



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Nora Crnić

KANIJEV POSTUPAK

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2026.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Nora Crnić

KANI'S METHOD

FINAL EXAM

Supervisor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2026.

SAŽETAK

Rad se bavi analizom iteracijskoga postupka Gašpara Kanija. Napravljena je i usporedba postupka G. Kanija s Crossovim postupkom i postupkom Wenera i Csonke. Objašnjava se njegova primjena u rješavanju translacijski nepomičnih i translacijski pomičnih sistema na temelju početnih pretpostavki i jednadžbi izvedenih iz metode pomaka. Postupak se objašnjava i prilikom analize okvira s pomacima vezano za njihovu simetriju i simetričnost opterećenja koje djeluje na konstrukciju.

Ključne riječi: Kanijev postupak, iteracija, metoda pomaka, jednadžbe ravnoteže čvora, momenti upetosti, momenti pomaka, momenti katova, momenti zaokreta čvorova, višekratni okvir

SUMMARY

This paper deals an analysis of the iterative procedure of Gašpar Kani. A comparison has been made between G. Kani's method and Cross's method as well as the Werner-Csonka method. It's application is explained in solving translationally fixed and translationally movable systems, based on initial assumptions and equations derived from the displacement method. Kani's method is also explained in the analysis of frames with lateral displacements related to their symmetry and symmetric loading acting on the strcture.

Key words: Kani's method, iteration, displacement method, joint equilibrium equations, fixed end moments, displacement moments, storey moments, end moments due to translation of joints, multi-storey frame

SADRŽAJ

SAŽETAK.....	i
SUMMARY.....	ii
1. UVOD.....	2
2. GAŠPAR KANI	3
3. ITERACIJSKI POSTUPCI.....	4
3.1. CROSSOV POSTUPAK.....	4
3.2. POSTUPAK WERNERA I CSONKE.....	6
3.3. KANIJEV POSTUPAK.....	8
4. KANIJEV POSTUPAK.....	10
4.1. POJMOVI I OZNAKE U FORMULAMA.....	10
4.2. TRANSLACIJSKI NEPOMIČNI SISTEMI.....	13
4.3. TRANSLACIJSKI POMIČNI SISTEMI	19
4.4. OKVIRI.....	20
4.4.1. SIMETRIČNI OKVIRI SA SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM	21
4.4.2. OKVIRI S TRANSLACIJSKIM POMACIMA ČVOROVA - VERTIKALNO OPTEREĆENJE	23
4.4.3. OKVIRI S TRANSLACIJSKIM POMACIMA ČVOROVA – HORIZONTALNO OPTEREĆENJE	27
4.4.4. PODJELA OKVIRA S OBZIROM NA GEOMETRIJU	29
5. ZADATAK	34
6. ZAKLJUČAK.....	52
POPIS LITERATURE.....	53
POPIS SLIKA.....	54

1. UVOD

U radu se obrađuje iteracijski postupak Gašpara Kanija. Provest će se usporedba spomenutog postupka s postupkom Crossa i postupkom Wernera i Chonke te će se na primjerima opisati njegova primjena prilikom rješavanja statičkih sistema.

Analiza statički neodređenih sistema zahtijeva postavljanje odgovarajućeg broja linearnih jednažbi kako bi se odredile nepoznanice, pri čemu broj jednažbi mora odgovarati broju nepoznatih veličina. Potrebne jednažbe odabrali smo na temelju promatranih deformacija sistema. Kako bi se olakšalo rješavanje, ukupan broj nepoznanica može se smanjiti primjenom različitih pretpostavki te uvjeta simetrije. Sam proračun temelji se na iteracijskom postupku tj. postupku uzastopne aproksimacije. Sustav linearnih jednažbi s više nepoznanica rješavamo u nizu ponavljajućih računskih koraka, pri čemu se u svakom koraku izračunavaju približne vrijednosti nepoznanica koje se koriste kao ulazni podaci za sljedeći korak te se taj postupak ponavlja dok ne dođemo do željenog rezultata. U slučaju Kanijeve metode, do vrijednosti momenta na promatranom čvoru.

2. GAŠPAR KANI

Gašpar Kani bio je građevinski inženjer i sveučilišni profesor koji je 1947. godine po uzoru na formulaciju inženjerske metode pomaka danskog inženjera Asbema Ostenfelda uveo postupak jednostruke iteracije.

Rođen je u Zemunu u Srbiji 16. studenog 1910. godine. U Zagrebu je 1929. godine završio gimnaziju, nakon čega je upisao Građevinski odsjek Tehničkog fakulteta na kojem je diplomirao 1937. godine. Iste godine postavljen je na poziciju asistenta na katedri statike i ispitivanja materijala, gdje je sudjelovao na istraživanjima, primjeni i projektima prednapregnutog betona na velikim mostovima i građevinama. U zvanje docenta imenovan je 1943. godine. U razdoblju od 1941. do 1943. godine surađivao je u istraživanjima za Tehnički vjesnik, časopis koji objavljuje znanstvene radove iz tehničkih znanosti.

Godine 1945. otpušten je iz državne službe u Zagrebu te odlazi u Njemačku na poziciju asistenta u Institutu za ispitivanje materijala Tehničke visoke škole u Stuttgartu. Nakon tog prebacuje se kao asistent u Institut za čelične i masivne konstrukcije na kojem je doktorirao 1951. godine.

Nakon rata otvara svoje poduzeće Kani & Horvat koje radi na obnovi Stuttgarta. Od 1949. vodi poduzeće Wolfer & Goebel koje se bavi građenjem mostova od prednapregnutog betona. S istim je prvi u svijetu projektirao željeznički most od prednapregnutog betona. Godine 1951. osniva poduzeće Kani & Holzapfel s kojim projektira mostove i građevine.

Najpoznatiji je po tome što je u svojoj knjizi *Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen* (1949. godina) opisao novi postupak proračuna okvira koristeći metode iteracije.

Godine 1960. odlazi na poziciju docenta, a kasnije i redovitog profesora na Sveučilištu u Torontu, na kojem se bavio istraživanjem pojačanih betonskih nosača gdje je više od 1000 takvih konstrukcija analizirao i opisao u knjizi *How Safe Are Our Large Reinforced Concrete Beams*. Dobio je razne nagrade i priznanja među kolegama inženjerima i profesorima diljem svijeta. Preminuo je kod jezera Simcoe blizu Toronta 29. rujna 1968. godine.

3. ITERACIJSKI POSTUPCI

3.1. CROSSOV POSTUPAK

Hardy Cross je 1930. godine razvio iteracijski postupak rješavanja sistema jednadžbi bez translacijskih pomaka. Crossov postupak započinje fazom upetosti, slično kao i inženjerska metoda pomaka.

Analiza zadanog sistema započinje izradom zglobne sheme kako bismo odredili broj stupnjeva slobode gibanja, odnosno broj nepoznatih rotacija i translacija. Ako je sistem nepomičan ($S = 0$), nepoznanice su kutevi zaokreta. Međutim, ako se prilikom analize utvrdi da u sistemu ipak postoje translacijski pomaci ($S > 0$), proračun će trebati provesti u više faza, odnosno primijenit će se tzv. prošireni Crossov postupak.

Nakon što smo odredili stupanj kinematičke neodređenosti, u zadanom sustavu treba spriječiti nepoznate zaokrete i translacije. To se postiže tako da se u čvorove s nepoznatim zaokretom dodaje momentni spoj (koji preuzima samo moment), dok se za translacijske pomake dodaju zglobni štapovi u smjeru i na mjestu nepoznatih translacija.

U istoj fazi, ako postoji vanjsko opterećenje, osnovni se sustav rastavlja na elemente (obostrano ili jednostrano upete grede) te se izračunavaju momenti upetosti na svakom kraju pojedinog elementa pomoću tablica momenta upetosti. Ovaj dio proračuna isti je kao i kod inženjerske metode pomaka, tako da se u obzir uzimaju i utjecaji prisilnih pomaka ležajeva i temperature te drugih oblika vanjskih djelovanja.

Dobiveni momenti upetosti prikazuju se na grafičkoj shemi Crossova postupka i služe kao ulazni podaci za početak iteracije. Ako su u čvorovima zadani koncentrirani momenti, oni ne uzrokuju momente na krajevima elementa jer smo element odvojili neposredno prije spoja.

Sljedeća faza Crossovog postupka je uravnotežavanje čvorova. Postupak se naziva relaksacijskim jer se pri svakom uravnotežavanju izračunavaju korekcije vrijednosti momenata koje se postupno smanjuju (u svakom koraku čvor se pomalo zaokreće, odnosno relaksira). Jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima s nepoznatim zaokretima zadovoljavaju se pojedinačno, počevši od čvora s najvećim neuravnoteženim momentom savijanja (što rezultira najbržim konvergiranjem rezultata, odnosno iteracijom s najmanjim brojem koraka). Izdvajanjem čvorova iz osnovnog sustava, smjer rotacije momenata

savijanja se mijenja. Moment se zatim razdjeljuje na priključene štapove čvora pomoću razdjelnih koeficijenata.

Razdjelni koeficijent ($\mu_{i,j}$) dobiva se iz odnosa rotacijske krutosti pojedinog elementa i ukupne rotacijske krutosti svih elementa koji se priključuju u čvoru. Time se dobivaju momenti savijanja na krajevima elemenata koji nastaju zbog zakretanja promatranog čvora te zajedno s rezidualnim momentom uravnotežavaju čvor.

Nakon uravnotežavanja čvora određuju se momenti na suprotnim krajevima štapova preko prijenosnog faktora. Vrijednost momenta na suprotnom kraju mora odgovarati polovici vrijednosti momenta u prvom promatranom čvoru, zbog čega je prijenosni koeficijent jednak $\frac{1}{2}$. Vrijednost na drugom kraju elementa bit će upola manja te se pribraja ostalim momentima novo promatranog čvora, čime započinje drugi korak iteracije. Postupak iteracije provodi se sve dok vrijednosti neuravnoteženih momenata ili vrijednosti prijenosnih momenata ne postanu dovoljno male da se mogu zanemariti.

Konačne vrijednosti momenta dobivaju se tako da se na svakom kraju pojedinog elementa zbroje vrijednosti svih momenata (momenata upetosti, raspodijeljenih i prenesenih momenata).

Crossov postupak primjenjuje se za proračune nepomičnih statički neodređenih sustava, poput kontinuiranih nosača ili višeetažnih nepomičnih okvira, no može se primijeniti i pri proračunu translacijski pomičnih sustava. Tada standardni postupak koji izravno rješava samo zaokrete čvorova nije dovoljan pa se primjenjuje prošireni Crossov postupak ili Crossov postupak u kombinaciji s postupkom Wernera i Csonke.

Ako na sistemu postoji mogućnost translacijskih pomaka, proračun se provodi u dva dijela. U prvom dijelu se dobiva nepomični sustav tako da se svaki translacijski pomak spriječi odgovarajućom reakcijom (obično kao veza s podlogom), te se s pomoću razdjelnih i prijenosnih faktora izračunaju vrijednosti momenata. Budući da se za primjenu Crossova postupka sustav morao pridržati, u tim se pridržanjima pojavljuju reakcije koje mijenjaju raspodjelu unutarnjih sila u okviru. Vrijednosti reakcija izračunavaju se iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila u odabranim dijelovima okvira (npr. u presjeku stupa).

U drugom dijelu proračuna prelazi se na fazu dopuštenih pomaka, u kojoj se jedna po jedna translacija (koja je u prvom dijelu bila spriječena) oslobađa te se na njezinom mjestu zadaje prisilni jedinični pomak. Radi se plan pomaka zglobne sheme kako bi se odredili kutevi zaokreta štapova uzrokovani tom translacijom, iz čega proizlaze novi momenti upetosti.

Nakon toga ponovno se provodi Crossov postupak kako bi se odredila raspodjela momenata zbog tog pomaka. Broj provedbi Crossova postupka za pojedini sustav ovisi o broju translacijskih pomaka koje taj sustav ima. Također treba izračunati reaktivnu silu nastalu zbog jediničnog pomaka, s pomoću čije se vrijednosti dobiva koeficijent β .

Koeficijent β određuje se iz uvjeta da je ukupna reakcija u svakoj dodanoj vezi jednaka nuli, jer u stvarnosti na mjestima spriječenih pomaka ne postoje reakcije. Konačne vrijednosti momenata dobivaju se linearnom kombinacijom rezultata iz svih faza proračuna.

3.2. POSTUPAK WERNERA I CSONKE

Postupak Wernera i Csonke primjenjuje se pri proračunu višeetažnih pomičnih okvira opterećenih horizontalnim silama u čvorovima. Kao i ostale iteracijske metode temelji se na iterativnom postupku rješavanja jednadžbi inženjerske metode pomaka kako bi se u konačnici dobili dijagrami unutarnjih sila.

Otto Werner i Pál Csonka istodobno su otkrili svoje verzije proračuna okvira pa se zbog identične temeljne zamisli postupak naziva po obojici autora. Glavna je zamisao postupka da se utjecaj pridržanja na momente savijanja "poništi" zadavanjem koncentriranog opterećenja na mjestu i u pravcu djelovanja horizontalne reakcije, ali u suprotnom smislu.

U prvom dijelu proračuna, pridržani se sustav rješava Crossovim postupkom kako bi se uravnotežili zaokreti čvorova te dobili momenti savijanja za stanje spriječenih pomaka. U dodatnim se vezama javljaju reaktivne sile koje će se u drugome dijelu proračuna poništiti jer u stvarnosti ne postoje. Utjecaj sile u pridržanju zatim se rješava postupkom Wernera i Csonke.

Glavna zamisao postupka sastoji se u pretvorbi okvira u zamjenjujući poluokvir, pri čemu se sustavu omogućuje translacija u suprotnom smislu od vanjskog opterećenja. Točka infleksije pri pomaku simetričnog okvira nalazi se na sredini raspona, gdje je zakrivljenost jednaka nuli, odnosno vrijednost funkcije momenta savijanja je jednaka nuli. Iz toga proizlazi da je vertikalni pomak također jednak nuli, tj. da se radi o asimetričnom polju pomaka. Nakon presijecanja okvira u točki infleksije i zadovoljenja uvjeta antimetrije, dobiva se sustav koji se naziva poluokvirom.

