



Sveučilište u Zagrebu
GRAĐEVINSKI FAKULTET

IVAN LALE

GRAFOSTATIKA SCHWEDLEROVE KUPOLE

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2026.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

IVAN LALE

GRAPHICAL STATICS OF SCHWEDLER'S DOME

FINAL EXAM

Supervisor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2026.

Sažetak

Rad se bavi statičkom i geometrijskom analizom Schwedlerovih kupola 1. i 2. vrste. Opisuju se sličnosti i razlike u simetriji te načinima sklapanja kupola 1. i 2. vrste. Također se opisuju metode uravnoteženja točke koje se primjenjuju u statički sustavi točaka u prostoru, odnosno na Schwedlerovoj kupoli. Posebna je pozornost posvećena slučaju u kojem su svi čvorovi kupole opterećeni jednakim vertikalnim silama po pojedinom prstenu. Glavna teza rada dokazuje da pri vertikalnom opterećenju čvorova horizontalnih prstenova sile u dijagonalnim štapovima poprimaju vrijednost nula, čime se proračun cjelokupne kupole svodi na analizu jednoga meridijalnog sklopa kao ravninske rešetke. Ovisno o rasporedu opterećenja po etažama, analizirat će se preraspodjela tlačnih i vlačnih sila u prstenastim štapovima. Dobiveni rezultati objašnjavaju fizikalno ponašanje masivnih zidanih kupola te nastanak meridijalnih pukotina u njihovim donjim zonama zbog vlačnih naprezanja.

Ključne riječi: Schwedlerova kupola, prostorna rešetka, uravnoteženje čvora, dijagonalni štap, ravninska rešetka, vlačno naprezanje.

Summary

The final paper deals with the static and geometric analysis of type 1 and type 2 Schwedler domes. It describes the similarities and differences regarding symmetry and assembly methods for both types of domes. Furthermore, it outlines nodal equilibrium methods applied to the statics of spatial systems, specifically the Schwedler dome. Special attention is given to the case where all dome nodes are subjected to equal vertical loads within each individual ring. The paper demonstrates that, under vertical loading of the horizontal ring nodes, the forces in the diagonal members become zero; consequently, the analysis of the entire dome simplifies to the analysis of a single meridional assembly modeled as a planar truss. Depending on the load distribution across the tiers, the redistribution of compressive and tensile forces within the ring members is analyzed. The results explain the physical behavior of massive masonry domes and the formation of meridional cracks in their lower zones due to tensile stresses.

Keywords: Schwedler dome, spatial truss, nodal equilibrium, diagonal member, planar truss, tensile stress.

Sadržaj

Sažetak	i
Summary	ii
Sadržaj.....	iii
1. Uvod	1
2. Schwedlerove kupole	3
2.1. Nastanak Schwedlerove kupole 1. vrste	4
2.2. Nastanak Schwedlerove kupole 2. vrste	6
3. Uravnoteženje točke	7
3.1. Prvi način: Dvostupanjsko rastavljanje pomoću pomoćne ravnine i presječnice.....	8
3.2. Drugi način: Izravna konstrukcija lanca sila u prostoru sila (svođenje na transverzalu)	10
3.3. Treći način: Metoda probodišta ravnine i pravca u prostoru sila	11
4. Statika sistema točaka u prostoru	13
4.1. Posebni slučajevi uravnoteženja točke prostorne rešetke	13
4.2. Primjer redoslijeda rješavanja čvorova Schwedlerove kupole	14
5. Jednake vertikalne sile u čvorovima	18
5.1. Dokaz izostanka sila u dijagonalnim štapovima Schwedlerove kupole 1. vrste	18
5.2. Dokaz izostanka sila u dijagonalnim štapovima Schwedlerove kupole 2. vrste (1. način).....	19
5.3. Dokaz izostanka sila u dijagonalnim štapovima Schwedlerove kupole 2. vrste (2. način).....	21
5.4. Rješavanje jednog meridijalnog sklopa kao ravninske rešetke.....	23
6. Primjeri.....	26
6.1. Primjer 1	27
6.2. Primjer 2	31
7. Zaključak.....	35
Popis literature	36
Popis slika.....	37

Schwedlerove kupole mogu se podijeliti u kupole 1. vrste i kupole 2. vrste. Njihova je glavna razlika raspored štapova i način prijenosa opterećenja, što utječe na njihovo statičko ponašanje. Određivanje unutarnjih sila u pojedinim elementima konstrukcije omogućuje se raznim analizama koje se temelje na načelima statike prostornih sistema točaka i grafostatičkim metodama.

