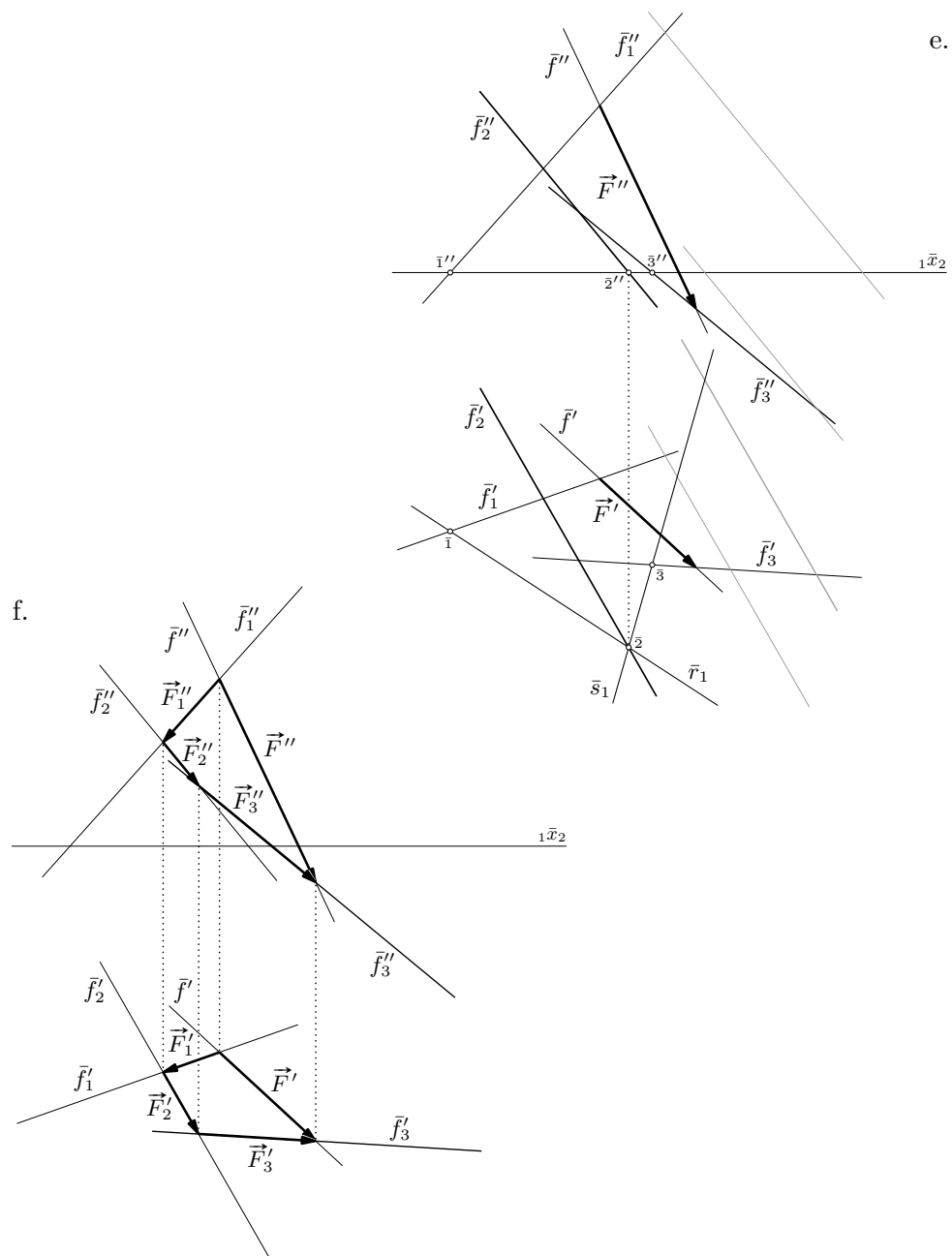
usporednica s pravcem f_2 , drugom krajnjom točkom usporednica s pravcem f_1 (ili s pravcem f_3), pa tražiti njihovu transverzalu usporednu s pravcem f_3 (ili s pravcem f_1) [domaće zadaće!].



Slika 27. (koja se nastavlja na sljedećoj stranici...)