Koeficijenti krutosti stupova poluokvira definiraju se kao zbroj koeficijenata krutosti svakog pojedinog stupa okvira, dok se koeficijenti krutosti greda zbrajaju nakon što svaki pojedinačno pomnožimo s 4. Množi se s četiri jer se pri pretvorbi u poluokvir, preklapaju polovice grede ($L/2$) koje kad se spoje, imaju dvostruko veću krutost ($2EI$).

Sljedeći je korak relaksacijski postupak na poluokviru, u kojem se reakcije iz prvog koraka s Crossovim postupkom uzimaju u suprotnom smislu te se pretvaraju u poprečne sile etaža. Poprečna sila u stupu poluokvira jednaka je zbroju svih horizontalnih sila koje djeluju iznad tog kata. Na temelju tih poprečnih sila dobivaju se početni momenti upetosti u stupovima poluokvira. Prijenosni koeficijent je -1 zato što su u ovom postupku horizontalni pomaci dopušteni pa moment ostaje konstantan po visini stupa. Čvorovi poluokvira uravnotežavaju se s pomoću razdjelnih koeficijenata dobivenih iz zbrojenih krutosti sustava.

Momenti se zatim vraćaju na stupove i grede izvornog sustava te se provodi još jedan proračun preko Crossovog postupka. Ako se nakon druge relaksacije ponovno javi neuravnoteženost horizontalnih sila, u većini se slučajeva uvodi popravni koeficijent. Popravni koeficijent (α) omogućuje prekid postupka koji bi se inače provodio u previše ciklusa, tako da se sad provodi najviše dva puta uz zadovoljavajuću točnost. U slučajevima u kojima popravni koeficijent nije moguće uvesti treba se provesti i treća relaksacija. Konačne vrijednosti dobivaju se superpozicijom momenata iz prve faze i korigiranih momenata iz druge i treće faze.

3.3. KANIJEV POSTUPAK

Postupak je osmislio Gašpar Kani 1947. godine u Njemačkoj kao iteracijski postupak rješavanja transformiranih jednadžbi metode pomaka. Kod metode pomaka sile u presjeku treba odrediti dopunskim proračunom iz izračunanih kuteva zaokreta, dok Kani pojednostavljuje račun te umjesto kuteva zaokreta uvodi momente savijanja koji prouzrokuju istu deformaciju štapa kao i kutevi.

U prvom koraku proračuna pretpostavljaju se početne vrijednosti momenata za sve štapove sustava ili se za nepoznanice uvrštavaju nule. Dobiveni rezultati zatim se uvrštavaju u drugi korak proračuna, čime se vrijednosti potpuno korigiraju. Postupak se ponavlja sve dok razlika između dvije uzastopne iteracije (n -te i $n-1$) ne postane zanemariva, odnosno dok se ne postigne željena točnost. U svakom koraku treba izračunati momente za sve štapove koristeći početne vrijednosti te je zbog toga manja vjerojatnost pogreške u proračunu za razliku od ostalih iteracijskih metoda.

Kanijevom postupku najbliži je Crossov postupak. U oba se postupka pretpostavlja da se čvorovi sistema ne zakreću niti se pomiču, pa se pod tom pretpostavkom određuju momenti upetosti pri potpunoj upetosti krajeva štapova.

Kod već ranije promatranog Crossovog postupka pretpostavlja se da se najprije oslobađa jedan čvor dok drugi ostaju upeti. Tako oslobođen rezultirajući moment upetosti u čvoru (moment koji se dodaje u čvor kako bi se poništio neuravnoteženi moment) raspodjeljuje se na sve štapove koji se susreću u čvoru te se preko prijenosnih i razdjelnih faktora prenosi dalje na ostale čvorove, odnosno štapove. Tako se isti račun ponovi na susjednom čvoru i zatim na svim ostalim čvorovima sustava dok na svim čvorovima sustava zbroj momenata ne bude približno jednaka nuli.

Kod Kanijevog postupka čvor koji se prvo promatra ostaje upet (onemogućena mu je rotacija), dok su svi susjedni čvorovi slobodni. Momenti koji djeluju na krajevima štapova spojenih u čvoru se zbroje kako bi se dobio ukupni neuravnoteženi moment u čvoru. Postupak se ponavlja za svaki čvor sustava, točnije čvorovi se naizmjenično upinju i oslobađaju (onemogućuje se i dopušta rotacija pojedinog čvora) sve dok uravnotežavajući momenti ne zadrže konstantnu vrijednost. Konačna vrijednost momenta za svaki štap je zbroj momenta upetosti od vanjskog opterećenja, dvostrukog momenta uravnotežavanja na bližem kraju štapa i jednostrukog momenta uravnotežavanja na udaljenom kraju štapa.

Oba iteracijska postupka temelje se na metodi pomaka. Prednost Kanijevog postupka je uporaba „potpune iteracije“ u kojoj se članovi opterećenja s početka provlače do kraja proračuna. Svaki novi korak iteracije zamjenjuje prethodni jer svaki novodobiveni broj daje točniji rezultat nego u prethodnom koraku. Zbog toga ne treba pamtit i međurezultate, nego je bitan samo rezultat u posljednjem koraku. Ako treba naknadno promijeniti opterećenje ili geometriju elemenata sustava, početni se proračun može proširiti i prilagoditi bez ponovnog računanja cijelog sustava. Pri daljnjem računanju sve se moguće greške u korekcijskim vrijednostima (za razliku od većih sustavnih pogrešaka) tijekom daljnje iteracije poništavaju i nestaju. Zbog navedenih specifičnosti postupka, proračun se provjerava samo vrijednostima izračunanim na kraju.

Kanijeva se metoda upotrebljava za analizu statički neodređenih sistema, konkretno za sljedeće tipove sustava: kontinuirane nosače (proračun se provodi sustavno uravnotežavanjem zaokreta čvorova iznad ležajeva), okvirne konstrukcije s nepomičnim čvorovima (zbog simetrije ili pridržanja mogući su samo zaokreti čvorova) i okvirne konstrukcije s pomičnim čvorovima (okviri s više katova koji se horizontalno pomiču zbog djelovanja vanjskog opterećenja poput vjetrova ili kiše i sl.). Za razliku od Crossovog postupka ili postupka Wernera i Csonke, Kanijev je postupak pogodan za složene okvire s više etaža, pogotovo kada se radi o okvirima različitih visina ili o sustavima s različitim uvjetima upetosti.

4. KANIJEV POSTUPAK

4.1. POJMOVI I OZNAKE U FORMULAMA

Konvencija predznaka u Kanijevom postupku slična je konvenciji iz metode pomaka.

Momenti na krajevima štapa M_{ik} gledaju se po sljedećem pravilu: pozitivni su oni momenti koji kraj štapa zakreću u smislu vrtnje kazaljke na satu. To su momenti upetosti nastali od vanjskog opterećenja te služe kao ulazni podatak za proračun.

Momentni udjeli zbog zaokreta M' su također pozitivni ako zakreću štap u smislu vrtnje kazaljke na satu:

$$M'_{ab} = \frac{2EI}{l} \varphi_a = k_{ab}^* \cdot \varphi_a,$$

$$M'_{ba} = \frac{2EI}{l} \varphi_b = k_{ab}^* \cdot \varphi_b,$$

$$M'_{ik} = \frac{2EI}{l} \varphi_i = k_{ik}^* \cdot \varphi_i,$$

$$M'_{ki} = \frac{2EI}{l} \varphi_k = k_{ik}^* \cdot \varphi_k$$

U jednadžbama indeks a predstavlja promatrani kraj štapa, indeks b suprotni kraj štapa. To su lokalne oznake promatranog elementa dok indeksi i i k predstavljaju globalne oznake čvorova cijelog sustava. Indeks i odnosi se na promatrani čvor, a indeks k na susjedni čvor.

Krutost štapa opisuje njegovu geometriju te služi kao mjera otpornosti deformaciji i izražava se kao:

$$k^* = \frac{2EI}{l}$$

k^* predstavlja apsolutnu fleksijsku krutost štapa, dok je k relativna fleksijska krutost štapa i predstavlja odnos apsolutnih krutosti.

Momentni udjeli zbog pomaka M'' su pozitivni ako zakreću štap u smislu suprotnom od vrtnje kazaljke na satu.

a) M'' za upeti štap

b) M'' za zglobno priključen štap

$$M''_{ab} = \frac{2EI}{l} 3 \psi_{ab} = k^* \cdot 3 \psi_{ab}$$

$$M''_{ab} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2EI}{l} 2 \psi_{ab} = k^{*'} \cdot 2 \psi_{ab}$$

Koeficijent zaokreta određuje koliki dio neuravnoteženog momenta čvota preuzima pojedini štap koji se sastaje u promatranom čvoru te glasi:

$$\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{k_{ik}}{\sum k_{ik}}$$

Iz metode pomaka poznato je da moment na kraju štapa ovisi o dvostrukom kutu zaokreta promatranog čvora. Iz uvjeta ravnoteže čvora $\sum M = 0$ izrazi se nepoznati zaokret te 2 prijeđe u nazivnik, dok predznak – osigurava da moment u konačnici poništi početnu neuravnoteženost. Zbroj svih koeficijenata μ u konačnici mora iznositi $-0,5$.

Ako se je sustav translacijski pomičan, uvode se sljedeći pojmovi.

Translacijska sila kata $\bar{Q}_r$ dobivena je zbrajanjem svih vanjskih horizontalnih sila iznad kata.

$$\bar{Q}_r = \sum_{iznad\ r} P_h + \sum A_0$$

$\sum_{iznad\ r} P_h$ označava zbroj vanjskih horizontalnih sila koje djeluju na čvorove i elemente konstrukcije, dok $\sum A_0$ predstavlja zbroj horizontalnih reakcija na kraju stupa koji je obostrano upet, tj. zbroj poprečnog opterećenja po visini stupa.

Moment kata $\bar{M}_r$ je fiktivni moment koji zamjenjuje utjecaj vanjskog horizontalnog opterećenja te iznosi:

a) za obostrano upete štapove

b) za zglobno priključene štapove

$$\bar{M}_r = \frac{\bar{Q}_r \cdot h_r}{3}$$

$$\bar{M}_r = \frac{\bar{Q}_r \cdot h_r}{2}$$

Koeficijent redukcije c_{ou} koristi se kod stupova različitih visina unutar istog kata kako bi se njihovi utjecaji sveli na zajedničku usporednu visinu h_c , te glasi:

$$c_{ou} = \frac{h_c}{h'}$$

Koeficijent pomaka određuje kako se moment jednog kata raspodjeljuje na pojedine stupove zbog pomaka kata. Ovisno o duljini stupova i vrsti pridržanja razlikujemo:

- a) slučaj kada su upeti stupovi jednakih duljina

$$v_{ou} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k_{ou}}{\sum_{(r)} k_{ou}}$$

- b) slučaj kada upeti stupovi nisu jednakih visina

$$v_{ou} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{c_{ou}}{\sum_{(r)} c_{ou}} \cdot \frac{k_{ou}}{k_{ou}}$$

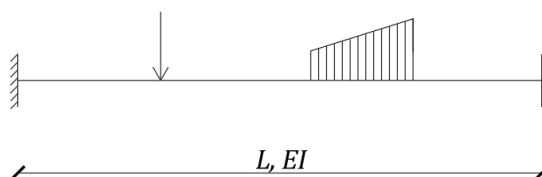
- c) slučaj kada su zglobo priključeni stupovi jednakih duljina

$$v_{ou} = -2 \frac{k'_{ou}}{\sum_{(r)} k_{ou}}$$

4.2. TRANSLACIJSKI NEPOMIČNI SISTEMI

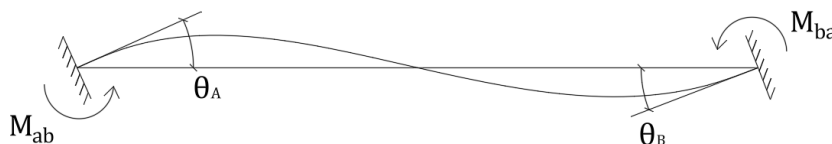
Kod metode pomaka, sile u presjeku izračunavaju se tako da se prvo odrede nepoznati kutovi zaokreta čvorova koje onda uvrstimo u jednadžbe štapova kako bi dobili konačne momente. Kanijev postupak umjesto kuteva uvodi momente savijanja koji uzrokuju istu deformaciju štapa kao kutevi zaokreta u metodi pomaka.

Neka AB predstavlja gredu u okviru ili gredu kontinuiranog nosača pod poprečnim opterećenjem (slika 1).



Slika 1.: greda pod poprečnim opterećenjem (Izvor: [6])

Pretpostavlja se da je krutost štapa EI konstantna po cijelom štapu i da nema translacijskih pomaka nego na krajevima grede A i B nastaju kutovi zaokreta θ_A i θ_B . M_{ab} i M_{ba} predstavljaju momente na krajevima grede. Deformacija grede od rotacije njezinih krajeva prikazana je na slici 2.