Glavni je cilj ovog rada opisati kupole 1. i 2. vrste te detaljnije objasniti uravnoteženje točke i statiku sistema točaka u prostoru. Poseban naglasak bit će na specifičnom slučaju u kojem su svi čvorovi prstena opterećeni jednakim silama, što će u konačnici biti potvrđeno na konkretnom primjeru.

2. Schwedlerove kupole

Prostorni rešetkasti nosači nastaju nadograđivanjem ravninskih rešetaka uz uvjet da se njihovi štapovi i čvorovi ne nalaze u jednoj ravnini [1]. Takva geometrija ovim sustavima daje sposobnost preuzimanja vanjskih opterećenja koja djeluju u bilo kojem smjeru. Za razliku od monolitnih ili punostijenih kupola (koje se analiziraju kao plošne ljuske), Schwedlerova se kupola svrstava u štapne sustave u kojima se spojevi štapova u čvorovima promatraju kao kuglasti zglobovi (u teoriji dopuštaju zaokrete oko bilo koje osi; slika 2.) [1].

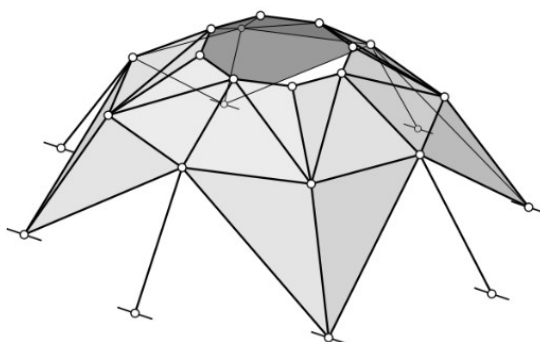


Slika 2.: Kuglasti zglobovi (Izvor: [1])

Da bi neki čvor u prostoru bio geometrijski nepromjenjiv, odnosno nepomičan, treba ga vezati za podlogu ili za već postojeći stabilni podsustav s najmanje tri zglobna štapa [1]. Važno je napomenuti da se osi tih zglobnih štapova ne smiju nalaziti u istoj ravnini; u protivnom čvor ostaje geometrijski promjenjiv. Nužan, ali ne i dovoljan uvjet statičke određenosti prostornih rešetaka s n čvorova može se izraziti Maxwellovim pravilom

$$b = 3n$$

gdje b predstavlja ukupni potreban broj zglobnih štapova [1]. Geometrijski gledajući, Schwedlerova kupola se sastoji od horizontalnih prstenova, vertikalnih ili nagnutih meridijalnih štapova i dijagonalnih štapova koji osiguravaju krutost pojedinih polja (slika 3.) [1].