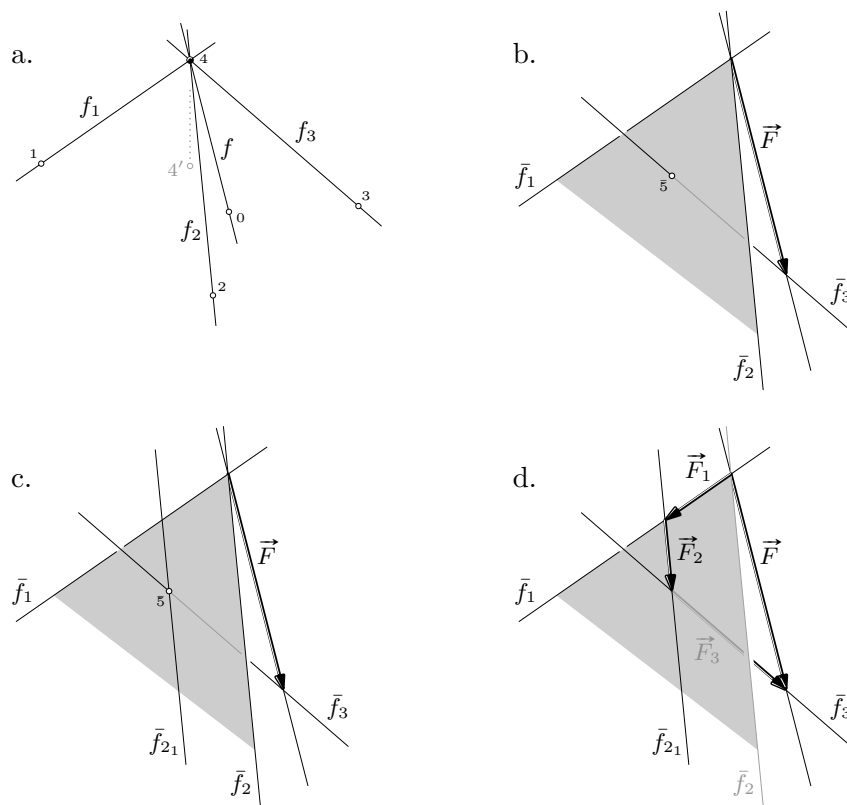


Slika 27. (... koja je nastavak s prethodne stranice,
a nastaviti će se i na sljedećoj...)



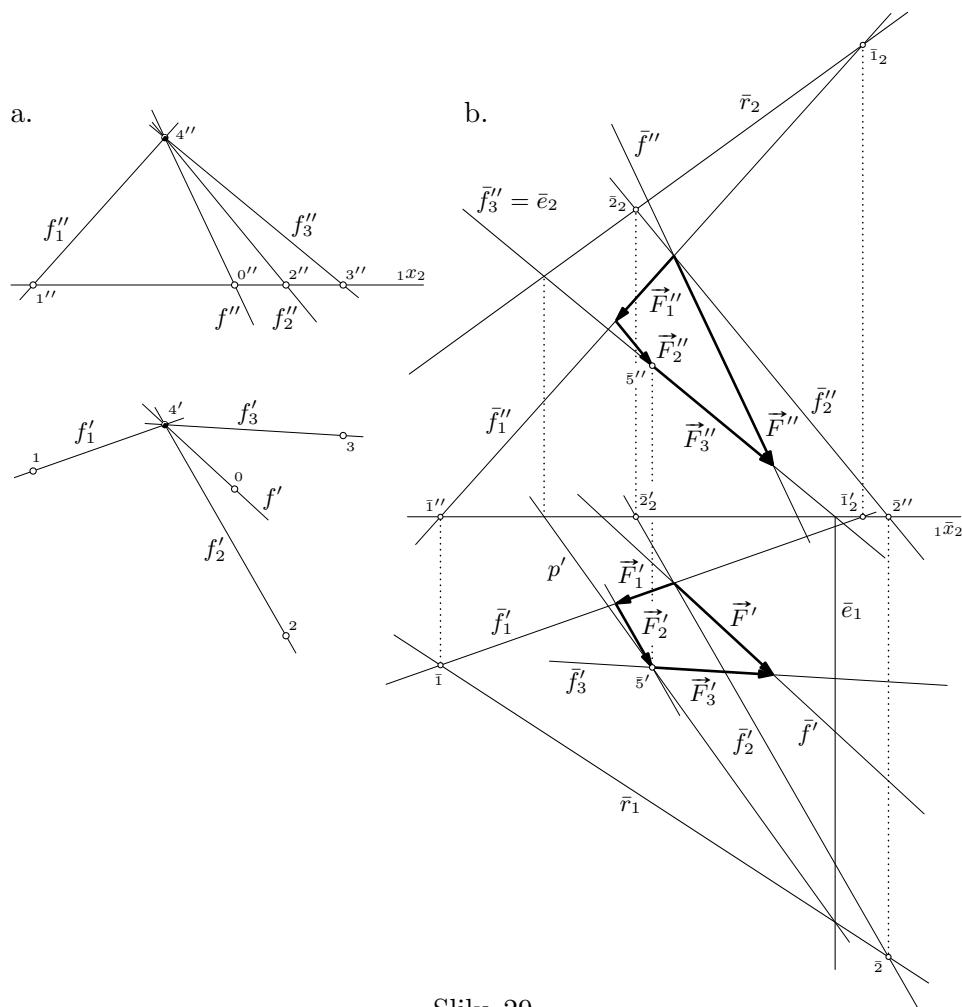
Slika 27. (... koja je nastavak s prethodne stranice)