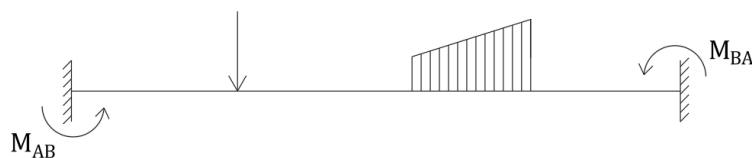
Slika 2.: deformacija grede od rotacije krajeva (Izvor: [6])

Konvencija predznaka jednaka je kao i kod metode pomaka:

- 1) momenti na krajevima su pozitivni ako okreću u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu
- 2) kutevi zaokreta su pozitivni ako okreću u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu

Stvarni momenti na krajevima promatranog elementa dobiveni su superpozicijom sljedećih komponenti deformacija:

- 1) Element AB se u početku smatra upetim na oba kraja. Oznake za momente upetosti su: za kraj A M_{AB} i za kraj B M_{BA}



Slika 3.: obostrano upeti element AB (Izvor: [6])

- 2) Kraj A zakrene se za kut θ_A što urokuje moment $2M'_{ab}$ na kraju A i M'_{ab} na udaljenom kraju B koji je ostao upet. M'_{ab} se naziva momentom zaokreta kraja A. Polazna jednačba iz metode pomaka za element koji je upet na oba kraja glasi:

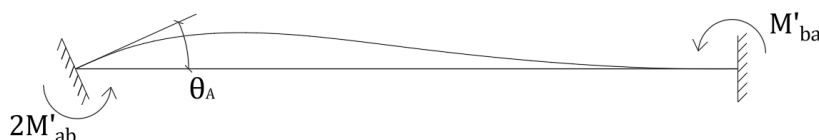
$$M_{ab} = \frac{EI}{l}(4\theta_a + 2\theta_b) + M_{AB} = \frac{4EI}{l}\theta_a + \frac{2EI}{l}\theta_b + M_{AB} \quad (1)$$

Momente zbog zaokretanja krajeva štapova Kani je uveo kako bi se kasnije izbjegao rad s kutovima i olakšala iteracija te glase:

$$M'_{ab} = \frac{2EI}{l}\theta_a = k_{ab}^* \cdot \theta_a \quad (2)$$

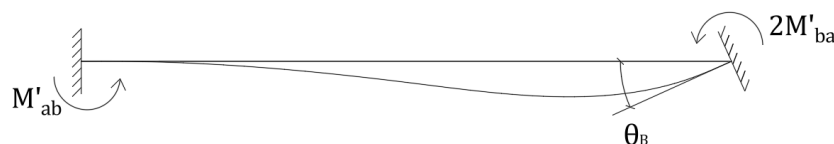
$$M'_{ba} = \frac{2EI}{l}\theta_b = k_{ab}^* \cdot \theta_b \quad (3)$$

Kada se M'_{ab} uvrsti u polaznu jednačbu, moment na promatranom kraju $\left(\frac{4EI}{l}\theta_a\right)$ postaje $2 \cdot \left(\frac{2EI}{l}\theta_a\right) = 2M'_{ab}$, dok moment na udaljenom kraju $\left(\frac{2EI}{l}\theta_b\right)$ postaje $1 \cdot \left(\frac{2EI}{l}\theta_b\right) = M'_{ba}$



Slika 4.: zaokret kraja A (Izvor: [6])

- 3) Zatim se oslobodi kraj B i zakrene za kut θ_b , dok se kraj A smatra upetim. To uzrokuje moment $2M'_{ba}$ na kraju B i moment M'_{ab} na kraju A. Moment M'_{ba} se naziva momentom zaokreta na kraju B.



Slika 5.: zaokret kraja B (Izvor: [6])

Konačne momente dobivamo superpozicijom triju momenata:

$$M_{ab} = M_{AB} + 2M'_{ab} + M'_{ba} \quad (4)$$

$$M_{ba} = M_{BA} + 2M'_{ba} + M'_{ab} \quad (5)$$

Zaključno M_{AB} (M_{BA}) je moment upetosti od opterećenja na element, $2M'_{ab}$ ($2M'_{ba}$) je dvostruki moment zbog zaokretanja štapa na promatranom kraju i M'_{ba} (M'_{ab}) je jednostruki moment zbog zaokretanja štapa na susjednom kraju elementa.

To su momenti zbog rotacije čvora koje su tražene nepoznanice u postupku. Izračunavaju se iteracijski iz transformiranih jednadžbi ravnoteže čvorova te se kasnije unose u jednadžbe za nalaženje momenata (M_{ab} i M_{ba}) na krajevima štapova (elementa).

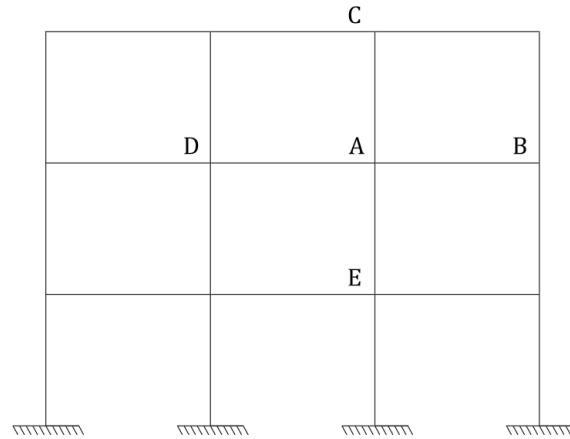
U skladu s metodom pomaka dobiva se izraz za moment na kraju štapa (elementa) koji je s jedne strane zglobno oslonjen, a s druge upet:

$$k' = \frac{3}{4}k \quad (6)$$

$$M_a = \frac{3}{4}k' \cdot \frac{3}{2}\theta_a + M'_{AB} = k' \cdot 2\theta_a + M'_{AB} \quad (7)$$

$$M_{ab} = M'_{AB} + M'_{ab} \quad (8)$$

Promatra se višekatni okvir. Ako nema translacijskih pomaka čvorova, jednadžba za zbroj momenata u jednom čvoru može se primijeniti na svim krutim spojevima okvira (čvorovi A, B, C, D i E). Za promatrani čvor A jednadžbe glase:



Slika 6.: višekatni okvir (Izvor: [6])

$$M_{ab} = M_{AB} + 2M'_{ab} + M'_{ba} \quad (9)$$

$$M_{ac} = M_{AC} + 2M'_{ac} + M'_{ca}$$

$$M_{ad} = M_{AD} + 2M'_{ad} + M'_{da}$$

$$M_{ae} = M_{AE} + 2M'_{ae} + M'_{ea}$$

U svakom čvoru mora biti zadovoljen uvjet ravnoteže momenata, odnosno $\sum M = 0$. Zbroj momenata na čvoru A glasi:

$$\sum M_{ab} = \sum M_{AB} + 2 \sum M'_{ab} + \sum M'_{ba} = 0 \quad (10)$$

U skladu s time opći je oblik zbroja momenta za promatrani čvor:

$$\sum M_{ik} = \sum_n M_{IK} + 2 \sum_n M'_{ik} + \sum_d M'_{ki} = 0$$

U općem se obliku jednadžbe ravnoteže čvora indeks ispod znaka sumacije n , odnosi na sve štapove koji su kruto povezani u promatrani čvor, dok se indeks d odnosi na zbroj štapova koji su na suprotnom kraju štapa od promatranog čvora zglobovno povezani za ostatak sistema.

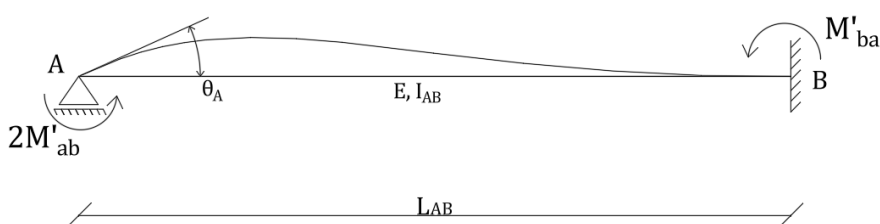
Zbrajanjem svih pojedinačnih udjela momenata koji nastaju zaokretom čvora, od jednadžbe za zbroj momenata na čvoru dobiva se

$$\sum_n M'_{ik} = -\frac{1}{2} \left(\sum_n M_{IK} + \sum_d M'_{ki} \right)$$

Zaključno, u svakom je čvoru zbroj pojedinačnih udjela momenata zbog zakretanja čvora jednak negativnoj polovini zbroja momenata upetosti i momenata savijanja na suprotnoj strani štapa. Za promatrani čvor A jednadžba je

$$\sum M'_{ab} = -\frac{1}{2} (\sum M_{AB} + \sum M'_{ba}) \quad (11)$$

Promatra se greda AB u zadanom okviru. U tablici za momente upetosti, uzet je odnos momenta i zaokreta u promatranom čvoru.



Slika 7.: greda AB unutar okvira (Izvor: [6])

Moment na promatranom kraju štapa glasi

$$2M'_{ab} = \frac{4EI_{AB}\theta_A}{L_{AB}} \quad (12)$$

Relativna je krutost promatranog elementa

$$k_{AB} = \frac{I_{AB}}{L_{AB}} \quad (13)$$

Izraz za moment tada se može napisati kao

$$M'_{ab} = 2Ek_{AB}\theta_A \quad (14)$$

U čvoru A svi elementi koji su u njega priključeni zaokreću se za jednaki kut θ_A . Pretpostavka je da je E konstantan za cijeli okvir. Dijeljenjem jednačbe za jedan element i jednačbe za zbroj momenata u čvor dobiva se

$$\frac{M'_{ab}}{\sum M'_{ab}} = \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} \quad (15)$$

Ili

$$M'_{ab} = \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} \sum M'_{ab} \quad (16)$$

Uvrštavanjem jednačbe (14) u jednačbu (11) dobiva se izraz

$$M'_{ab} = -\frac{1}{2} \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} (\sum M_{AB} + \sum M'_{ba}) \quad (17)$$

Razdjelni koeficijent za element AB u čvoru A glasi

$$\mu_{ab} = -\frac{1}{2} \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} \quad (18)$$

U skladu s time dobiva se izraz za momentni udio zbog zaokreta susjednog kraja štapa

$$M'_{ab} = \mu_{ab} (\sum M_{AB} + \sum M'_{ba}) \quad (19)$$

Moment upetosti M_{AB} je poznata veličina u prvoj iteraciji, dok je moment zaokreta na udaljenom kraju M'_{ba} nepoznata veličina, pa se stoga u prvom koraku iteracije uzima kao nula ($M'_{ba} = 0$).

Nakon dobivenih približnih vrijednosti momenta zaokreta, koristeći jednačbu (19) mogu se dobiti točne vrijednosti momenta zaokreta u čvoru za element AB. Postupak se provodi sve dok se ne dobiju točne vrijednosti momenta zaokreta. Nakon postizanja tražene vrijednosti, konačni se momenti dobivaju koristeći jednačbe (9).

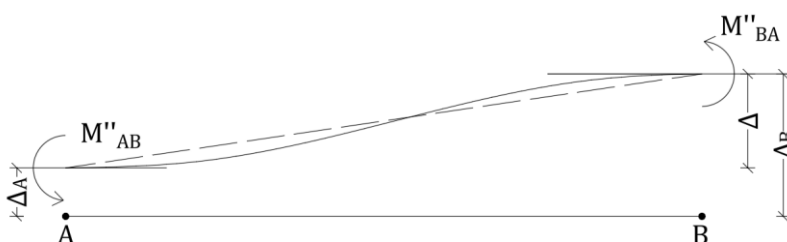
Napomene vezane za proračun:

- 1) Zbroj koeficijenta zaokreta u čvoru iznosi -0,5 (odnosno $-\frac{1}{2}$)

- 2) Ako je kraj elementa upet, pa je kut zaokreta na tom kraju jednak nuli, moment zaokreta je također jednak nuli
- 3) Ako je kraj elemenra zglobno oslonjen ili zglobno spojen, smatra se da je upet uz uzimanje reducirane relativne krutosti $\frac{3}{4}k$

4.3. TRANSLACIJSKI POMIČNI SISTEMI

Promatra se AB greda s poprečnim pomacima u točkama A i B, pri čemu se relativni pomak označava s $\Delta = (\Delta_B - \Delta_A)$. Na krajevima štapa spriječeno je zaokretanje, te se javljaju momenti zbog relativnog pomaka M''_{ab} i M''_{ba} .



Slika 8.: greda AB s porečnim pomacima u točkama A i B (Izvor: [6])

Momenti na krajevima štapa koji odgovaraju relativnom pomaku Δ su

$$M''_{AB} = M''_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (20)$$

Poprečni pomak čvorova događa se istodobno sa zaokretajima krajeva štapa. Tada su momenti na krajevima štapa dani izrazima

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{AB} + 2M'_{ab} + M'_{ba} + M''_{ab} \\ M_{ba} &= M_{BA} + 2M'_{ba} + M'_{ab} + M''_{ba} \end{aligned} \quad (21)$$

Pod pretpostavkom da su štapovi istog i nepromijenjivog poprečnog presjeka momenti uslijed pomaka štapa su isti, odnosno $M''_{ab} = M''_{ba}$.

Ako se u čvoru A sastaju dva ili više štapova, iz uvjeta ravnoteže za čvor A dobiva se:

$$\sum M_{AB} = 0 \quad (22)$$

odnosno jednačba (9)

$$\sum M_{AB} + 2 \sum M'_{ab} + \sum M'_{ba} + \sum M''_{ab} = 0 \quad (23)$$

$$\sum M'_{ab} = -\frac{1}{2} (\sum M_{AB} + \sum M'_{ab} + \sum M''_{ab}) \quad (24)$$

Iz jednačbe (16):

$$M'_{ab} = \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} \sum M'_{ab}$$

ili

$$M'_{ab} = \mu_{ab} (\sum M_A + \sum M'_{ba} + \sum M''_{ab}) \quad (25)$$

$$M'_{ba} = \mu_{ab} (\sum M_B + \sum M'_{ab} + \sum M''_{ba}) \quad (26)$$

Momenti zaokreta određuju se gore opisanim iteracijskim postupkom. Ako je početni relativni pomak poznat, moment pomaka M'' dobiva se iz jednačbe (20). Ako je pomak nepoznat, moment pomaka M'' dobiva se iz jednačbi za okvir s horizontalnim pomakom.

4.4. OKVIRI

Razmatraju se okvirni nosači (okviri s vertikalnim stupovima i horizontalnim gredama, tj. katovima) s horizontalnim pomacima u čvorovima. Razlika između horizontalno pomičnih okvira i nepomičnih okvira je u tome što se kod pomičnih okvira, uz kuteve zaokreta čvorova, pojavljuju i kutevi zaokreta štapova uzrokovani pomakom čvorova.