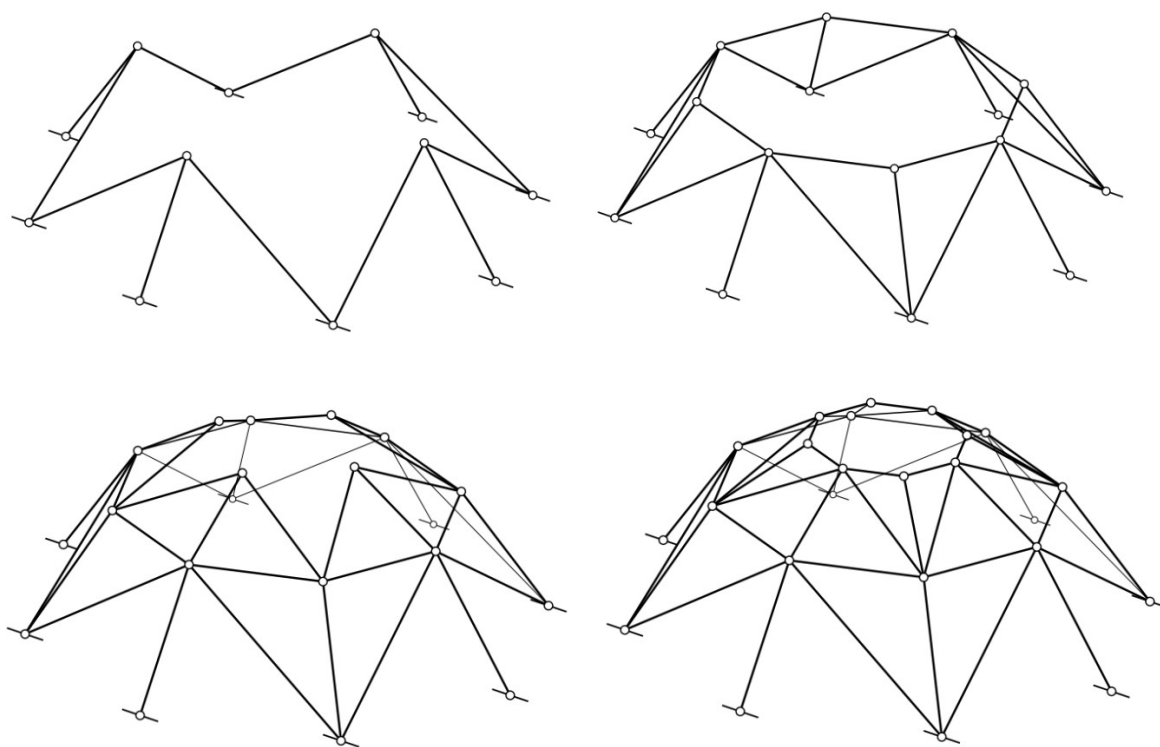


Slika 3.: Schwedlerova kupola 1. vrste (Izvor: [1])

2.1. Nastanak Schwedlerove kupole 1. vrste

Schwedlerova kupola prve vrste nastaje primjenom drugog elementarnog postupka sklapanja prostornih rešetkastih konstrukcija [1]. Taj se postupak temelji na tome da se svaki čvor postupno spaja s već sastavljenim geometrijski nepromjenjivim sustavom pomoću triju štapova (slika 4.) [1]. Važno je napomenuti da osi tih štapova ne smiju biti u istoj ravnini jer ako taj uvjet nije zadovoljen onda nema prostorne stabilnosti konstrukcije, odnosno dolazi do nastanka mehanizma. Navedenim postupkom se svakim novim korakom proširuje postojeći sustav, uz zadržavanje njegove geometrijske nepromjenjivosti.

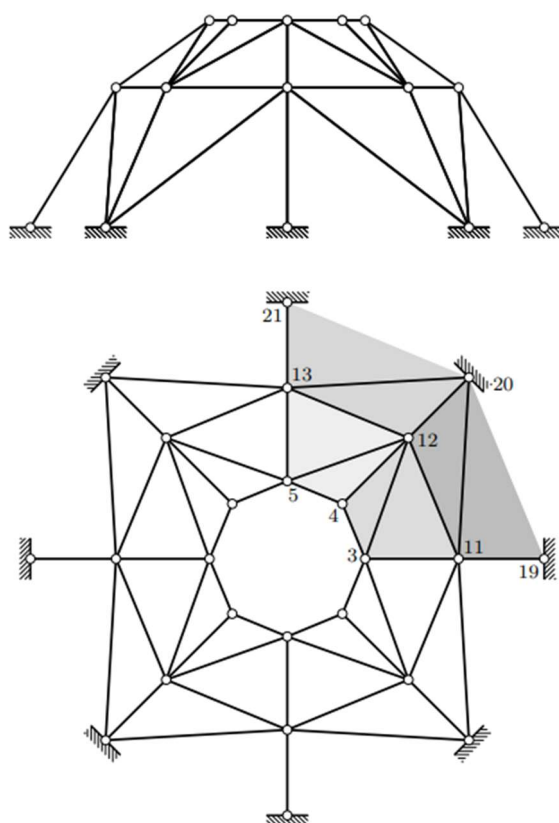
Postupak sklapanja započinje definiranjem početnog stabilnog podsustava koji uključuje ležajeve [1]. Nakon toga dodaju se novi čvorovi koji se na postojeći sustav spajaju preko tri pravilno raspoređena štapa [1]. Svaki novopostavljeni čvor se na ovaj način odmah uključuje u stabilni prostorni sustav, što znači da konstrukcija tijekom cijelog postupka zadržava svoju stabilnost i nosivost [1].