30. Još jedan postupak rastavljanja sile u tri komponente na zadanim nekomplanarnim pravcima prikazan je u kosoj aksonometriji na slikama 28. (kosa aksonometrija) i 29. (Mongeov postupak). Može se reći da se vraćamo na zbroj $\vec{F}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, ali sada u prostoru sila (i bez crtanja te sile). Sila $\vec{F}_{1,2}$ leži u ravlini koju razapinju pravci $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$. Da sklopimo trokut sila prema izrazu $\vec{F} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_3$, pravce $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$ i, time, ravninu $\bar{\varrho}$ moramo smjestiti u početnu točku sile $\vec{F}$ (jer u toj točki mora biti i početna točka sile $\vec{F}_{1,2}$), a pravac $\vec{f}_3$ u vršak sile $\vec{F}$ (jer u njemu mora biti i vršak sile $\vec{F}_3$) (slika 28.b.). Uz to, vršak sile $\vec{F}_{1,2}$ i početna točka sile $\vec{F}_3$ moraju biti u istoj točki, pa, prema tome, u zajedničkoj točki ravnine $\bar{\varrho}$ i pravca $\vec{f}_3$, u probodištu $\bar{5}$ pravca $\vec{f}_3$ i ravnine $\bar{\varrho}$ (ista slika). Sila $\vec{F}_{1,2}$ zbroj je sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Početna je točka sile $\vec{F}_1$ u početnoj točki sile $\vec{F}_{1,2}$, dok je vršak sile $\vec{F}_2$ u vršku sile $\vec{F}_{1,2}$. Sila $\vec{F}_1$ na pravcu je $\vec{f}_1$, a sila $\vec{F}_2$ na pravcu koji prolazi točkom $\bar{5}$ (u kojoj je vršak sile $\vec{F}_{1,2}$) usporedno s pravcem $\vec{f}_2$; na slici c. taj je pravac označen s $\vec{f}_{21}$. Sklopljeni je poligon sila prikazan na slici d.



Slika 28.

U Mongeovu je dvocrtnom postupku (slika 29.) probodište $\bar{5}$ pravca $\vec{f}_3$ i ravnine $\bar{\varrho}$ određeno pomoću druge projicirajuće ravnine $\bar{\epsilon}$. U nacrtu se sve u toj ravnini projicira u njezin drugi trag, pa je $\bar{e}_2 = \bar{f}_3'' = \bar{p}''$, gdje je p presječna ravnina $\bar{\epsilon}$ i $\bar{\varrho}$. Tlocrt $\bar{p}'$ presječnosti $\bar{p}$ prolazi sjecištem tragova $\bar{e}_1$ i $\bar{r}_1$ i tlocrtom sjecišta tragova $\bar{e}_2$ i $\bar{r}_2$, a tlocrt $\bar{5}'$ traženoga probodišta $\bar{5}$ sjecište je pravaca $\bar{p}'$ i $\bar{f}_3'$.