Dodatno se treba uzeti u obzir utjecaj zaokreta štapova na momente koji su nastali u nosivoj konstrukciji. Kanijev postupak uravnotežavanja momenata za okvire s horizontalnim pomakom, kao i za nepomične sisteme temelji se na jednačbama metode pomaka. Razlikuju se jednačbe za štapove s upetim ležajem na oba kraja i za štapove koji na jednom kraju imaju zglobovi ležaj, a na drugom upeti.

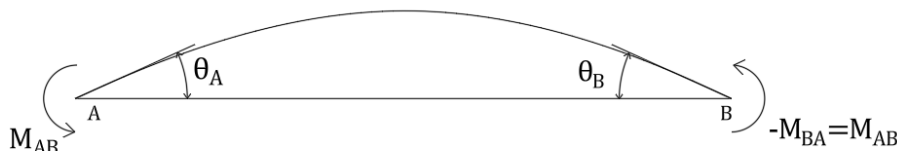
Okviri s nepomičnim čvorovima gledaju se kao kontinuirana greda. Proračun se provodi iteracijski, sukcesivnim uravnotežavanjem momenata u čvoru dok nije postignuta ravnoteža. Translacijski pomak spriječen je zbog ležajnih uvjeta ili zbog simetrije opterećenja i okvira. Kod simetričnog opterećenja čvorovi se ne pomiču horizontalno, pa se stoga se cijeli okvir gleda kao nepomičan.

4.4.1. SIMETRIČNI OKVIRI SA SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM

Kod simetričnih okvira sa simetričnim opterećenjem znatno je smanjena duljina proračuna, jer se cijeli sistem može svesti na poluokvir s prilagođenim rubnim uvjetima i opterećenjem. Razlikujemo dva slučaja kod simetričnih okvira sa simetričnim opterećenjem: 1. slučaj su okviri kod kojih os simetrije prolazi kroz os greda, a 2. slučaj je kod okvira čija os simetrije prolazi kroz os stupova.

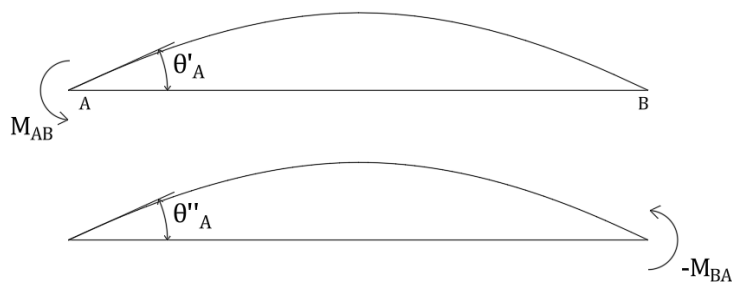
Slučaj 1 – os simetrije prolazi kroz os greda

Element AB je greda okvira čija os simetrije prolazi polovištem grede.



Slika 9.: greda AB čija os simetrija prolazi kroz središte (Izvor: [6])

Neka su M_{AB} i M_{BA} momenti na krajevima štapova. Zbog simetrije deformacije istog su iznosa, ali suprotnog predznaka. Zaokret čvora A (θ_A) dobiven je superpozicijom momenata na krajevima grede (M_{AB} i $-M_{BA}$).



Slika 10.: zaokret krajeva A i B na elementu AB (Izvor: [6])

Iz tog razloga vrijedi da je $\theta_A = \theta'_A + \theta''_A$.

Iz odnosa krutosti i kuta zaokreta danih u tablici momenata upetosti, dobiva se:

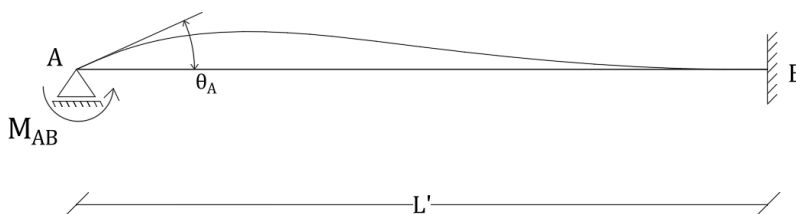
$$\theta'_A = \frac{M_{AB} L}{3EI} \quad (27)$$

$$\theta''_A = -\frac{M_{BA} L}{6EI} = \frac{M_{AB} L}{6EI} \quad (28)$$

Zbrajanjem jednačbi (27) i (28) dobiva se zaokret čvora A:

$$\theta_A = \theta'_A + \theta''_A = \frac{M_{AB} L}{3EI} + \frac{M_{AB} L}{6EI} = \frac{M_{AB} L}{2EI} \quad (29)$$

Element AB zamjenjuje se s elementom sa zadanim rubnim uvjetima. Kraj A elementa AB' zaokrenut će se zbog djelovanja momenta M_{AB} na kraju A, dok je kraj B' ostao upet. Geometrija elementa ostala je ista, moment tromosti I je jednak za AB i AB'.



Slika 11.: element AB sa zadanim rubnim uvjetima (Izvor: [6])

Zaokret čvora A tada je

$$\theta_A = \frac{M_{AB} L}{4EI}$$

L' je duljina zamjenjujućeg elementa. Iz uvjeta jednakosti kutova zaokreta čvora A elementa AB i elementa AB' dobiva se

$$\theta_A = \frac{M_{AB} L}{2EI} = \frac{M_{AB} L'}{4EI}$$

Odnos pomoću relativne krutosti glasi

$$\frac{I}{L} = \frac{2I}{L'} \rightarrow k = 2k' \rightarrow k' = \frac{k}{2}$$

k je relativna krutost elementa AB. Taj je element zamijenjen s elementom AB' čija je relativna krutost dvostruko manja od krutosti AB. Iz toga se zaključuje da element AB' ima samo polovicu krutosti savijanja elementa te se proračun mora provesti samo za jednu polovicu okvira. Os simetrije je upeti kraj poluokvira (fiktivni ležaj).

Slučaj 2 – os simetrije prolazi kroz os stupa

Slučaj 2 odnosi se na okvire koji imaju paran broj polja. Zbog simetrije opterećenja i okvira neće doći do rotacije krajeva pojedinačnih elementa kao kod prolaska osi simetrije kroz gredu. Analizira se samo polovica okvira.

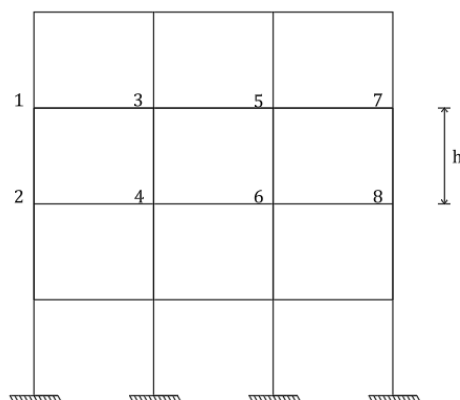
4.4.2. OKVIRI S TRANSLACIJSKIM POMACIMA ČVOROVA - VERTIKALNO OPTEREĆENJE

Neka je 1-2 vertikalni element (stup) na bilo kojem katu višekatnog okvira. Momenti M_{12} i M_{21} su krajnji momenti u točkama 1 i 2. H je poprečna (horizontalna) sila kata koja djeluje na stup 1-2 unutar okvira tj. kojom okvir djeluje na stup. Visina kata označena je s h . Iz uvjeta ravnoteže slijedi da je

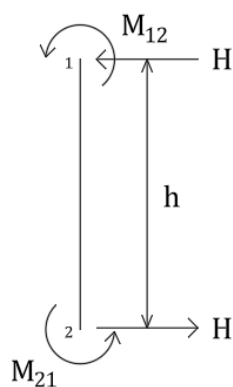
$$M_{12} + M_{21} + H(h) = 0 \quad (30)$$

ili

$$H = -\frac{M_{12} + M_{21}}{h} \quad (31)$$



Slika 12.: višekatni okvir (Izvor: [6])



Slika 13.: vertikalni element AB unutar okvira (Izvor: [6])

Sada se promatraju stupovi određenog kata 1-2, 3-4, 5-6 i 7-8 unutar okvira na slici. Primjenom jednađbe (31) na sve navedene stupove dobiva se opći oblik jednađbe za poprečnu silu:

$$\sum H = - \frac{\sum M_{12} + \sum M_{21}}{h} \quad (32)$$

$\sum H$ je poprečna sila u svim stupovima promatranog kata. Ako se poprečna sila na n-tom katu označi kao Q_n , vrijedit će jednakost $\sum H = Q_n$, odnosno

$$Q_n = - \frac{(\sum M_{12} + \sum M_{21})}{h_n} \quad (33)$$

h_n je visina stupova n-tog kata, $\sum M_{12}$ je zbroj momenata na gornjem kraju svih stupova n-tog kata i $\sum M_{21}$ je zbroj momenata na donjem kraju svih stupova n-tog kata.

Na promatrani okvir djeluju samo vertikalna opterećenja, pa je stoga $Q_n = 0$. Svi stupovi n-tog kata jednake su visine h_n pa je jednadžba ravnoteže momenata za n-ti kat

$$\sum M_{12} + \sum M_{21} = 0 \quad (34)$$

Opći izrazi za momente na krajevima elementa 1-2 su

$$M_{12} = M_{12}^F + 2M'_{12} + M'_{21} + M''_{12} \quad (35)$$

$$M_{21} = M_{21}^F + 2M'_{21} + M'_{12} + M''_{21} \quad (36)$$

Momenti upetosti za stupove jednaki su nuli, jer je vanjsko opterećenje za zadani okvir vertikalno i djeluje na gredu ($M_{12}^F = M_{21}^F = 0$). Svi elementi (grede i stupovi) uzduž svoje duljine imaju stalan i nepromjenjiv poprečni presjek. Krutost EI je također konstanta uzduž cijele duljine. Zato vrijedi da su momenti uzrokovani translacijskim pomakom jednaki na oba kraja elementa

$$M''_{12} = M''_{21} = M''$$

Stoga je

$$\sum M_{12} + \sum M_{21} = 3 \sum M'_{12} + 3 \sum M'_{21} + 2 \sum M''_{12} \quad (37)$$

Iz jednadžbe (34) slijedi

$$3 \sum M'_{12} + 3 \sum M'_{21} + 2 \sum M''_{12} = 0$$

ili

$$\sum M''_{12} = -\frac{3}{2} (\sum M'_{12} + \sum M'_{21}) \quad (36)$$

Jednadžba (36) prikazuje odnos između momenata nastalih rotacijom i translacijom dijelova elemenata.

Relativni translacijski pomak Δ jednak je za sve stupove promatranog kata. Za bilo koji stup, moment pomaka iznosi

$$M''_{12} = \frac{6EI\Delta}{h^2} = \frac{6EI\psi}{h}$$

gdje je $\psi = \frac{\Delta}{h}$.

Iz toga se zaključuje da je pomični moment od stupa proporcionalan relativnoj krutosti $k = \frac{I}{h}$.

Uvrsti se jednažba (36) u jednažbu za pomični moment:

$$M''_{12} = \frac{k_{12}}{\sum k_{12}} \sum M''_{12} \quad (37)$$

$$M''_{12} = \frac{k_{12}}{\sum k_{12}} \left(-\frac{3}{2} \right) (\sum M'_{12} + \sum M'_{21})$$

Ili

$$M''_{12} = \nu_{12} (\sum M'_{12} + \sum M'_{21}) \quad (38)$$

U jednažbi (38) ν_{12} predstavlja faktor pomaka ili faktor translacije elementa 1-2:

$$\nu_{12} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k_{12}}{\sum k_{12}}$$

U jednažbi (37) za pomični moment zbroj momenata elementa 1-2 zbroj je momenata rotacije na gornjem i donjem kraju svih stupova promatranog kata, dok je $\sum k_{12}$ zbroj relativnih krutosti svih stupova tog kata. Zbroj faktora pomaka svih stupova na jednoj etaži bit će $-\frac{3}{2}$.

Konačne jednažbe za momente biti će:

$$M'_{12} = \mu_{12} (M_1^F + \sum M'_{21} + \sum M''_{12})$$

$$M'_{21} = \mu_{21} (M_2^F + \sum M'_{12} + \sum M''_{21}) \quad (39)$$

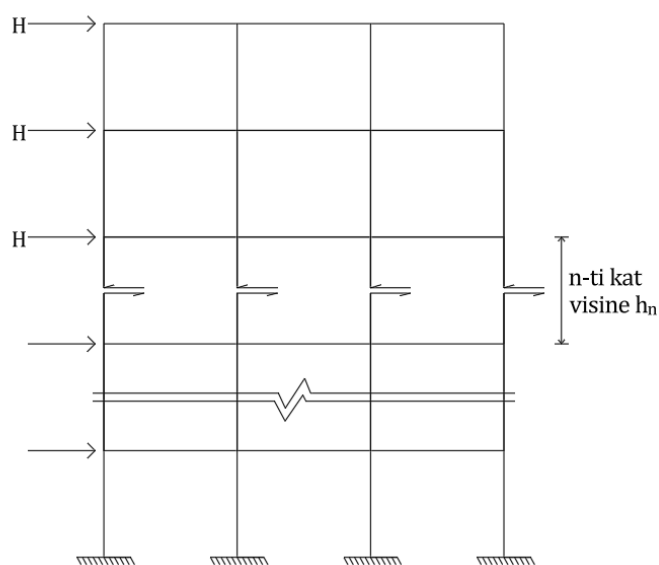
$$M''_{12} = M''_{21} = \nu_{12} (\sum M'_{12} + \sum M'_{21}) \quad (40)$$

$$M_{12} = M_{12}^F + 2M'_{12} + M'_{21} + M''_{12}$$

$$M_{21} = M_{21}^F + 2M'_{21} + M'_{12} + M''_{21} \quad (41)$$

Za početak se iz jednačbe (39) izračunaju momenti rotacije na krajevima elementa, iz jednačbe (40) izračunaju se momenti zbog translacijskog pomaka. Momenti se određuju iteracijskim postupkom po katovima. Nakon željene točnosti, iz jednačbe (41) izračunaju se konačni momenti na krajevima štapova.

