

Štapna statika (1)

K. F.

Klasifikacija konstrukcijskih elemenata s geometrijskog stajališta

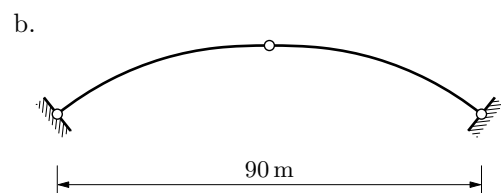
Spojeni sistem svrhovito je i sustavno oblikovan sklop međusobno povezanih tijela. **Konstrukcija** je spojeni sistem koji može, održavajući oblik, preuzeti i na podlogu prenijeti vlastitu težinu, predviđena opterećenja i druga predviđena djelovanja (pritom „održavanje oblika” ne znači da se sistem ponaša kao kruto tijelo, nego samo da nema znatnijih ili neželjenih pomaka).

Konstrukciju u proračunu ne možemo prikazati i obrađivati u obliku u kojem će se izvesti — kad bismo u proračun uveli sve geometrijske pojedinosti i odnose, proračun bi bio vrlo složen i dugotrajan, a najčešće se ne bi ni mogao provesti. **Proračunskom shemom konstrukcije** nazivamo prikaz konstrukcije u kojemu su zanemarena neka (u stvari, mnoga) njezina obilježja, ali koji ipak dovoljno vjerno oslikava njezino stvarno ponašanje pod opterećenjem i drugim djelovanjima. Složenost proračunske sheme ovisi o zahtijevanoj točnosti proračuna. U nastavku ćemo „tradicije” radi, ali i radi sažetijega izražavanja i izbjegavanja nezgrapnosti (trebalo bi, primjerice, dosljedno upotrebljavati i termine „idealna veza” i „shema opterećenjâ/silâ”), najčešće rabiti naziv *konstrukcija*, ali ćemo pod tim nazivom gotovo uvijek podrazumijevati njezinu proračunsku shemu.

Konstrukcijski elementi razmjerno su jednostavni sastavni dijelovi konstrukcije koji se mogu analizirati kao neovisne cjeline. S **geometrijskoga se stajališta** razvrstavaju u:

- štapne elemente,
- plošne elemente i
- masivne elemente.

Štapni element ili, kraće, **štap**¹ konstrukcijski je element kojemu je jedna dimenzija, duljina, istaknuta u odnosu na druge dvije, visinu (ili debljinu) i širinu, pa „iz daljine” izgleda kao crta. Za njegovu se proračunsku shemu može stoga uzeti dio krivulje ili dio pravca. Konstrukcije sastavljene od štapnih elemenata nazivaju se **štapnim konstrukcijama** (sl. a. i b.: Maillartov most preko kanjona Salgina u Švicarskoj i skica proračunske sheme njegova glavnog nosivog sklopa — luka).



Plošni elementi konstrukcijski su elementi čija je jedna dimenzija, debljina, zanemarivo mala u odnosu na druge dvije, te se njihova proračunska shema može svesti na srednju ravninu ili srednju plohu. Konstrukcije s plošnim elementima nazivaju se plošnim iako je ponajčešće riječ o

¹ *Štap*, kao konstrukcijski element, ne smijete pomiješati sa *zglobnim štapom* koji je uveden u predavanju o spojenim sistemima i vezama. Zglobni je štap, pokazat ćemo uskoro, tek poseban slučaj/tip štapa u širem, ovdje uvedenom značenju.

kombiniranim konstrukcijama koje uz plošne sadrže i štapne elemente (sl. c.). U plošne elemente i konstrukcije ubrajaju se zidovi, ploče, naborane konstrukcije, ljuske (sl. c.), konstrukcije od platna (sl. d.) ...

c.



d.



Masivni elementi konstrukcijski su elementi kod kojih su sve tri dimenzije istoga reda veličine. U skupinu masivnih konstrukcija, koje sadrže (samo) masivne elemente, ubrajaju se potporni zidovi te nasute i betonske gravitacijske brane (sl. e. i f.).

e.



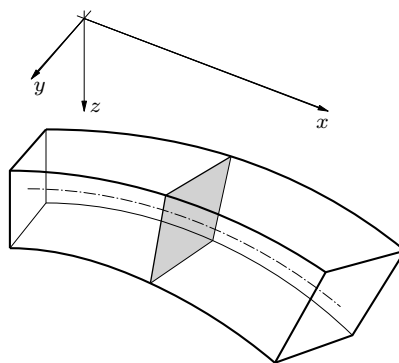
f.