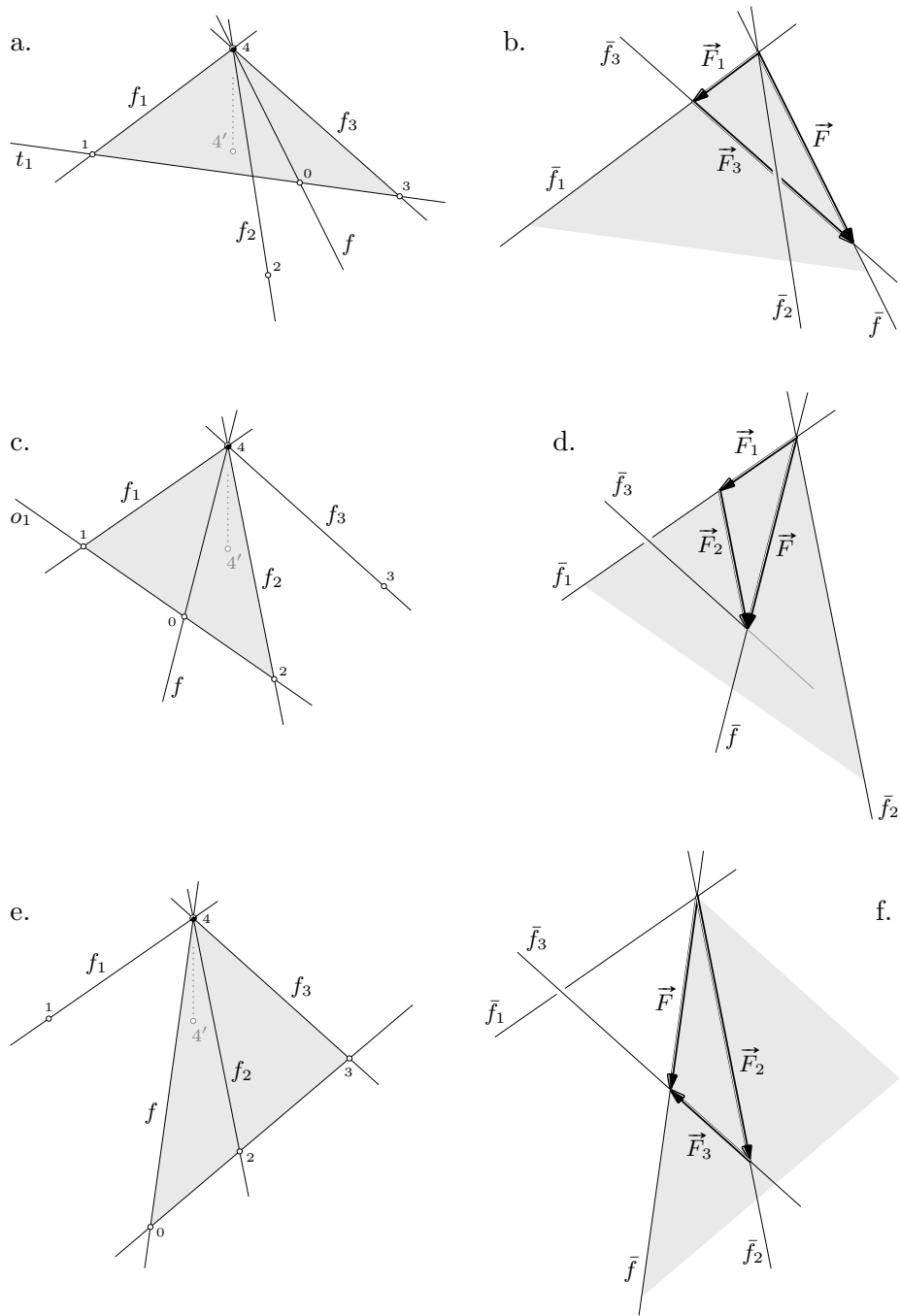
Slika 29.

31. Leži li pravac djelovanja sile $\vec{F}$ u ravnini τ koju razapinju pravci f_1 i f_3 (slika 30.a.), pravci $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$, u prostoru sila povučeni kroz početnu točku i vršak sile $\vec{F}$, bit će u jednoj ravnini (u kojoj je i sila $\vec{F}$), te će se sjeći.² U njihovu će sjecištu biti vršak sile $\vec{F}_1$ i početna točka sile $\vec{F}_3$ (slika b.), pa sile $\vec{F}_2$ neće biti. Leži li pak pravac f u ravnini ω razapetoj pravcima f_1 i f_2 (slika c.), probodište $\bar{5}$ pravca $\bar{f}_3$ i ravnine razapete pravcima $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_2$ bit će u vršku sile $\vec{F}$. Kako je u probodištu $\bar{5}$ i vršak sile $\vec{F}_2$ (slika d.), sile $\vec{F}_3$ neće biti. Napokon, leži li pravac f u ravnini razapetoj pravcima f_2 i f_3 (slika e.), pravac $\bar{f}_2$ prolazit će početnom točkom sile $\vec{F}$ [zašto?] u kojoj će stoga biti i početna točka sile $\vec{F}_2$ tako da sada neće biti sile $\vec{F}_1$ (slika f.).