4.4.3. OKVIRI S TRANSLACIJSKIM POMACIMA ČVOROVA – HORIZONTALNO OPTEREĆENJE



Slika 14.: višekatni okvir pod horizontalnim opterećenjem (Izvor: [6])

Promatran je okvir s horizontalnim opterećenjem. Poprečna sila n -tog kata jednaka je $\sum H = Q$, a visina stupa unutar kata označava se s h_n . Prema tome može se napisati jednačba ravnoteže momenata na promatranom katu kao:

$$\sum M_{12} + \sum M_{21} + Q_n(h_n) = 0 \quad (42)$$

III

$$Q_n h_n = -(\sum M_{12} + \sum M_{21}) \quad (43)$$

Za stupove vrijedi da su momenti upetosti od vanjskog opterećenja na oba kraja jednaka nuli ($M_{12}^F = M_{21}^F = 0$). Uz tu pretpostavku i preko jednačbe (36) dobiva se jednačba ravnoteže momenata u čvoru

$$Q_n h_n = -\sum_n \{3(M'_{12} + M'_{21}) + 2M''_{12}\} \quad (44)$$

Zbrajaju se svi stupovi na n-tom katu.

Drugi oblik jednačbe glasi:

$$\frac{Q_n h_n}{3} = -\sum_n \left\{ (M'_{12} + M'_{21}) + \frac{2}{3} M''_{12} \right\} \quad (45)$$

Iz jednačbe (45) može se izraziti moment pomaka na kraju jednog stupa:

$$\sum M''_{12} = -\frac{3}{2} \left\{ \frac{Q_n h_n}{3} + \sum_n (M'_{12} + M'_{21}) \right\} \quad (46)$$

Ili

$$\sum M''_{12} = -\frac{3}{2} \{M_n^F + \sum_n (M'_{12} + M'_{21})\} \quad (47)$$

Izraz M_n^F označava moment kata ili početni moment kata koji je jednak $M_n^F = \frac{Q_n h_n}{3}$. Moment kata bit će pozitivan kada sila kata Q djeluje u negativnom smislu zdesna nalijevo.

Iz jednačbe (37) može se napisati opći izraz za moment pomaka:

$$M''_{12} = \frac{k_{12}}{\sum k_{12}} \left(-\frac{3}{2} \right) \{M_n^F + \sum_n (M'_{12} + M'_{21})\} \quad (48)$$

Ili

$$M''_{12} = \nu_{12} \{M_n^F + \sum_n (M'_{12} + M'_{21})\} \quad (49)$$

Razlika pri proračunu višekratnih okvira s horizontalnim opterećenjem i višekratnih okvira s vertikalnim opterećenjem je u tome što se kod okvira s horizontalnim opterećenjem, pri izračunavanju momenta od translacijskog pomaka mora uvažiti i moment kata M_n^F

4.4.4. PODJELA OKVIRA S OBZIROM NA GEOMETRIJU

Okviri se, uz podjelu ovisno o različitom opterećenju, dijele i prema geometriji te načinu spajanja elemenata. Sljedeće jednačbe služe za određivanje komponenata momenata zbog translacijskog pomaka za 6 najvažnijih slučajeva kod višekratnih okvira. Razmotrit će se okviri s potpuno ili elastično upetim stupovima, kao i sa stupovima koji su na jednom kraju zglobovno spojeni. Uz podjelu po geometriji, razmotrit će se okviri opterećeni samo vertikalnim opterećenjem, samo horizontalnim i kombinacijom vertikalnog i horizontalnog opterećenja.

1. *slučaj – stupovi n-tog kata su upeti i jednake duljine; okvir je opterećen samo s vertikalnim opterećenjem*

Ako su stupovi jednakih duljina, moment pomaka dobit će se na temelju odnosa krutosti stupova i kuteva zaokreta. Stupovi jednog kata u ravnini horizontalno se pomiču za istu duljinu Δu . Zbog toga kut zaokreta svakog stupa ψ ne ovisi o visini h . Iz pomaka štapova može se zaključiti da momente pomaka treba raspodijeliti s obzirom na odnos $\frac{k}{h}$. Moment pomaka za jedan stup n-tog kata jednak je

$$M''_{ab} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k_{ab}}{\sum_{(n)} k_{ab}} \sum_{(n)} (M'_{ab} + M'_{ba}) \quad (50)$$

Uvrsti li se koeficijent bočnog pomaka $\nu = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k_{ab}}{\sum_{(r)} k_{ab}}$ u jednačbu (50), dobiva se:

$$M''_{ab} = \nu_{ab} \cdot \sum_{(n)} (M'_{ab} + M'_{ba}) \quad (51)$$

Za svaki n-ti kat treba biti zadovoljen uvjet kontrole: $\sum_{(n)} \nu_{ab} = -\frac{3}{2}$

Momenti zbog translacijskih pomaka dobivaju se zbrojem momenata zbog zaokreta na krajevima elementa.

2. slučaj – stupovi n -tog kata su upeti i jednake duljine; okvir je opterećen i horizontalnim silama

U slučaju opterećenja s horizontalnim silama treba uvesti moment kata (koji je ranije objašnjen). Za izračunavanje momenta pomaka potrebni su moment pomaka i zbroj momenata zaokreta krajeva štapova.

Moment n -tog kata:

$$\overline{M}_n = \frac{\overline{Q}_n \cdot h_n}{3} \quad (52)$$

Jednadžba za zbroj momentnih udjela zbog translacijskog pomaka glasi:

$$\sum_{(n)} M''_{ab} = -\frac{3}{2} [M_n + \sum_{(n)} (M'_{ab} + M'_{ba})] \quad (53)$$

S koeficijentom pomaka ν_{ab} , iz zbroja momentnih udjela zbog translacijskog pomaka dobit će se momentni udio jednog stupa n -tog kata:

$$M''_{ab} = \nu_{ab} [\overline{M}_n + \sum_{(n)} (M'_{ab} + M'_{ba})] \quad (54)$$

gdje je

$$\nu_{ab} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k_{ab}}{\sum_{(n)} k_{ab}} \quad (55)$$

Za svaki kat treba biti zadovoljen uvjet kontrole: $\sum_{(n)} \nu_{ab} = -\frac{3}{2}$

3. slučaj – stupovi su upeti, ali različite visine

Kada su stupovi unutar okvira različitih duljina, to uzrokuje različite kutove zaokreta štapova, a time se dobivaju i različiti udjeli momenata zbog translacijskog pomaka. Treba odabrati referentnu visinu kata h_c koja zajedno sa stvarnom visinom kata h daje faktor redukcije c_{ab} , odnosno

$$c_{ab} = \frac{h_c}{h}$$

Faktor redukcije primjenjuje se na momente rotacije prije no što se zbroje na razini kata.

Dobiva se jednačba

$$\sum_{(r)} c_{ab} \cdot M''_{ab} = -\frac{3}{2} \left[\frac{\overline{Q_n} \cdot h_n}{3} + \sum_{(n)} c_{ab} (M'_{ab} + M'_{ba}) \right] \quad (56)$$

Moment kata M_n određen je s poprečnom silom Q_n

Razdjelni koeficijent pomaka ν_{ab} određuje udio u kojem se ukupni moment kata zbog pomaka raspodjeljuje na promatrani stup kata. ν_{ab} glasi:

$$\nu_{ab} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{c_{ab} \cdot k_{ab}}{\sum_{(n)} c_{ab}^2 \cdot k_{ab}} \quad (57)$$

Za svaki kat treba biti zadovoljen uvjet kontrole: $\sum_{(n)} \nu_{ab} \cdot c_{ab} = -\frac{3}{2}$

Konačna vrijednost momenta uzrokovanog bočnim pomakom za stup promatranog kata iznosi:

$$M''_{ab} = \nu_{ab} \left[\frac{\overline{Q_n} \cdot h_n}{3} + \sum_{(n)} c_{ab} (M'_{ab} + M'_{ba}) \right] \quad (58)$$

4. slučaj – stupovi su na jednom kraju zglobo priključeni i u svakom su katu jednake visine

Kada su stupovi na jednom kraju zglobo spojeni treba uzeti reduciranu krutost štapa $k' = 0,75k$. Zbog zglobnog ležaja jednačba ravnoteže momenata na jednom katu daje drugačiji odnos između momenata pomaka i momenata rotacije.

Izraz za poprečnu silu kata glasi:

$$\overline{Q_n} + \sum_{(n)} \frac{1}{h} (2M_{ab} + M''_{ba}) = 0 \quad (59)$$

Visina stupa je konstantna na cijelom katu. Za jedan stup n-tog kata jednačba za moment zbog translacijskog pomaka glasi:

$$M''_{ab} = \frac{k'_{ab}}{\sum_{(n)} k'_{ab}} \sum_{(n)} M''_{ab} = -2 \frac{k'_{ab}}{\sum_{(n)} k'_{ab}} \left(\frac{\overline{Q_n} \cdot h}{2} + \sum_{(n)} M'_{ab} \right) \quad (60)$$

gdje je razdjelni koeficijent pomaka ν_{ab}

$$\nu_{ab} = -2 \frac{k'_{ab}}{\sum_{(n)} k'_{ab}} \quad (61)$$

Za svaki kat treba biti zadovoljen uvjet kontrole $\sum_{(n)} \nu_{ab} = -2$

5. *slučaj – stupovi jednog kata priključeni su na krajevima s iste strane zglobno, ali su nejednake duljine*

Kada su stupovi u katu različitih visina i zglobno oslonjeni na jednoj strani, u obzir se mora uzeti reducirana krutost štapa $k' = 0,75k$ i faktor redukcije visine $c_{ab} = \frac{h_c}{h}$, gdje je h_c referentna visina kata.

Momenti zbog translacijskog pomaka za stupove koji su na jednom kraju zglobno oslonjeni i različitih su visina glasi

$$M''_{ab} = \nu_{ab} \left[\frac{\overline{Q_n} \cdot h_c}{2} + \sum_{(n)} c_{ab} \cdot M'_{ab} \right] \quad (62)$$

Koeficijent pomaka glasi:

$$\nu_{ab} = -2 \cdot \frac{c_{ab} \cdot k'_{ab}}{\sum_{(n)} c_{ab}^2 \cdot k'_{ab}} \quad (63)$$

Za svaki kat treba biti zadovoljen uvjet kontrole: $\sum_{(n)} \nu_{ab} \cdot c_{ab} = -2$

6. *slučaj – stupovi jednog kata nejednake su visine i različito su oslonjeni*

Kod okvira s različitim visinama stupova i različitim ležajevima, primjenjuju se reducirane veličine (m je koeficijent redukcije) i referentne visine h_c

Za obostrano upete stupove vrijedi

$$k_{ab} = 1k, \quad h' = 1h, \quad c'_{ab} = \frac{h_c}{h} = c_{ab}, \quad m = 1 \quad (64)$$

Za stupove koji su na jednom kraju zglobno spojeni vrijedi:

$$k_{ab} = k' = \frac{3}{4}k, \quad h' = \frac{3}{2}h, \quad c'_{ab} = \frac{h_c}{h} = \frac{2h_c}{3h} = \frac{2}{3}c_{ab}, \quad m = \frac{3}{4} \quad (65)$$

Moment kata uzrokovan translacijskim pomakom glasi:

$$M''_{ab} = -2 \frac{c_{ab} \cdot k'_{ab}}{\sum_{(n)} c_{ab}^2 \cdot k'_{ab}} \left(\frac{\overline{Q_n} \cdot h_c}{2} + \sum_{(n)} c_{ab} \cdot M'_{ab} \right) \quad (66)$$

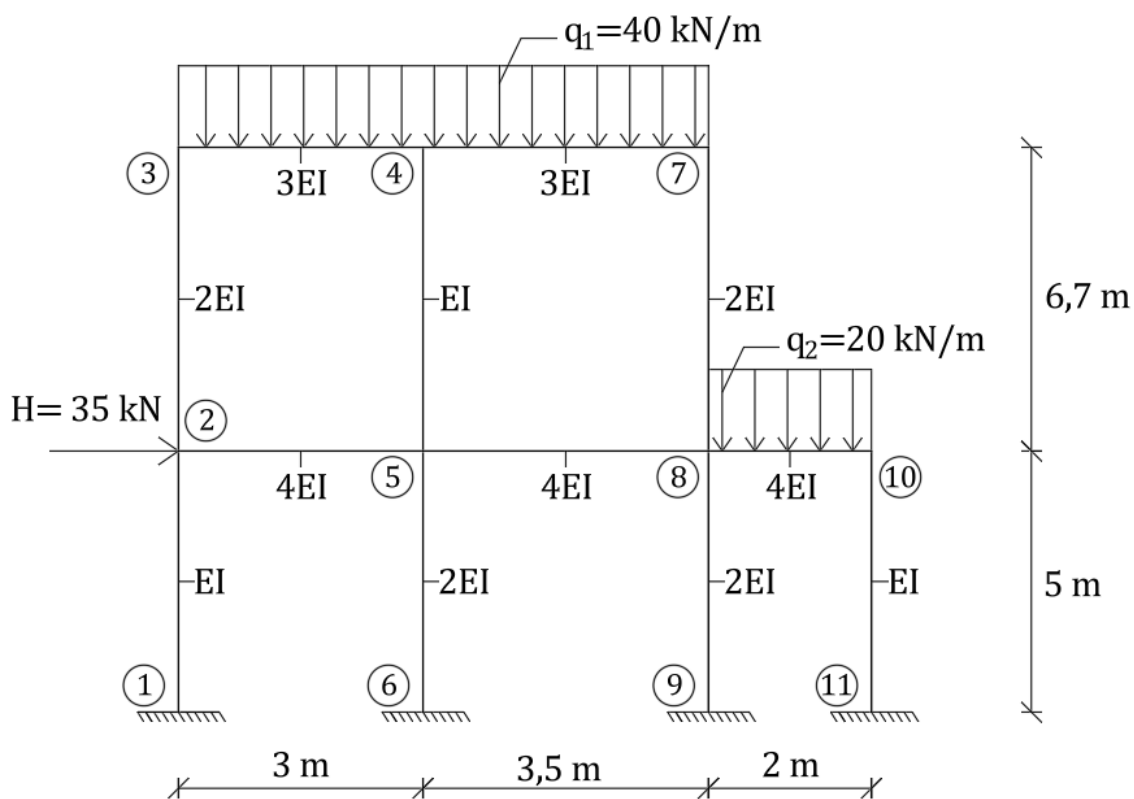
Koeficijent pomaka glasi

$$v_{ab} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{c'_{ab} \cdot k_{ab}}{\sum_{(n)} m \cdot c'^2_{ab} \cdot k_{ab}} \quad (67)$$

Za svaki kat treba biti zadovoljen uvjet kontrole $\sum_{(n)} m \cdot c'_{ab} \cdot v_{ab} = -\frac{3}{2}$

5. ZADATAK

U zadatku promatramo nepomični okvir s dvije etaže. Opterećenja i geometrija sustava dani su na slici.