Os i poprečni presjeci štapa

U proračunskim shemama štapni se element zamjenjuje njegovom osi. **Os štapa** je, po definiciji, krivulja koja spaja težišta poprečnih presjeka, dok se **poprečni presjek štapa** definira kao geometrijski lik koji nastaje zamišljenim presijecanjem štapa ravninom okomitom na njegovu os (sl. g.). Navedene definicije zatvaraju „začarani krug”: da nađemo os, moramo poznavati poprečne presjeke koji pak leže u ravninama okomitima na os, pa za postavljanje tih ravnina treba poznavati os. Stoga se os štapa zadana oblika može neposredno odrediti samo u rijetkim slučajevima — primjerice, za ravni štap konstantnoga poprečnog presjeka.

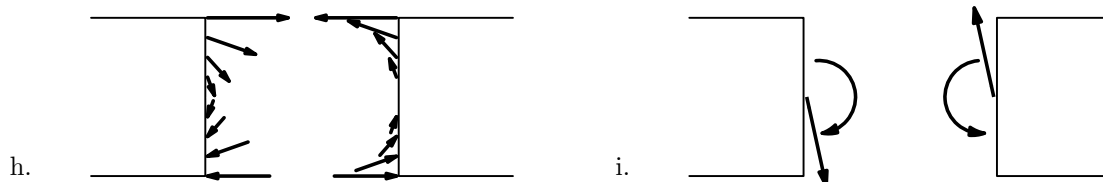
g.



Prema obliku osi štapove dijelimo na ravne i zakrivljene. Os ravnoga štapa odsječak je pravca, a os zakrivljenoga može biti odsječak ravninske ili odsječak prostorne krivulje. Ako se poprečni presjeci ravnoga štapa ne mijenjaju duž osi, nazivamo ga prizmatičnim ili cilindričnim; katkada se prizmatičnima nazivaju štapovi poligonalnih poprečnih presjeka, a cilindričnima štapovi s presjecima omeđenima krivuljama.

Unutarnje sile

Ravnina nekoga poprečnog presjeka razdvaja, zamišljamo, štap na dva dijela. Između dijelova, „kroz” ravninu presjeka, djeluju unutarnje plošne sile — sile kratkoga dometa — koje sprečavaju stvarno prodiranje jednoga dijela u drugi ili njihovo razdvajanje/razmicanje. Sile kojima jedan dio djeluje na drugi jednake su, po intenzitetima i pravcima djelovanja, silama kojima drugi dio djeluje na prvi, ali su suprotno orijentirane (sl. h.).



Unutarnje sile raspodijeljene po površinama poprečnih presjeka zamjenjuju se rezultirajućim djelovanjima u težištima presjeka (sl. i.), a raspodjele se tih rezultirajućih djelovanja uzduž osi štapa potom opisuju funkcijama jedne varijable. Uzima se nadalje da te funkcije ne ovise o raspodjeli zadanih opterećenja po poprečnim presjecima ili po njihovim rubovima, već samo o rezultirajućim djelovanjima u tim presjecima, što znači da se i opterećenja uvođenjem statički ekvivalentnih djelovanja — koncentriranih i distribuiranih linijskih sila i momenata — svode na os.² Rezultirajuća se djelovanja unutarnjih plošnih sila nazivaju **unutarnjim silama**³, iako su sastavljena, znamo, od rezultirajuće sile i rezultirajućega momenta.

Greda (katkada, rjeđe, i **okvirni element**) je ravan štap koji preuzima sva opterećenja: koncentrirane i distribuirane sile koje djeluju u bilo kojem smjeru u odnosu na os, kao i koncentrirane i distribuirane momente. Rezultirajuća sila unutarnjih plošnih sila u nekom presjeku može stoga biti na bilo kojemu pravcu, a postojat će i rezultirajući moment.

Unutarnje sile u nekom presjeku rastavit ćemo u komponente na pogodno odabranim pravcima; orijentiraju li se ti pravci, komponente su određene svojim skalarnim vrijednostima. Štap ćemo položiti horizontalno, tako da se njegova os poklapa s osi x (prvi crtež na sl. j.).