Prema tome, ako pravac djelovanja sile $\vec{F}$ leži u ravnini dvaju pravaca, silu rastavljamo u dvije komponente na tim pravcima, a treća komponenta, na trećem pravcu, koji »izlazi« iz ravnine, ne postoji; prostorni četverokut sila izobličio se u ravninski trokut.

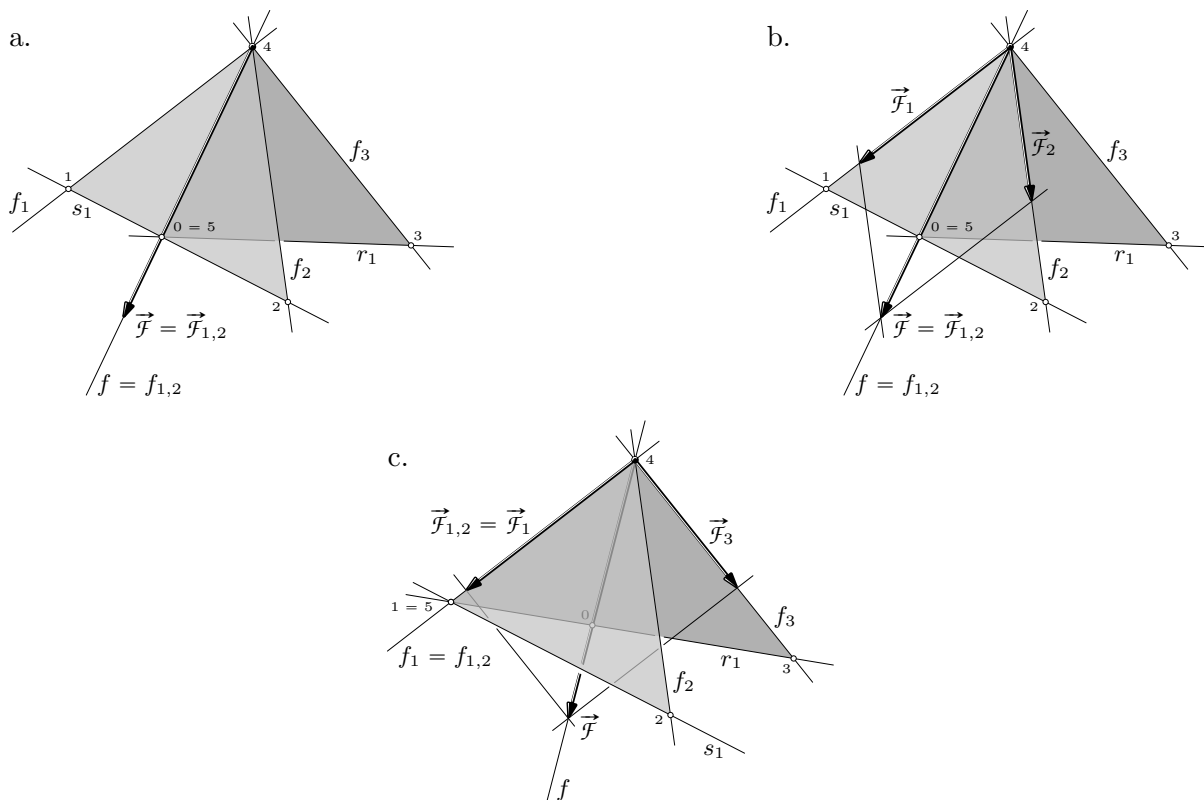
Ako silu $\vec{F}$ rastavljamo u geometrijskom prostoru ili dijelom u geometrijskom, a dijelom u statičkom prostoru (postupcima opisanim u odsječcima 24. i 27. i prikazanim na slikama 21., 22. i 25.), i ako su pravci f , f_1 i f_2 u jednoj ravnini, nazvali smo je ω ,

² Pravci koji sijeku pravac f , a usporedni su s pravcem f_3 , leže u ravnini τ , pa sijeku i pravac f_1 . Pravci $\bar{f}$, $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ u istome su prostornom odnosu kao i pravci f , f_1 i jedna od tih usporednica.



Slika 30.