Slika 15.: nepomični okvir s dvije etaže

Momenti upetosti za vanjsko opterećenje

$$M_{34} = -M_{43} = \frac{q_1 \cdot l^2}{12} = \frac{40 \cdot 3^2}{12} = 30 \text{ kN}$$

$$M_{47} = -M_{74} = \frac{q_1 \cdot l^2}{12} = \frac{40 \cdot 3.5^2}{12} = 40.83 \text{ kN}$$

$$M_{810} = -M_{108} = \frac{q_2 \cdot l^2}{12} = \frac{20 \cdot 2^2}{12} = 6.67 \text{ kN}$$

Koeficijenti krutosti

$$k_{12} = \frac{EI}{5} = 0,299EI$$

$$k_{78} = \frac{2EI}{6,7} = 0,299EI$$

$$k_{58} = \frac{4EI}{3,5} = 1,14EI$$

$$k_{32} = \frac{2EI}{6,7} = 0,299EI$$

$$k_{89} = \frac{2EI}{5} = 0,4EI$$

$$k_{810} = \frac{4EI}{2} = 0,2EI$$

$$k_{45} = \frac{EI}{6,7} = 0,149EI$$

$$k_{1011} = \frac{EI}{5} = 0,2EI$$

$$k_{34} = \frac{3EI}{3} = EI$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{5} = 0,4EI$$

$$k_{25} = \frac{4EI}{3} = 1,33EI$$

$$k_{47} = \frac{3EI}{3,5} = 0,857EI$$

Razdjelni koeficijenti

$$\mu_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}$$

$$\check{\text{Čvor 2}} - k_2 = 0,2EI + 0,299EI + 1,33EI = 1,83EI$$

$$\mu_{21} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,2EI}{1,83EI} = -0,055$$

$$\mu_{23} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,299EI}{1,83EI} = -0,082$$

$$\mu_{25} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1,33EI}{1,83EI} = -0,363$$

$$\check{\text{Čvor 3}} - k_3 = 0,299EI + EI = 1,30EI$$

$$\mu_{32} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,299EI}{1,30EI} = -0,115$$

$$\mu_{34} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{1,30EI} = -0,385$$

$$\check{\text{Čvor 4}} - k_4 = EI + 0,149EI + 0,857EI = 2,01EI$$

$$\mu_{43} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{2,01EI} = -0,249$$

$$\mu_{45} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,149EI}{2,01EI} = -0,037$$

$$\mu_{47} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,857EI}{2,01EI} = -0,213$$

$$\check{\text{Cvor 5}} - k_5 = 1,33EI + 0,149EI + 0,4EI + 1,14EI = 3,02EI$$

$$\mu_{52} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1,33EI}{3,02EI} = -0,220$$

$$\mu_{54} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,149EI}{3,02EI} = -0,025$$

$$\mu_{56} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,4EI}{3,02EI} = -0,066$$

$$\mu_{58} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1,14EI}{3,02EI} = -0,189$$

$$\check{\text{Cvor 7}} - k_7 = 0,857EI + 0,299EI = 1,16EI$$

$$\mu_{74} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,857EI}{1,16EI} = -0,369$$

$$\mu_{78} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,299EI}{1,16EI} = -0,129$$

$$\check{\text{Cvor 8}} - k_8 = 1,14EI + 0,299EI + 0,4EI + 2EI = 3,84EI$$

$$\mu_{85} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1,14EI}{3,84EI} = -0,148$$

$$\mu_{87} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,299EI}{3,84EI} = -0,039$$

$$\mu_{89} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,4EI}{3,84EI} = -0,052$$

$$\mu_{810} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2EI}{3,84EI} = -0,260$$

$$\check{\text{Cvor 10}} - k_{10} = 2EI + 0,2EI = 2,2EI$$

$$\mu_{108} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2EI}{2,2EI} = -0,450$$

$$\mu_{1011} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,2EI}{2,2EI} = -0,045$$

Vrijednost translacijskih koeficijenata

$$v_{ij} = -\frac{3}{2} \frac{v_{ij}}{\sum v_{ij}}$$

1.etaža

$$v_{12} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,2EI}{0,2EI + 0,4EI + 0,4EI + 0,2EI} = -0,25$$

$$v_{56} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,4EI}{0,2EI + 0,4EI + 0,4EI + 0,2EI} = -0,5$$

$$v_{1011} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,2EI}{0,2EI + 0,4EI + 0,4EI + 0,2EI} = -0,25$$

2.etaža

$$v_{32} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,299EI}{0,299EI + 0,149EI + 0,299EI} = -0,6$$

$$v_{45} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,149EI}{0,299EI + 0,149EI + 0,299EI} = -0,299$$

$$v_{78} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,299EI}{0,299EI + 0,149EI + 0,299EI} = -0,6$$

Translacijske sile i momenti katova

1.kat

$$Q_1 = H = 35 \text{ kN}$$

$$M_1 = \frac{35 \cdot 5}{3} = 58,33 \text{ kNm}$$

2.kat

$$Q_2 = 0$$

$$M_2 = 0$$

1.iteracija

STUPOVI 1. KATA

$$m''_{12} = -0,25 \cdot (-58,33) = 14,58 \text{ kNm}$$

$$m''_{56} = -0,5 \cdot (-58,33) = 29,17 \text{ kNm}$$

$$m''_{89} = -0,5 \cdot (-58,33) = 29,17 \text{ kNm}$$

$$m''_{1011} = -0,25 \cdot (-58,33) = 14,58 \text{ kNm}$$

STUPOVI 2. KATA

$$m''_{32} = -0,6 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$m''_{45} = -0,6 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$m''_{78} = -0,6 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

ČVOR 2

$$m'_{21} = -0,055 \cdot (0 + 14,58) = -0,802 \text{ kNm}$$

$$m'_{23} = -0,082 \cdot (0 + 14,58) = -1,196 \text{ kNm}$$

$$m'_{25} = -0,363 \cdot (0 + 14,58) = -5,29 \text{ kNm}$$

ČVOR 3

$$m'_{32} = -0,115 \cdot (0 - 1,196 + 0) = -0,138 \text{ kNm}$$

$$m'_{34} = -0,385 \cdot (0 - 1,196 + 0) = -11,55 \text{ kNm}$$

ČVOR 4

$$m'_{43} = -0,249 \cdot (-30 + 40,83 - 11,55) = 0,18 \text{ kNm}$$

$$m'_{45} = -0,037 \cdot (-30 + 40,83 - 11,55) = -0,40 \text{ kNm}$$

$$m'_{47} = -0,213 \cdot (-30 + 40,83 - 11,55) = -2,31 \text{ kNm}$$

ČVOR 5

$$m'_{52} = -0,220 \cdot (-5,29 + 29,17 - 0,40) = -5,17 \text{ kNm}$$

$$m'_{54} = -0,025 \cdot (-5,29 + 29,17 - 0,40) = -0,587 \text{ kNm}$$

$$m'_{56} = -0,066 \cdot (-5,29 + 29,17 - 0,40) = -1,55 \text{ kNm}$$

$$m'_{58} = -0,189 \cdot (-5,29 + 29,17 - 0,40) = -4,44 \text{ kNm}$$

ČVOR 7

$$m'_{74} = -0,369 \cdot (-40,83 - 2,31) = 15,92 \text{ kNm}$$

$$m'_{78} = -0,129 \cdot (-40,83 - 2,31) = 5,57 \text{ kNm}$$

ČVOR 8

$$m'_{85} = -0,148 \cdot (6,67 - 4,44 + 5,57 + 29,17) = -5,47 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,039 \cdot (6,67 - 4,44 + 5,57 + 29,17) = -1,44 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,052 \cdot (6,67 - 4,44 + 5,57 + 29,17) = -1,92 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,260 \cdot (6,67 - 4,44 + 5,57 + 29,17) = -9,61 \text{ kNm}$$

ČVOR 10

$$m'_{108} = -0,450 \cdot (-6,67 - 9,61 + 14,58) = 0,765 \text{ kNm}$$

$$m'_{1011} = -0,045 \cdot (-6,67 - 9,61 + 14,58) = 0,077 \text{ kNm}$$

2.iteracija

STUPOVI 1. KATA

$$m''_{12} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,802 - 1,93 - 1,86 - 0,356) = 15,82 \text{ kNm}$$

$$m''_{56} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,802 - 1,93 - 1,86 - 0,356) = 31,64 \text{ kNm}$$

$$m''_{89} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,802 - 1,93 - 1,86 - 0,356) = 31,64 \text{ kNm}$$

$$m''_{1011} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,802 - 1,93 - 1,86 - 0,356) = 15,82 \text{ kNm}$$

STUPOVI 2. KATA

$$m''_{32} = -0,6 \cdot (0 - 1,196 + 0,138 - 0,40 - 0,719 - 5,27 - 1,19) = 5,18 \text{ kNm}$$

$$m''_{45} = -0,299 \cdot (0 - 1,196 + 0,138 - 0,40 - 0,719 - 5,27 - 1,19) = 2,58 \text{ kNm}$$

$$m''_{78} = -0,6 \cdot (0 - 1,196 + 0,138 - 0,40 - 0,719 - 5,27 - 1,19) = 5,18 \text{ kNm}$$

ČVOR 2

$$m'_{21} = -0,055 \cdot (0,138 - 5,25 + 15,82 + 5,18) = -0,874 \text{ kNm}$$

$$m'_{23} = -0,082 \cdot (0,138 - 5,25 + 15,82 + 5,18) = -1,30 \text{ kNm}$$

$$m'_{25} = -0,363 \cdot (0,138 - 5,25 + 15,82 + 5,18) = -5,78 \text{ kNm}$$

ČVOR 3

$$m'_{32} = -0,115 \cdot (30 - 1,30 + 0,18 + 5,18) = -3,92 \text{ kNm}$$

$$m'_{34} = -0,385 \cdot (30 - 1,30 + 0,18 + 5,18) = -13,11 \text{ kNm}$$

ČVOR 4

$$m'_{43} = -0,249 \cdot (-30 + 40,83 - 13,11 - 0,587 + 15,92) = -3,25 \text{ kNm}$$

$$m'_{45} = -0,037 \cdot (-30 + 40,83 - 13,11 - 0,587 + 15,92) = -0,483 \text{ kNm}$$

$$m'_{47} = -0,213 \cdot (-30 + 40,83 - 13,11 - 0,587 + 15,92) = -2,78 \text{ kNm}$$

ČVOR 5

$$m'_{52} = -0,220 \cdot (-3,89 - 0,483 - 5,47 + 31,64 + 2,58) = -5,36 \text{ kNm}$$

$$m'_{54} = -0,025 \cdot (-3,89 - 0,483 - 5,47 + 31,64 + 2,58) = -0,609 \text{ kNm}$$

$$m'_{56} = -0,066 \cdot (-3,89 - 0,483 - 5,47 + 31,64 + 2,58) = -1,61 \text{ kNm}$$

$$m'_{58} = -0,189 \cdot (-3,89 - 0,483 - 5,47 + 31,64 + 2,58) = -4,61 \text{ kNm}$$

ČVOR 7

$$m'_{74} = -0,369 \cdot (-40,83 - 2,78 - 1,44 + 5,18) = 14,71 \text{ kNm}$$

$$m'_{78} = -0,129 \cdot (-40,83 - 2,78 - 1,44 + 5,18) = 5,14 \text{ kNm}$$

ČVOR 8

$$m'_{85} = -0,148 \cdot (6,67 - 4,61 + 5,14 + 0,765 + 31,64 + 5,18) = -6,63 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,039 \cdot (6,67 - 4,61 + 5,14 + 0,765 + 31,64 + 5,18) = -1,75 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,052 \cdot (6,67 - 4,61 + 5,14 + 0,765 + 31,64 + 5,18) = -2,33 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,260 \cdot (6,67 - 4,61 + 5,14 + 0,765 + 31,64 + 5,18) = -11,64 \text{ kNm}$$

ČVOR 10

$$m'_{108} = -0,450 \cdot (-6,67 - 11,64 + 15,82) = 1,12 \text{ kNm}$$

$$m'_{1011} = -0,045 \cdot (-6,67 - 11,64 + 15,82) = 0,112 \text{ kNm}$$

3.iteracija

STUPOVI 1. KATA

$$m''_{12} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,874 - 1,61 - 2,33 - 0,112) = 15,81 \text{ kNm}$$

$$m''_{56} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,874 - 1,61 - 2,33 - 0,112) = 31,63 \text{ kNm}$$

$$m''_{89} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,874 - 1,61 - 2,33 - 0,112) = 31,63 \text{ kNm}$$

$$m''_{1011} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,874 - 1,61 - 2,33 - 0,112) = 15,81 \text{ kNm}$$

STUPOVI 2. KATA

$$m''_{32} = -0,6 \cdot (-0,878 - 3,97 - 0,477 - 0,610 + 5,14 - 1,75) = 1,53 \text{ kNm}$$

$$m''_{45} = -0,299 \cdot (-0,878 - 3,97 - 0,477 - 0,610 + 5,14 - 1,75) = 0,76 \text{ kNm}$$

$$m''_{78} = -0,6 \cdot (-0,878 - 3,97 - 0,477 - 0,610 + 5,14 - 1,75) = 1,53 \text{ kNm}$$