Slika 4.: Nastajanje Schwedlerove kupole 1. vrste drugim elementarnim postupkom (Izvor: [1])

Osim postupnim dodavanjem čvorova (drugi elementarni postupak), Schwedlerova kupola 1. vrste se u geometrijskom i nosivom smislu može analizirati primjenom trećeg elementarnog postupka, odnosno kao sklop međusobno povezanih ravninskih rešetkastih sustava [1]. Takvim pristupom razmatra se međudjelovanje, odnosno interakcija ravninskih komponenata prostornog sustava [1]. Da bi postupak bio valjan bitno je da svaka ravninska rešetka od koje

se kupola sastoji bude geometrijski nepromjenjiva unutar vlastite ravnine te da svaki zglobni čvor cjelokupnog prostornog sustava pripada ravninama dviju različitih ravninskih rešetaka [1]. Krutost kupole putem trećeg elementarnog postupka može se dokazati analizom vektora pomaka njezinih čvorova. Naime, potencijalni vektor pomaka nekog čvora može se prikazati kao vektorski zbroj dviju komponenata od kojih svaka leži u jednoj od dviju ravnina rešetki kojima taj čvor pripada [1]. S obzirom na to da su obje ravninske rešetke kojima pripada promatrani čvor nepomične u svojim ravninama, i sam je čvor nepomičan, odnosno stabilan u prostoru [1]. Drugim riječima, obje ravninske komponente pomaka jednake su nuli, što znači da njihov vektorski zbroj također mora iznositi nula [1].



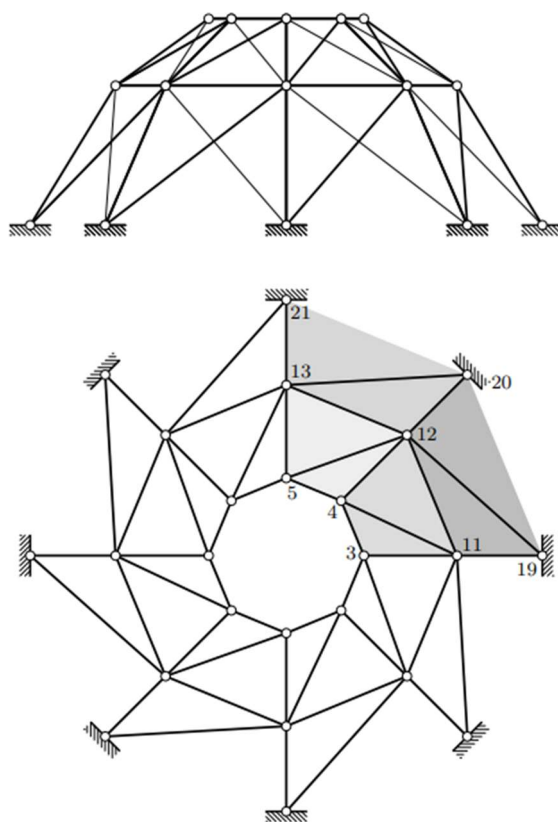
Slika 5.: Analiza kupole 1. vrste trećim elementarnim postupkom (Izvor: [1])

Primjerice, na slici 5. vidljivo je da se čvor 12 nalazi na štapu 12-20 koji je zajednički brid ravninskih rešetaka 11-19-20-12 i 12-20-21-13. Budući da su obje rešetke u vlastitim ravninama nepomične, štap 12-20, a s njim i čvor 12, ostaju prostorno pridržani [1].

Formiranje Schwedlerove kupole 1. vrste isključivo je moguće s parnim brojem meridijana (n), što se može zaključiti iz slike 5. Kod takve geometrije konstrukcija ima vertikalne ravnine simetrije koje prolaze kroz meridijalne štapove, što daje ukupno $n/2$ ravnina simetrije (npr., kupola od 8 meridijana sadrži 4 ravnine simetrije) [1].

2.2. Nastanak Schwedlerove kupole 2. vrste

Schwedlerova kupola 2. vrste (slika 6.), za razliku od kupole 1. vrste, ne može se sklopiti postupnim dodavanjem čvorova (drugim elementarnim postupkom). Razlog tomu jest to što ne postoji nijedan čvor koji je sa samo tri štapa vezan za podlogu ili ostatak sustava [1]. Takav sustav može se definirati i analizirati kao sklop međusobno povezanih ravninskih rešetaka (trećim elementarnim postupkom), na isti način kako je prije opisano. Važno je napomenuti da je u kupoli 2. vrste prisutna rotacijska simetrija kojoj je uzrok drukčiji raspored dijagonala u sustavu. Zbog takve geometrije kupola 2. vrste može imati i paran i neparan broj meridijana, dok kupola 1. vrste može imati samo paran broj meridijana [1].