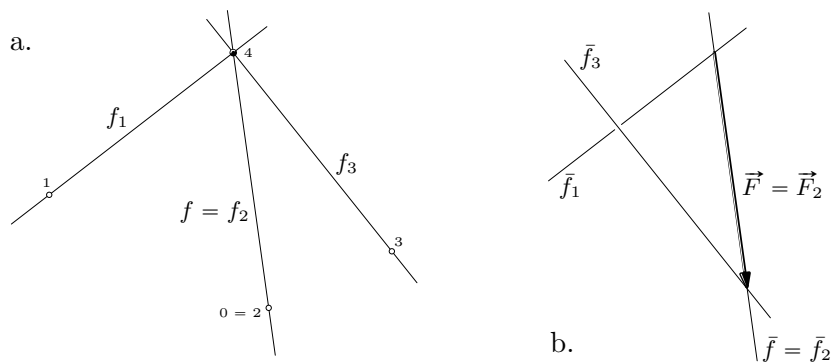
pravac $f_{1,2}$, koji je presječnica ravnine ϱ , razapete pravcima f i f_3 , i ravnine ς , razapete pravcima f_1 i f_2 , poklopit će se s pravcem f jer je taj pravac i u ravnini ς (ta je ravnina ustvari ravnina pravaca f , f_1 i f_2 , ravnina ω). Budući da je $f = f_{1,2}$, u »rastavu« u komponente na pravcima $f_{1,2}$ i f_3 (u ravnini ϱ) bit će $\vec{\mathcal{F}}_{1,2} = \vec{\mathcal{F}}$ i $\vec{\mathcal{F}}_3 = \vec{0}$ (slika 31.a.). Silu $\vec{\mathcal{F}}_{1,2}$ možemo potom u ravnini $\varsigma = \omega$ rastaviti u komponente $\vec{\mathcal{F}}_1$ i $\vec{\mathcal{F}}_2$ na pravcima f_1 i f_2 (slika b.). Ako su pravci f , f_1 i f_3 u jednoj ravnini, ravnini τ , pravac $f_{1,2}$ poklopit će se s pravcem f_1 jer je pravac f_1 i u ravnini ϱ (koja je ustvari ravnina τ). U ravnini ϱ silu $\vec{\mathcal{F}}$



Slika 31.

rastavljamo u komponente $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_3$ na pravcima $f_{1,2}$ i f_3 (slika c.). Kako je $f_{1,2} = f_1$, u »rastavu« u ravnini ζ bit će $\vec{F}_1 = \vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_2 = 0$ (također slika c.). Ako su pak u jednoj ravnini pravci f , f_2 i f_3 , pravac $f_{1,2}$ poklopit će se s pravcem f_2 [zašto?]. [Nastavite sami! Pokušajte skicirati sliku d.!]

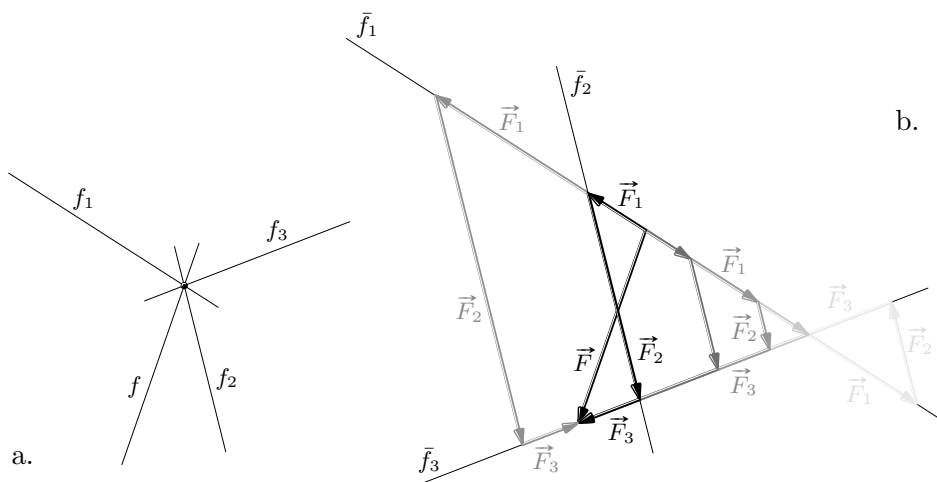
32. Poklapa li se pravac f na kojem djeluje sila $\vec{F}$ s jednim od nekomplanarnih pravaca f_1 , f_2 i f_3 (slika 32.a.), komponenta na pravcu s kojim se f poklapa bit će jednaka toj sili, dok će preostale dvije komponente iščeznuti. Primjerice, ako je $f = f_2$, onda su $\vec{F}_2 = \vec{F}$ i $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = 0$. Naime, iako se pravci f , f_1 i f_3 sijeku u hvatištu sile, oni nisu u jednoj ravnini, pa pravci koji su usporedni s pravcem f_3 , a sijeku pravac f , neće sjeći i pravac f_1 .