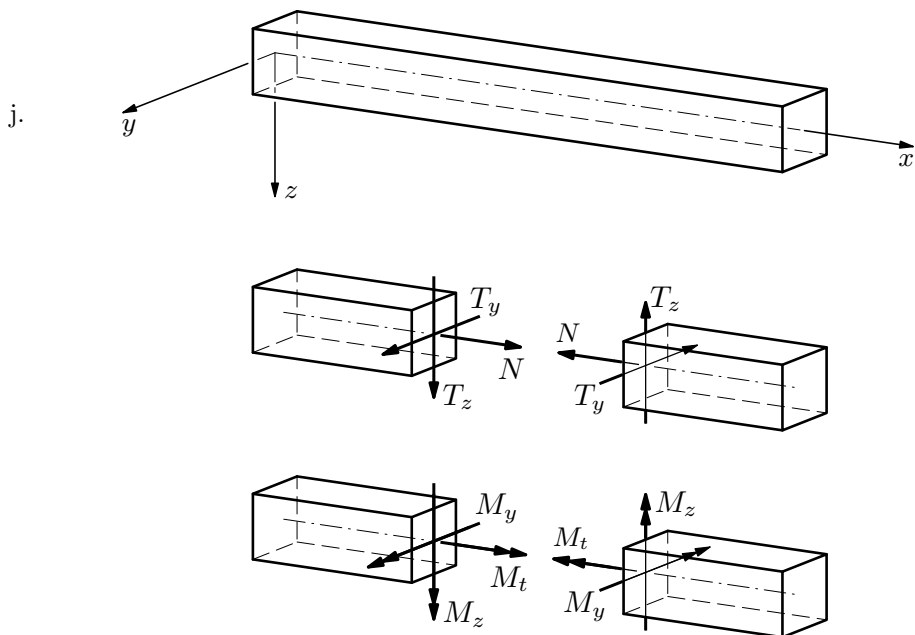
Rezultirajuću silu i rezultirajući moment unutarnjih plošnih sila u poprečnomu presjeku rastavljamo sada u komponente usporedne s koordinatnim osima:

uzdužna sila, s vrijednošću N , komponenta je rezultirajuće sile koja leži na osi štapa, pa je okomita na ravninu poprečnoga presjeka; pozitivnom se, kao na drugom crtežu slike j., uzima vlačna sila čiji je vektor orijentiran kao vanjska normala na ravninu poprečnoga presjeka;

poprečne sile, s vrijednostima T_y i T_z , komponente su rezultirajuće sile koje leže u ravnini poprečnoga presjeka, usporedne s osima y i z ; na strani presjeka čija je vanjska normala orijentirana kao os x (pozitivno orijentirana normala) pozitivnima se uzimaju sile orijentirane kao osi y i z , a na strani sa suprotno (negativno) orijentiranom normalom suprotno orijentirane sile (drugi crtež slike j.);

² Svođenje opterećenja na os štapa detaljnije je opisano u odjeljku *Prikazivanje sila koje djeluju na štap* (16.2. na str. 274.–278.) knjige *Mehanika I.—Statika* prof. Wenera.

³ Sile raspodijeljene po površini poprečnoga presjeka nazivat ćemo *unutarnjim plošnim silama*, dok ćemo naziv *unutarnje sile* zadržati za rezultirajuće djelovanje tih plošnih sila.

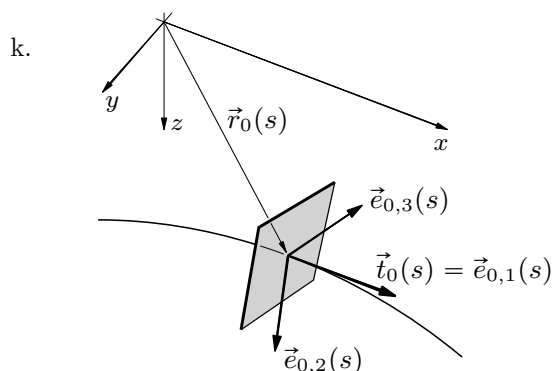


momenti savijanja, s vrijednostima M_y i M_z , komponente su rezultirajućega momenta u poprečnom presjeku koje su usporedne s osima y i z , što znači da je riječ o momentima oko osi u ravnini presjeka, usporednih s osima y i z i, stoga, okomitih na os štapa, tako da savijaju ravnu os u krivulju; na strani presjeka čija je vanjska normala pozitivno orijentirana pozitivnima se uzimaju momenti orijentirani kao osi, a na strani s negativno orijentiranom normalom suprotno orijentirani momenti (treći crtež na sl. j.);