Slika 6.: Schwedlerova kupola 2. vrste (Izvor: [1])

Za kupolu 2. vrste s parnim brojem meridijana možemo reći da je nastala iz kupole 1. vrste zamjenom pojedinih dijagonalnih štapova. Određeni dijagonalni štapovi se uklanjaju i zamjenjuju suprotno nagnutim dijagonalnim štapovima. Primjerice, na slici 6. štapovi (3, 12) i (11, 20) zamjenjuju se štapovima (4, 11) i (12, 19). Takvom zamjenom narušava se sustav zrcalnih ravnina simetrije te se dobiva sustav koji poprima rotacijsku simetriju. Iako je promijenjen raspored dijagonala, ukupan broj štapova ostaje isti, te i dalje zadovoljava uvjet statičke određenosti $b = 3n$ [1].

3. Uravnoteženje točke

U općem slučaju prostorne se rešetkaste konstrukcije, poput Schwedlerove kupole, rješavaju metodom čvorova, u kojoj se ravnoteža cijele konstrukcije svodi na postupno rješavanje pojedinačnih prostornih čvorova. Da bi se pristupilo takvom načinu rješavanja kupole, bitno je razumjeti kako se vanjska opterećenja i sile u štapovima uravnotežuju u jednoj prostornoj točki.

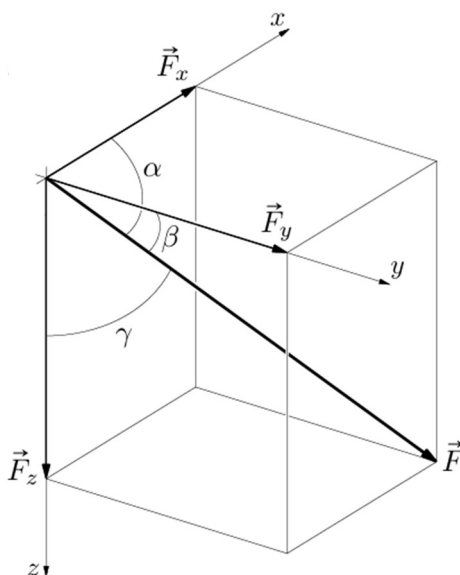
Sila je fizikalna veličina kojom se opisuje međusobno djelovanje tijela na kvantitativnoj i kvalitativnoj razini [2]. Za neku silu možemo reći da je koncentrirana ako je njeno područje djelovanja sažeto u jednu točku zvanu *hvatište* [2]. Koncentrirana sila je vektorska veličina potpuno određena svojim intenzitetom, pravcem djelovanja i orijentacijom [2]. Za algebarsku analizu u trodimenzionalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu, sila F prikazuje se rastavljanjem u tri međusobno okomite vektorske komponente koje su usporedne s koordinatnim osima (slika 7.):

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

gdje su F_x , F_y i F_z skalarne komponente sile jednake ortogonalnim projekcijama sile na odgovarajuće koordinatne osi [2]. Intenzitet sile se može izračunati izrazom:

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)}$$

Pravac djelovanja sile određuje se smjernim kutovima α , β i γ koje orijentirani pravac zatvara s osima x , y i z . Kutove α , β i γ povezuje relacija: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ [2].



Slika 7.: Rastavljanje sile u međusobno okomite komponente, usporedne s osima Kartezijeva koordinatnog sustava (Izvor: [2])

Za neku materijalnu točku izloženu djelovanju sustava od n koncentriranih sila možemo reći da se nalazi u stanju mirovanja (statičke ravnoteže) ako i samo ako je vektorski zbroj svih sila koje djeluju na nju jednak nul-vektoru:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad [2].$$

Zbog toga sile uravnoteženja moraju imati jednake intenzitete i pravce djelovanja kao i komponente rastava, ali *suprotne smjerove (orijentacije)* [2]. U geometrijskom smislu, ovaj uvjet znači da je poligon sila zatvoren, odnosno da vršak posljednje sile pada točno u početnu točku prve sile.