Slika 32.

Stoga će pravci $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$, povučeni usporedno s pravcima f_1 i f_3 kroz početnu točku i vršak sile $\vec{F}$ na pravcu $\bar{f}$, biti mimosmjerni (slika b.). Mimosmjerni pravci imaju samo jednu transversalu usporednu s nekim pravcem.³ Budući da je $f_2 = f$, pravac $\bar{f}$ ta je, jedina, transversala pravaca $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ usporedna s pravcem f_2 , $\bar{f} = \bar{f}_2$. »Skrenemo« li s pravca $\bar{f}$ po pravcu $\bar{f}_1$, ne možemo se »vratiti« na pravac $\bar{f}$ jer osim po njemu nema »puta« s pravca $\bar{f}_1$ na pravac $\bar{f}_3$. Zbog toga moramo ostati na pravcu $\bar{f}$, pa su $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = 0$, a kako nam je za »rastav« preostao samo pravac $\bar{f}_2 = \bar{f}$, bit će $\vec{F}_2 = \vec{F}$. Možemo reći da je prostorni četverokut sila »zakržljao« i postao orijentirana dužina — po dva su njegova vrha pala zajedno, pa su dvije njegove stranice iščeznule.

33. Neka su pravac djelovanja sile $\vec{F}$ i pravci f_1 , f_2 i f_3 u jednoj ravnini (recimo, ravnini crteža; slika 33.a.). I sada ćemo u prostoru sila kroz početnu točku i vršak sile $\vec{F}$ povući pravce $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ usporedne s pravcima f_1 i f_3 . Pravci $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ (i sila $\vec{F}$) bit će također u jednoj ravnini (i to može biti ravnina crteža). Povučemo li bilo kojom točkom pravca $\bar{f}_1$ pravac $\bar{f}_2$ usporedan s pravcem f_2 , taj će usporedni pravac sjeći i pravac $\bar{f}_3$, jer će i on biti u ravnini pravaca $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$. Prema tome, transversalā pravaca $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ usporednih s pravcem f_2 ima ∞^1 , pa postoji i ∞^1 mogućih rastava sile $\vec{F}$ u komponente na pravcima f_1 , f_2 i f_3 . Na slici b. prikazano je nekoliko poligona sila pomoću kojih su ostvareni tek neki od tih rastava (uključujući $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$, $\vec{F}_2 = 0$); različiti su poligoni nacrtani različitim nijansama sive (ne treba, nadam se, posebno napominjati da su u svim poligonima početne točke sile $\vec{F}_1$ u početnoj točki sile $\vec{F}$ i da su u njezinu vršku vršci sile $\vec{F}_3$).

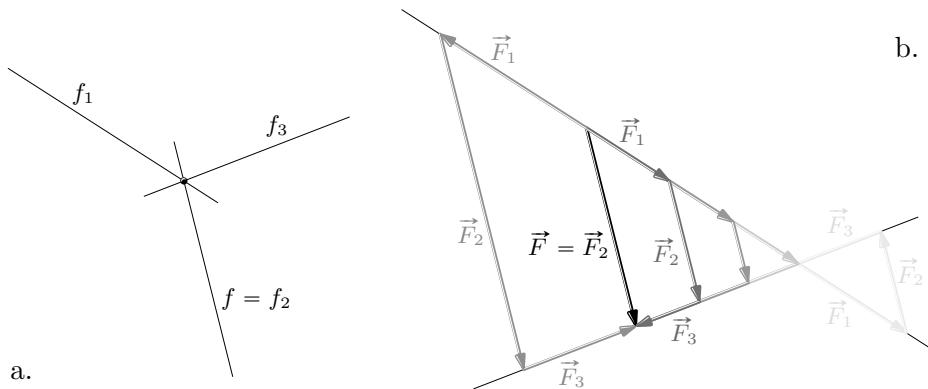


Slika 33.

Ako je sada $f = f_2$, »rastav« $\vec{F}_2 = \vec{F}$ & $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = 0$ nije, kao u prethodnome odsječku, jedini mogući rastav (slika 34.). (To, dakako, vrijedi i ako je $f = f_1$ ili $f = f_3$).