torzijski moment ili **moment uvijanja**, s vrijednošću M_t , komponenta je rezultirajućega momenta koja leži na osi štapa, odnosno, moment oko te osi, moment, dakle, koji pokušava zaokrenuti poprečni presjek u njegovoj ravnini; na strani presjeka s pozitivno orijentiranom vanjskom normalom pozitivnim se uzima pozitivno orijentirani moment, dok je na strani s negativno orijentiranom normalom pozitivan suprotno, dakle, negativno orijentirani moment (treći crtež slike j.).

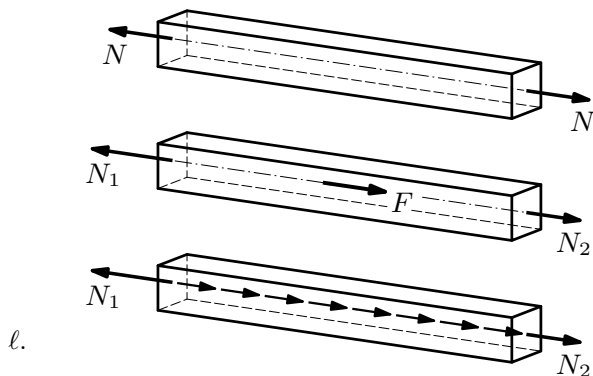
Da bi terminološka zbrka bila potpuna, i nabrojene se komponente unutarnjih sila nazivaju, jednostavno i sažeto, unutarnjim silama.

Zakrivljeni štap. Ako je os štapa zakrivljena, u svakoj njezinoj točki uvodimo lokalni koordinatni sustav tako da se prva os toga sustava poklapa s tangentom na os štapa u toj točki (sl. k.). Uzdužna sila i moment torzije na toj su osi, a poprečne sile i momenti savijanja leže u ravnini poprečnoga presjeka.



Zglobni štap je ravan štap koji prenosi sile sàmo uzduž svoje osi: rezultirajuće sile unutarnjih plošnih sila u poprečnim presjecima djeluju na osi, a rezultirajući momenti iščezavaju; na sl. ℓ . prikazan je dio štapa između dva poprečna presjeka. Da bi unutarnje sile koje djeluju na osi

mogle održati ravnotežu sa zadanim vanjskim silama, vanjske sile, koncentrirane i distribuirane, moraju također djelovati na pravcu osi. (Tradicionalno se zglobnima nazivaju jedino štapovi na koje vanjske sile „smiju” djelovati isključivo na krajevima, tako da su unutarnje sile u svim presjecima jednake.) Kao što sâm naziv kaže, veze su štapa s podlogom ili s drugim dijelovima konstrukcije zglobne; uz to, te veze smiju biti sâmo na njegovim krajevima.



Unutarnje sile u zglobnom štapu mogu biti vlačne ili tlačne. Posljedice djelovanja tih sila produljenja su ili skraćenja štapa. S matematičkoga se gledišta vlačna i tlačna sila razlikuju samo po predznacima svojih vrijednosti, ali s fizičkoga stajališta ponašanje štapa može pri djelovanju tlačne sile biti bitno drugačije nego pri djelovanju vlačne — vitak se štap može pri djelovanju velike tlačne sile *izviti* (sl. m. desno).



Izračunavanje vrijednosti unutarnjih sila

Pomoću ravnine poprečnoga presjeka kroz točku osi u kojoj želimo izračunati vrijednosti unutarnjih sila „odvajamo” dio štapne konstrukcije. Odvojeni će dio biti u istim uvjetima u kojima je bio u konstrukciji prije odvajanja ako u poprečnomu presjeku dodamo sile kojima je „odbačeni” dio djelovao na njega; te su sile, naravno, unutarnje sile.