ČVOR 2

$$m'_{21} = -0,055 \cdot (-3,97 - 5,36 + 15,81 + 1,53) = -0,441 \text{ kNm}$$

$$m'_{23} = -0,082 \cdot (-3,97 - 5,36 + 15,81 + 1,53) = -0,657 \text{ kNm}$$

$$m'_{25} = -0,363 \cdot (-3,97 - 5,36 + 15,81 + 1,53) = -2,91 \text{ kNm}$$

ČVOR 3

$$m'_{32} = -0,115 \cdot (30 - 0,657 - 3,25 + 1,53) = -3,18 \text{ kNm}$$

$$m'_{34} = -0,385 \cdot (30 - 0,657 - 3,25 + 1,53) = -10,64 \text{ kNm}$$

ČVOR 4

$$m'_{43} = -0,249 \cdot (-30 + 40,83 - 10,64 - 0,609 + 14,71 + 0,76) = -3,75 \text{ kNm}$$

$$m'_{45} = -0,037 \cdot (-30 + 40,83 - 10,64 - 0,609 + 14,71 + 0,76) = -0,557 \text{ kNm}$$

$$m'_{47} = -0,213 \cdot (-30 + 40,83 - 10,64 - 0,609 + 14,71 + 0,76) = -3,21 \text{ kNm}$$

ČVOR 5

$$m'_{52} = -0,220 \cdot (-2,91 - 0,557 - 6,63 + 31,49 + 0,76) = -4,88 \text{ kNm}$$

$$m'_{54} = -0,025 \cdot (-2,91 - 0,557 - 6,63 + 31,49 + 0,76) = -0,555 \text{ kNm}$$

$$m'_{56} = -0,066 \cdot (-2,91 - 0,557 - 6,63 + 31,49 + 0,76) = -1,46 \text{ kNm}$$

$$m'_{58} = -0,189 \cdot (-2,91 - 0,557 - 6,63 + 31,49 + 0,76) = -4,19 \text{ kNm}$$

ČVOR 7

$$m'_{74} = -0,369 \cdot (-40,83 - 3,21 - 1,75 + 1,53) = 16,33 \text{ kNm}$$

$$m'_{78} = -0,129 \cdot (-40,83 - 3,21 - 1,75 + 1,53) = 5,71 \text{ kNm}$$

ČVOR 8

$$m'_{85} = -0,148 \cdot (6,67 - 4,19 + 5,71 + 1,12 + 31,49 + 1,53) = -6,26 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,039 \cdot (6,67 - 4,19 + 5,71 + 1,12 + 31,49 + 1,53) = -1,65 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,052 \cdot (6,67 - 4,19 + 5,71 + 1,12 + 31,49 + 1,53) = -2,20 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,260 \cdot (6,67 - 4,19 + 5,71 + 1,12 + 31,49 + 1,53) = -11,01 \text{ kNm}$$

ČVOR 10

$$m'_{108} = -0,450 \cdot (-6,67 - 11,01 + 15,74) = 0,873 \text{ kNm}$$

$$m'_{1011} = -0,045 \cdot (-6,67 - 11,01 + 15,74) = 0,087 \text{ kNm}$$

4.iteracija

STUPOVI 1. KATA

$$m''_{12} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,441 - 1,46 - 2,20 + 0,087) = 15,59 \text{ kNm}$$

$$m''_{56} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,441 - 1,46 - 2,20 + 0,087) = 31,17 \text{ kNm}$$

$$m''_{89} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,441 - 1,46 - 2,20 + 0,087) = 31,17 \text{ kNm}$$

$$m''_{1011} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,441 - 1,46 - 2,20 + 0,087) = 15,59 \text{ kNm}$$

STUPOVI 2. KATA

$$m''_{32} = -0,6 \cdot (-0,657 - 3,18 - 0,557 - 0,55 + 5,17 - 1,65) = 0,533 \text{ kNm}$$

$$m''_{45} = -0,299 \cdot (-0,657 - 3,18 - 0,557 - 0,55 + 5,17 - 1,65) = 0,266 \text{ kNm}$$

$$m''_{78} = -0,6 \cdot (-0,657 - 3,18 - 0,557 - 0,55 + 5,17 - 1,65) = 0,533 \text{ kNm}$$

ČVOR 2

$$m'_{21} = -0,055 \cdot (-3,18 - 4,88 + 15,59 + 0,533) = -0,443 \text{ kNm}$$

$$m'_{23} = -0,082 \cdot (-3,18 - 4,88 + 15,59 + 0,533) = -0,661 \text{ kNm}$$

$$m'_{25} = -0,363 \cdot (-3,18 - 4,88 + 15,59 + 0,533) = -2,93 \text{ kNm}$$

ČVOR 3

$$m'_{32} = -0,115 \cdot (30 - 0,661 - 3,75 + 0,533) = -3 \text{ kNm}$$

$$m'_{34} = -0,385 \cdot (30 - 0,661 - 3,75 + 0,533) = -10,06 \text{ kNm}$$

ČVOR 4

$$m'_{43} = -0,249 \cdot (-30 + 40,83 - 10,06 - 0,555 + 16,33) = -4,12 \text{ kNm}$$

$$m'_{45} = -0,037 \cdot (-30 + 40,83 - 10,06 - 0,555 + 16,33) = -0,612 \text{ kNm}$$

$$m'_{47} = -0,213 \cdot (-30 + 40,83 - 10,06 - 0,555 + 16,33) = -3,52 \text{ kNm}$$

ČVOR 5

$$m'_{52} = -0,220 \cdot (-2,93 - 0,612 - 6,26 + 31,17 + 0,266) = -4,76 \text{ kNm}$$

$$m'_{54} = -0,025 \cdot (-2,93 - 0,612 - 6,26 + 31,17 + 0,266) = -0,541 \text{ kNm}$$

$$m'_{56} = -0,066 \cdot (-2,93 - 0,612 - 6,26 + 31,17 + 0,266) = -1,43 \text{ kNm}$$

$$m'_{58} = -0,189 \cdot (-2,93 - 0,612 - 6,26 + 31,17 + 0,266) = -4,09 \text{ kNm}$$

ČVOR 7

$$m'_{74} = -0,369 \cdot (-40,83 - 3,52 - 1,65 + 0,533) = 16,78 \text{ kNm}$$

$$m'_{78} = -0,129 \cdot (-40,83 - 3,52 - 1,65 + 0,533) = 5,87 \text{ kNm}$$

ČVOR 8

$$m'_{85} = -0,148 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,87 + 0,873 + 31,17 + 0,533) = -6,07 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,039 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,87 + 0,873 + 31,17 + 0,533) = -1,60 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,052 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,87 + 0,873 + 31,17 + 0,533) = -2,13 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,260 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,87 + 0,873 + 31,17 + 0,533) = -10,67 \text{ kNm}$$

ČVOR 10

$$m'_{108} = -0,450 \cdot (-6,67 - 10,67 + 15,59) = 0,788 \text{ kNm}$$

$$m'_{1011} = -0,045 \cdot (-6,67 - 10,67 + 15,59) = 0,079 \text{ kNm}$$

5.iteracija

STUPOVI 1. KATA

$$m''_{12} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,433 - 1,43 - 2,13 + 0,079) = 15,56 \text{ kNm}$$

$$m''_{56} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,433 - 1,43 - 2,13 + 0,079) = 31,12 \text{ kNm}$$

$$m''_{89} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,433 - 1,43 - 2,13 + 0,079) = 31,12 \text{ kNm}$$

$$m''_{1011} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,433 - 1,43 - 2,13 + 0,079) = 15,56 \text{ kNm}$$

STUPOVI 2. KATA

$$m''_{32} = -0,6 \cdot (-0,661 - 3 - 0,612 - 0,541 + 5,87 - 1,6) = 0,326 \text{ kNm} = m''_{78}$$

$$m''_{45} = -0,299 \cdot (-0,661 - 3 - 0,612 - 0,541 + 5,87 - 1,6) = 0,163 \text{ kNm}$$

ČVOR 2

$$m'_{21} = -0,055 \cdot (-3 - 4,76 + 15,56 + 0,326) = -0,447 \text{ kNm}$$

$$m'_{23} = -0,082 \cdot (-3 - 4,76 + 15,56 + 0,326) = -0,666 \text{ kNm}$$

$$m'_{25} = -0,363 \cdot (-3 - 4,76 + 15,56 + 0,326) = -2,95 \text{ kNm}$$

ČVOR 3

$$m'_{32} = -0,115 \cdot (30 - 0,666 - 4,12 + 0,326) = -2,94 \text{ kNm}$$

$$m'_{34} = -0,385 \cdot (30 - 0,666 - 4,12 + 0,326) = -9,83 \text{ kNm}$$

ČVOR 4

$$m'_{43} = -0,249 \cdot (-30 + 40,83 - 9,83 - 0,541 + 16,78 + 0,163) = -4,33 \text{ kNm}$$

$$m'_{45} = -0,037 \cdot (-30 + 40,83 - 9,83 - 0,541 + 16,78 + 0,163) = -0,644 \text{ kNm}$$

$$m'_{47} = -0,213 \cdot (-30 + 40,83 - 9,83 - 0,541 + 16,78 + 0,163) = -3,71 \text{ kNm}$$

ČVOR 5

$$m'_{52} = -0,220 \cdot (-2,95 - 0,644 - 6,07 + 0,163 + 31,12) = -4,76 \text{ kNm}$$

$$m'_{54} = -0,025 \cdot (-2,95 - 0,644 - 6,07 + 0,163 + 31,12) = -0,540 \text{ kNm}$$

$$m'_{56} = -0,066 \cdot (-2,95 - 0,644 - 6,07 + 0,163 + 31,12) = -1,43 \text{ kNm}$$

$$m'_{58} = -0,189 \cdot (-2,95 - 0,644 - 6,07 + 0,163 + 31,12) = -4,09 \text{ kNm}$$

ČVOR 7

$$m'_{74} = -0,369 \cdot (-40,83 - 3,71 - 1,6 + 0,326) = 16,91 \text{ kNm}$$

$$m'_{78} = -0,129 \cdot (-40,83 - 3,71 - 1,6 + 0,326) = 5,91 \text{ kNm}$$

ČVOR 8

$$m'_{85} = -0,148 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,91 + 0,788 + 31,12 + 0,326) = -6,03 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,039 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,91 + 0,788 + 31,12 + 0,326) = -1,59 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,052 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,91 + 0,788 + 31,12 + 0,326) = -2,12 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,260 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,91 + 0,788 + 31,12 + 0,326) = -10,59 \text{ kNm}$$

ČVOR 10

$$m'_{108} = -0,450 \cdot (-6,67 - 10,59 + 15,56) = 0,765 \text{ kNm}$$

$$m'_{1011} = -0,045 \cdot (-6,67 - 10,59 + 15,56) = 0,077 \text{ kNm}$$

6.iteracija

STUPOVI 1. KATA

$$m''_{12} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,447 - 1,43 - 2,12 + 0,077) = 15,56 \text{ kNm}$$

$$m''_{56} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,447 - 1,43 - 2,12 + 0,077) = 31,13 \text{ kNm}$$

$$m''_{89} = -0,5 \cdot (-58,33 - 0,447 - 1,43 - 2,12 + 0,077) = 31,13 \text{ kNm}$$

$$m''_{1011} = -0,25 \cdot (-58,33 - 0,447 - 1,43 - 2,12 + 0,077) = 15,56 \text{ kNm}$$

STUPOVI 2. KATA

$$m''_{32} = -0,6 \cdot (-0,666 - 2,94 - 0,644 - 0,540 + 5,91 - 1,59) = 0,282 \text{ kNm}$$

$$m''_{45} = -0,299 \cdot (-0,666 - 2,94 - 0,644 - 0,540 + 5,91 - 1,59) = 0,141 \text{ kNm}$$

$$m''_{78} = -0,6 \cdot (-0,666 - 2,94 - 0,644 - 0,540 + 5,91 - 1,59) = 0,282 \text{ kNm}$$

ČVOR 2

$$m'_{21} = -0,055 \cdot (-2,94 - 4,76 + 15,56 + 0,282) = -0,449 \text{ kNm}$$

$$m'_{23} = -0,082 \cdot (-2,94 - 4,76 + 15,56 + 0,282) = -0,668 \text{ kNm}$$

$$m'_{25} = -0,363 \cdot (-2,94 - 4,76 + 15,56 + 0,282) = -2,96 \text{ kNm}$$

ČVOR 3

$$m'_{32} = -0,115 \cdot (30 - 0,668 - 4,33 + 0,282) = -2,91 \text{ kNm}$$

$$m'_{34} = -0,385 \cdot (30 - 0,668 - 4,33 + 0,282) = -9,73 \text{ kNm}$$

ČVOR 4

$$m'_{43} = -0,249 \cdot (-30 + 40,83 - 9,73 - 0,540 + 16,91 + 0,141) = -4,39 \text{ kNm}$$

$$m'_{45} = -0,037 \cdot (-30 + 40,83 - 9,73 - 0,540 + 16,91 + 0,141) = -0,652 \text{ kNm}$$

$$m'_{47} = -0,213 \cdot (-30 + 40,83 - 9,73 - 0,540 + 16,91 + 0,141) = -3,75 \text{ kNm}$$

ČVOR 5

$$m'_{52} = -0,220 \cdot (-2,96 - 0,652 - 6,03 + 31,13 + 0,141) = -4,76 \text{ kNm}$$

$$m'_{54} = -0,025 \cdot (-2,96 - 0,652 - 6,03 + 31,13 + 0,141) = -0,541 \text{ kNm}$$

$$m'_{56} = -0,066 \cdot (-2,96 - 0,652 - 6,03 + 31,13 + 0,141) = -1,43 \text{ kNm}$$

$$m'_{58} = -0,189 \cdot (-2,96 - 0,652 - 6,03 + 31,13 + 0,141) = -4,09 \text{ kNm}$$