S obzirom na to da su jedinični vektori koordinatnih osi i, j, k linearno neovisni, algebarski gledano, vektorska jednadžba ravnoteže ekvivalentna je sustavu skalarnih jednadžbi ravnoteže. U trodimenzijskom prostoru to su [2]:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0;$$

a u dvodimenzijskoj ravnini to su [2]:

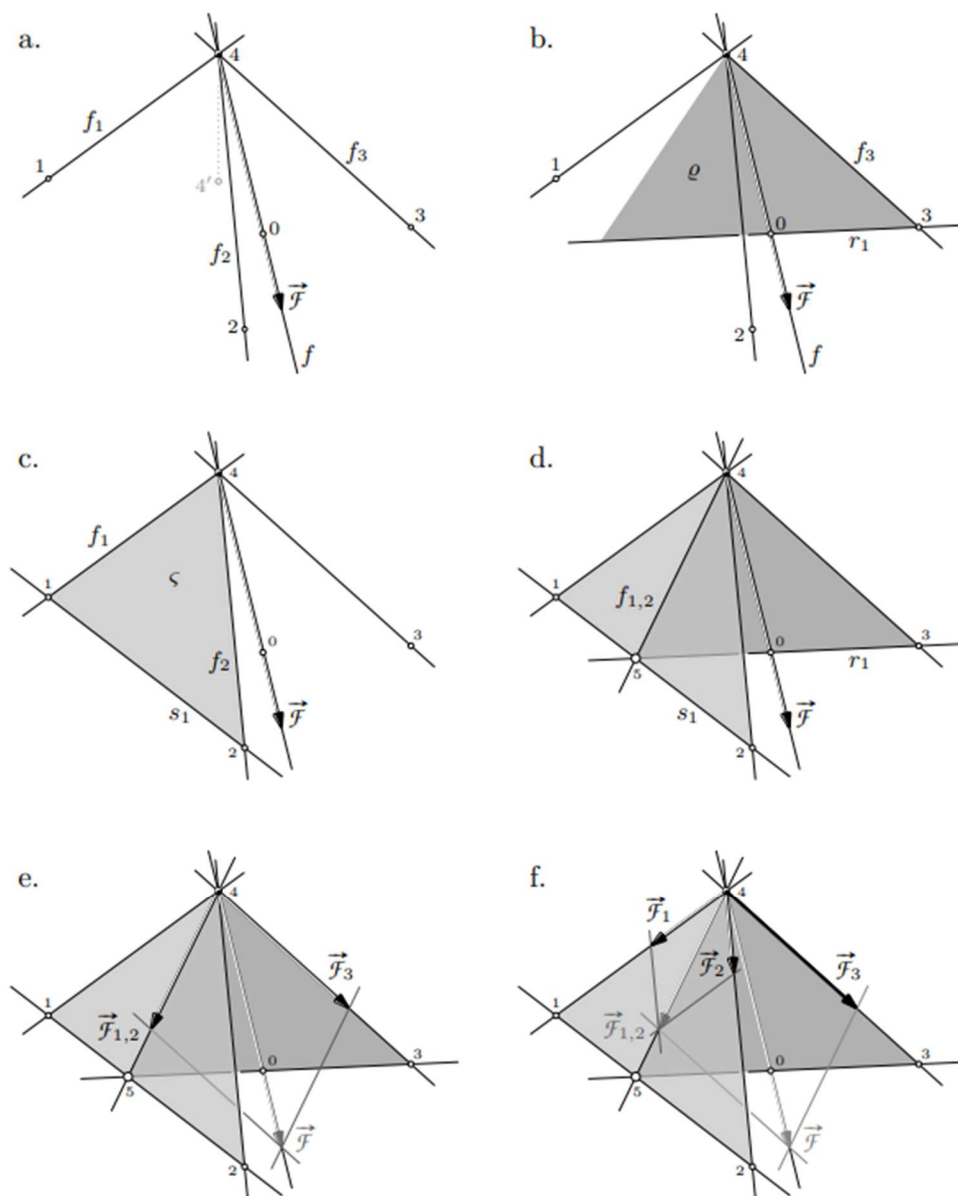
$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0.$$

U nastavku ove cjeline opisat ćemo tri načina rastavljanja sile u tri komponente, odnosno tri načina uravnoteženja sile trima silama.