S druge strane, *ako je cijela konstrukcija u ravnoteži, onda je i svaki njezin izdvojeni dio u ravnoteži.* To znači da unutarnje sile moraju uravnotežiti sve vanjske sile i momente koji djeluju na promatrani odvojeni dio nosača. Ako su, osim unutarnjih, sve ostale sile poznate, taj nam zaključak daje postupak izračunavanja vrijednosti unutarnjih sila:

- u jednadžbi ravnoteže projekcija sila na os grede (os x) pojavit će se kao jedina nepoznanica vrijednost N uzdužne sile, pa se ona iz te jednadžbe može neposredno izračunati;

- u svakoj od dviju jednadžbi ravnoteže projekcija sila na osi usporedne s ravninom poprečnoga presjeka (osi y i z) nepoznanica je po jedna od vrijednosti T_y i T_z poprečnih sila;
- u svakoj od dviju jednadžbi ravnoteže momenata oko osi u ravnini poprečnoga presjeka usporednih s osima y i z nepoznanica je po jedna od vrijednosti M_y i M_z momenata savijanja;
- u jednadžbi ravnoteže momenata oko osi grede (osi x) jedina je nepoznanica vrijednost M_t momenta torzije.

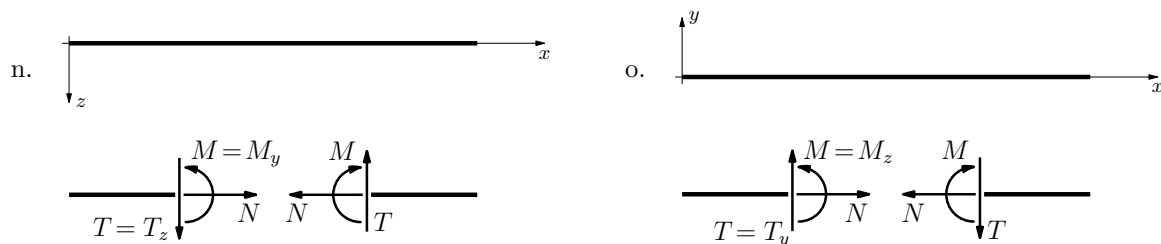
Izraze za vrijednosti unutarnjih sila možemo zapisati u funkcijskom obliku, kao funkcije općega, „neodređenog” položaja x na osi štapa. Te funkcije opisuju tîkove vrijednosti unutarnjih sila uzduž osi štapa. Češće ćemo, međutim, vrijednosti sila izračunavati samo u odabranim točkama (primjerice, u hvatištima zadanih koncentriranih sila i momenata ili u točkama neposredno lijevo i neposredno desno od tih hvatišta te u točkama u kojima počinju i u kojima prestaju djelovati distribuirane sile i momenti i možda u još po jednoj ili dvije točke u područjima tih distribuiranih djelovanja).

Ravninske štapne konstrukcije

Štapne se konstrukcije mogu podijeliti u ravninske i prostorne. Pri razvrstavanju konstrukcija osim geometrijskih karakteristika i karakteristika spojeva u obzir treba uzeti i djelovanja na konstrukciju. Konstrukcija je **ravninska** ako osi svih elemenata leže u istoj ravnini, u odnosu na koju su uz to svi poprečni presjeci simetrični, ako su statičke i kinematičke karakteristike svih spojeva simetrične u odnosu na tu ravninu te ako su pravci djelovanja rezultanata zadanih vanjskih sila u svim ravninama poprečnih presjeka u toj ravnini, a vektori svih zadanih vanjskih momenata okomiti na nju. U tom će slučaju i sile u vezama s podlogom i rezultirajuće sile unutarnjih sila u poprečnim presjecima biti u toj ravnini, dok će vektori momenata u vezama i rezultirajućih momenata unutarnjih sila biti okomiti su na nju.

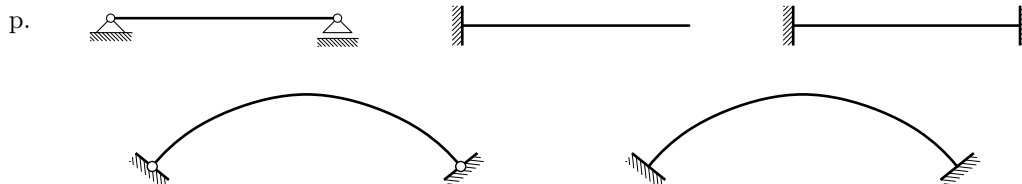
Sve su ostale štapne konstrukcije **prostorne**: konstrukcije u kojima su osi (nekih) elemenata prostorne krivulje, konstrukcije u kojima osi, iako su ravninske krivulje, ne leže u jednoj ravnini te konstrukcije čije su osi u jednoj ravnini, ali pravci djelovanja vanjskih sila ne.