ČVOR 7

$$m'_{74} = -0,369 \cdot (-40,83 - 3,75 - 1,59 + 0,282) = 16,93 \text{ kNm}$$

$$m'_{78} = -0,129 \cdot (-40,83 - 3,75 - 1,59 + 0,282) = 5,92 \text{ kNm}$$

ČVOR 8

$$m'_{85} = -0,148 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,92 + 0,765 + 31,13 + 0,282) = -6,02 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,039 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,92 + 0,765 + 31,13 + 0,282) = -1,59 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,052 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,92 + 0,765 + 31,13 + 0,282) = -2,12 \text{ kNm}$$

$$m'_{85} = -0,260 \cdot (6,67 - 4,09 + 5,92 + 0,765 + 31,13 + 0,282) = -10,58 \text{ kNm}$$

ČVOR 10

$$m'_{108} = -0,450 \cdot (-6,67 - 10,58 + 15,56) = 0,761 \text{ kNm}$$

$$m'_{1011} = -0,045 \cdot (-6,67 - 10,58 + 15,56) = 0,076 \text{ kNm}$$

Završni rad: Nora Crnić

Konačni momenti

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 2M'_{ij} + M'_{ji} + M''_{ij}$$

$$M_{12} = 0 + 2 \cdot 0 - 0,449 + 15,56 = 15,11 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 0 + 2 \cdot (-0,449) + 0 + 15,56 = 14,66 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 0 + 2 \cdot (-0,668) - 2,91 + 0,282 = -3,96 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 0 + 2 \cdot (-2,91) + 0,668 + 0,282 = -6,21 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 30 + 2 \cdot (-9,73) - 4,39 + 0 = 6,15 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = -30 + 2 \cdot (-4,39) - 9,73 + 0 = -48,51 \text{ kNm}$$

$$M_{45} = 0 + 2 \cdot (-0,652) - 0,541 + 0,141 = -1,70 \text{ kNm}$$

$$M_{54} = 0 + 2 \cdot (-0,541) - 0,652 + 0,141 = -1,59 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = 0 + 2 \cdot (-2,96) - 4,76 + 0 = -10,68 \text{ kNm}$$

$$M_{52} = 0 + 2 \cdot (-4,76) - 2,96 + 0 = -12,48 \text{ kNm}$$

$$M_{56} = 0 + 2 \cdot (-1,43) - 0 + 31,13 = 28,27 \text{ kNm}$$

$$M_{65} = 0 + 2 \cdot 0 - 1,43 + 31,13 = 29,70 \text{ kNm}$$

$$M_{47} = 40,83 + 2 \cdot (-3,75) + 16,93 + 0 = 50,26 \text{ kNm}$$

$$M_{74} = -40,83 + 2 \cdot (16,93) - 3,75 + 0 = -10,72 \text{ kNm}$$

$$M_{78} = 0 + 2 \cdot 5,92 - 1,59 + 0,282 = 10,53 \text{ kNm}$$

$$M_{87} = 0 + 2 \cdot (-1,59) + 5,92 + 0,282 = 3,02 \text{ kNm}$$

$$M_{58} = 0 + 2 \cdot (-4,09) - 6,02 + 0 = -14,20 \text{ kNm}$$

$$M_{85} = 0 + 2 \cdot (-6,02) - 4,09 + 0 = -16,13 \text{ kNm}$$

$$M_{89} = 0 + 2 \cdot (-2,12) + 0 + 31,13 = 26,89 \text{ kNm}$$

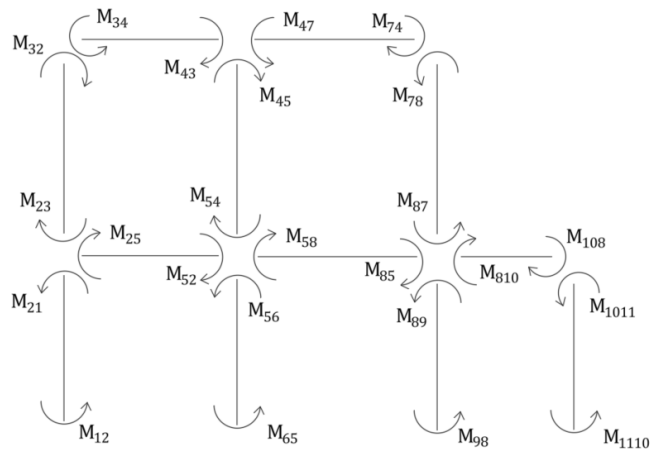
$$M_{98} = 0 + 2 \cdot 0 - 2,12 + 31,13 = 29,01 \text{ kNm}$$

$$M_{810} = 6,67 + 2 \cdot (-10,58) + 0,761 + 0 = -13,73 \text{ kNm}$$

$$M_{108} = -6,67 + 2 \cdot 0,761 - 10,58 + 0 = -15,73 \text{ kNm}$$

$$M_{1011} = 0 + 2 \cdot 0,076 + 0 + 15,56 = 15,71 \text{ kNm}$$

$$M_{1110} = 0 + 2 \cdot 0 + 0,076 + 15,56 = 15,64 \text{ kNm}$$



Slika 17.: smjerovi konačnih momenata

Provjere

- ravnoteža oko čvora

$$\sum M_{(5)} = 0$$

$$-12,48 - 1,59 + 28,27 - 14,20 = 0$$

$$0 = 0$$

- provjera poprečnih sila za prvi kat ($h_n = 5\text{m}$)

$$\sum H = \sum_{\text{iznad } n} P_h + \sum_n Q \quad Q = \frac{M_o - M_u}{h_n}$$

$$Q_1 = \frac{15,11 + 14,66}{5} = 5,95 \text{ kN}$$

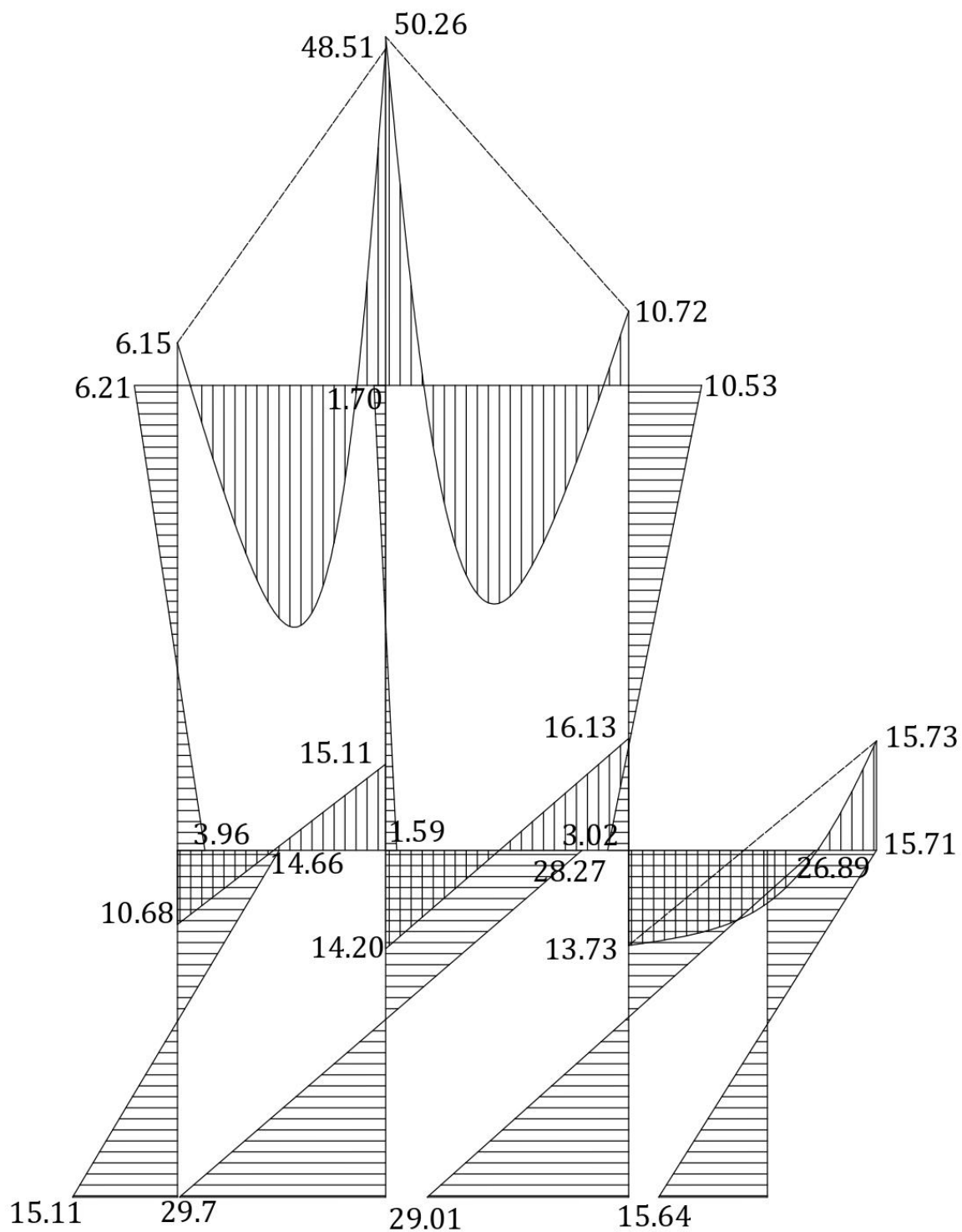
$$Q_2 = \frac{29,1 + 28,27}{5} = 11,47 \text{ kN}$$

$$Q_3 = \frac{29,01 + 26,89}{5} = 11,18 \text{ kN}$$

$$Q_4 = \frac{15,64 + 15,71}{5} = 6,27 \text{ kN}$$

$$5,95 + 11,47 + 11,18 + 6,27 = 34,87 \text{ kN} \approx 35 \text{ kN} = H$$

Provjere su zadovoljile uvjete ravnoteže.



Slika 18.: konačni M dijagram

6. ZAKLJUČAK

U radu je proveden statički proračun okvirne konstrukcije primjenom Kanijevog postupka. Kanijev se postupak, kao i Crossov (kakav se danas provodi), koristi neposrednom iteracijom prema Gauss-Seidelovoj metodi. To znači da se u svakom iteracijskom koraku upotrebljava najnovija izračunata vrijednost, umjesto da se čeka vrijednost dobivena nakon jednog koraka. Zbog toga postupak konvergira brzo i daje zadovoljavajući rezultat nakon tri do četiri (u ovom zadatku šest) koraka.

Za razliku od Crossovog postupka, u kojem bilo kakva računska pogreška kviri daljni proračun i zahtijeva računanje ispočetka, Kanijev postupak je samokorigirajući, jer se u jednadžbe za ukupne momente upisuju, u svakoj iteraciji, ukupni momenti zbog zaokreta i pomaka, a ne njihovi prirasti. Pogreška će automatski biti ispravljena, što postupak čini sigurnijim za ručni proračun.

Nadalje, Crossov postupak zahtijeva razdvajanje sustava na nepomični i pomični dio koji se zasebno računaju. Kanijev postupak uvodi u isti proračun translacijski pomak preko momenta kata M''_{ij} i zaokret preko momenata zaokreta M'_{ij} .

Vrijednosti konačnih momenata prema Kanijevom postupku dobit ćemo ako u trenutnoj i prethodnoj iteraciji imamo približne vrijednosti s minimalnim odstupanjem (uzastopna aproksimacija), dok u Crossovom postupku iteracije provodimo dok nam prirasti ne postanu zanemarivo mali.

POPIS LITERATURE

- [1] K. Fresl: *Građevna statika 2*, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, 2017. god., kolegij Građevna statika 2, Bilješke i skice s predavanja, (<https://grad.hr/nastava/ga/ga2/ga2.pdf>)
- [2] K. Fresl, P. Gidak, S. Hak: *Iz povijesti iteracijskih postupaka*, Građevinar 62 2010. (<http://www.casopis-gradjevinar.hr/arhiva/article/343>)
- [3] A. Klemenčić: Kani, Gašpar, *Hrvatski biografski leksikon*, 2026. (<https://bl.lzmk.hr/clanak/kani-gaspar>)
- [4] M. Anđelić: *Građevna statika 2*, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb, 2005.
- [5] V. Vagner i H. Ram: *Praktična građevinska statika, dio 4, drugo izdanje*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [6] C. S. Reddy: *Basic Structural Analysis*, McGraw-Hill, New Delhi, 1987.
- [7] V. Vagner i G. Erlhof: *Praktična građevinska statika, dio 3*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
- [8] V. Simović: Kani, Gašpar, *Leksikon građevinarstva* (ur. V. Simović), Masmedia, Zagreb, 2002.

POPIS SLIKA

Slika 1.: greda pod poprečnim opterećenjem (Izvor: [6])	13
Slika 2.: deformacija grede od rotacije krajeva (Izvor: [6])	13
Slika 3.: obostrano upeti element AB (Izvor: [6])	14
Slika 4.: zaokret kraja A (Izvor: [6])	14
Slika 5.: zaokret kraja B (Izvor: [6])	15
Slika 6.: višekratni okvir (Izvor: [6])	16
Slika 7.: greda AB unutar okvira (Izvor: [6])	17
Slika 8.: greda AB s porečnim pomacima u točkama A i B (Izvor: [6])	19
Slika 9.: greda AB čija os simetrija prolazi kroz središte (Izvor: [6])	21
Slika 10.: zaokret krajeva A i B na elementu AB (Izvor: [6])	22
Slika 11.: element AB sa zadanim rubnim uvjetima (Izvor: [6])	22
Slika 12.: višekratni okvir (Izvor: [6])	24
Slika 13.: vertikalni element AB unutar okvira (Izvor: [6])	24
Slika 14.: višekratni okvir pod horizontalnim opterećenjem (Izvor: [6])	27
Slika 15.: nepomični okvir s dvije etaže	34
Slika 16.: momenti translacije i rotacije	48
Slika 17.: smjerovi konačnih momenata	50
Slika 18.: konačni M dijagram	51