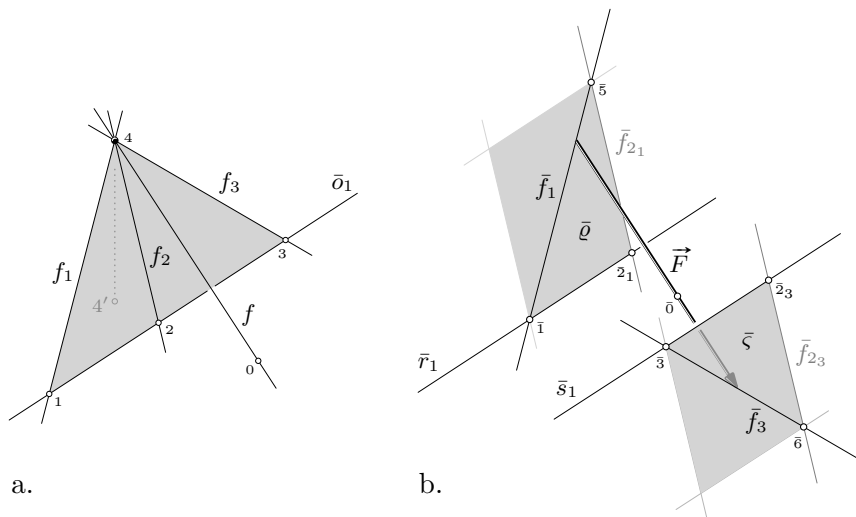
Ako pravac djelovanja sile nije u ravnini pravaca f_1 , f_2 i f_3 , zadatak rastavljanja sile u komponente na tim pravcima nije rješiv. Budući da su pravci f_1 , f_2 i f_3 u jednoj ravnini, ravnine $\bar{\varrho}$ i $\bar{\varsigma}$, postavljene pravcima $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ usporedno s pravcem f_2 , bit će

³ Prisjetite se da tu transversalu nalazimo kao presječnicu dviju ravnina. A dvije se (nepodudarne) ravnine sijeku (u jednome i) samo u jednome pravcu.



Slika 34.

međusobno usporedne (slika 35.), tako da je njihova presječna njihov zajednički neizmerno daleki pravac, pa bi komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ imale neizmerno velike intenzitete, dok bi komponenta $\vec{F}_2$ bila neizmerno daleko.



Slika 35.

34. Prolaze li hvatištem sile četiri pravca koji nisu u jednoj ravnini, zadatak je rastavljanja sile u komponente na tim pravcima statički neodređen: kao i u rastavljanju sile u komponente na tri nekomplanarna pravca, povući ćemo u prostoru sile početnom točkom sile $\vec{F}$ pravac $\bar{f}_1$ usporedan s pravcem f_1 , a njezinim vrškom pravac $\bar{f}_4$ usporedan sa zadnjim pravcem, sada pravcem f_4 ; bilo kojom točkom pravca $\bar{f}_1$ možemo povući pravac $\bar{f}_2$ usporedan s pravcem f_2 te potom naći transversalu $\bar{f}_3$ pravaca $\bar{f}_2$ i $\bar{f}_4$ usporednu s pravcem f_3 . Budući da mogućih pravaca $\bar{f}_2$ ima ∞^1 , i mogućih je rastava ∞^1 .

Ako su sva četiri pravca i pravac djelovanja sile u jednoj ravnini, mogućih rastava ima ∞^2 : i svi pravci u prostoru sile bit će u jednoj ravnini, koja je usporedna s ravninom pravaca u geometrijskom prostoru, pa će transversala pravaca $\bar{f}_2$ i $\bar{f}_4$ usporednih s pravcem f_3 biti ∞^1 ; mogućih pravaca $\bar{f}_2$ ima ∞^1 , pa će mogućih rastava ukupno biti $\infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^2$.

Ako pravac djelovanja sile nije u ravnini ostalih pravaca (neovisno o tome ima li tih pravaca četiri, pet ili više), zadatak rastavljanja sile u komponente na tim pravcima nije rješiv; obrazloženje je slično obrazloženju nemogućnosti rastava u tri komponente u zadnjem odlomku prethodnoga odsjeka: dvije sile, transverzalu kojih tražimo, imale bi neizmjerne velike intenzitete, a tražena bi transverzala bila neizmjerne daleki pravac.