Odaberemo li za ravninu ravninske štapne konstrukcije ravninu xz , u poprečnim presjecima „preostaju” unutarnje sile prikazane na slici n.; odaberemo li pak ravninu xy , ostatak će sile sa slike o.



Štapne konstrukcije s jednim elementom

U najjednostavnijemu slučaju konstrukcija može biti i samo s jednim elementom — jednostavno oslonjena greda (prosta greda), konzola, obostrano upeta greda, dvozglojni i upeti luk takve su jednostavne ravninske konstrukcije (sl. p.), dok je trozglojni luk (sl. b.) konstrukcija sastavljena



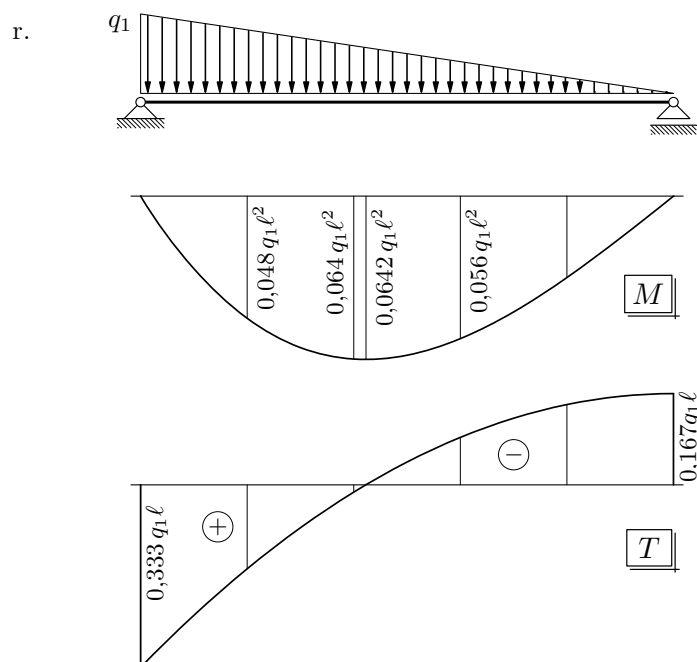
od dva štapna elementa. Podloga nije dio konstrukcije, ali veze s njom jesu, pa jednostavno položena greda, konzola i obostrano upeta greda (sl. p.), iako sadrže samo jedan ravan štapni element, pripadaju trima različitim konstrukcijskim tipovima (prve su dvije statički određene, treća nije). [Jesu li lukovi na sl. p. statički određeni? A luk na sl. b.?

Dijagrami unutarnjih sila

Tôk vrijednosti unutarnjih sila uzduž osi štapa prikazujemo dijagramima. Dijagrami unutarnjih sila grafovi su funkcija kojima su vrijednosti unutarnjih sila izražene; primjerice, dijagram je momenata savijanja

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z = M(x) \text{ za } x \in [0, \ell]\}.$$

Os dijagrama os je štapa, a vrijednosti sila nanose se okomito na nju. Vrijednosti momenata savijanja crtaju se uvijek uz zategnutu stranu štapa. Za dijagrame uzdužnih i poprečnih sila možemo po volji odabrati stranu na kojoj će biti pozitivne vrijednosti; ti dijagrami stoga moraju sadržavati simbole predznaka ili mora kraj njih biti naznačen pozitivan smisao ordinatne osi. Na slici r. prikazani su dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila na jednostavno oslonjenoj gredi opterećenoj linearno promjenjivom distribuiranom silom. (Budući da zadana sila djeluje okomito na os grede, uzdužnih sila nema. [Dokažite!]) Na temelju iskustva možemo zaključiti da će se pri djelovanju sile prema dolje greda svinuti tako da je „trbuh” prema dolje, pa će donja strana grede biti zategnuta; prema tome, momentni se dijagram crta s donje strane. Za dijagram poprečnih sila donja je strana odabrana kao pozitivna, što odgovara pozitivnoj orijentaciji osi z .



Dva složenija primjera dijagrama momenata savijanja prikazana su na slici s. Riječ je o okvirnoj konstrukciji opterećenoj jednoliko raspodijeljenom i koncentriranom silom. (Ta je konstrukcija statički neodređena. O postupcima izračunavanja vrijednosti unutarnjih sila u neodređenim konstrukcijama učit ćete u predmetu *Građevna statika 1.*)