3.1. Prvi način: Dvostupanjsko rastavljanje pomoću pomoćne ravnine i presječnice

Ovaj postupak opisat ćemo na primjeru sile $\vec{F}$ koja djeluje na pravcu f . Traže se komponente na nekomplanarnim pravcima f_1, f_2, f_3 sa zajedničkim hvatištem (slika 8.).

Za početak konstruiramo ravninu ϱ određenu pravcima f i f_3 te ravninu ς određenu pravcima f_1 i f_2 [3]. Kao što je vidljivo na slici 8.b i 8.c obje ravnine prolaze hvatištem sile te kako bi se odredilo njihovo sjecište treba pronaći njihovu drugu zajedničku točku [3]. Ta je točka sjecište njihovih tragova na referentnoj ravnini π_1 [3]. Spajanjem tih dviju točaka dobivamo pravac $f_{1,2}$ koji je presječnica ravnina ϱ i ς (slika 8.d) [3]. U prvom koraku se u ravnini ϱ zadana sila $\vec{F}$ rastavlja u trokutu sila na komponentu $\vec{F}_3$ uzduž pravca f_3 i na komponentu $\vec{F}_{1,2}$ uzduž pravca $f_{1,2}$ [3]. Drugi korak isti je kao i prvi, samo što ovog puta u ravnini ς rastavljamo komponentu $\vec{F}_{1,2}$ u novom trokutu sila na konačnu komponentu $\vec{F}_1$ uzduž pravca f_1 te komponentu $\vec{F}_2$ uzduž pravca f_2 [3].



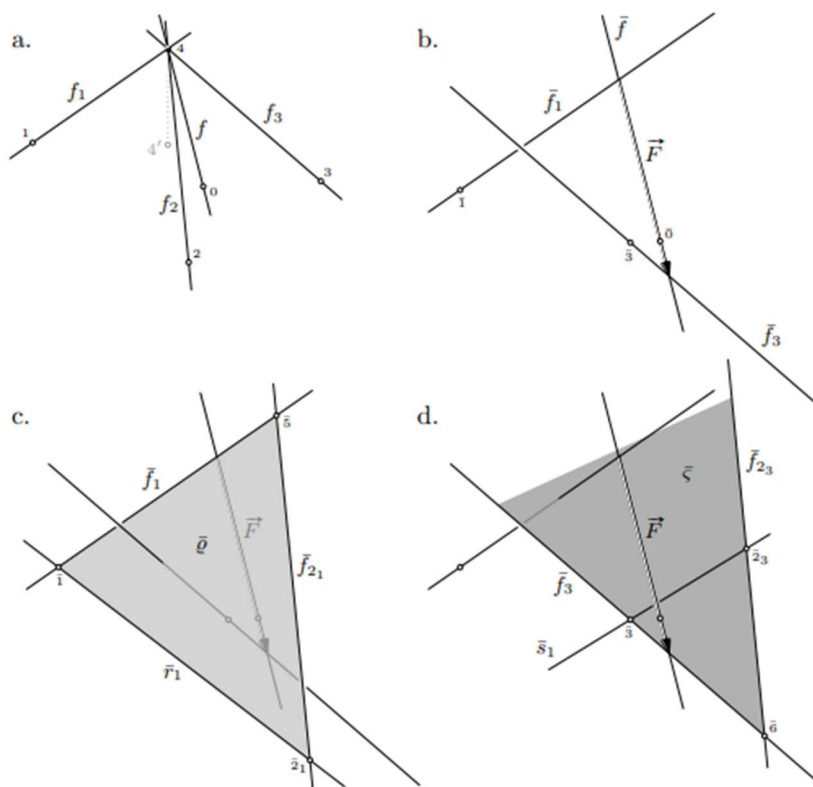
Slika 8.: Dvostupanjsko rastavljanje pomoću pomoćne ravnine i presječnice prikazano u kosoj aksonometriji (Izvor: [3])

Ovim postupkom smo rastavili silu F na tri nekomplanarna pravca, a da bismo dobili sile uravnoteženja, smjerovi vektora $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ u poligonu sila jednostavno se okrenu u suprotnom smjeru. Time poligon sila postaje zatvoren, odnosno vektorske strelice teku u neprekinutom slijedu.

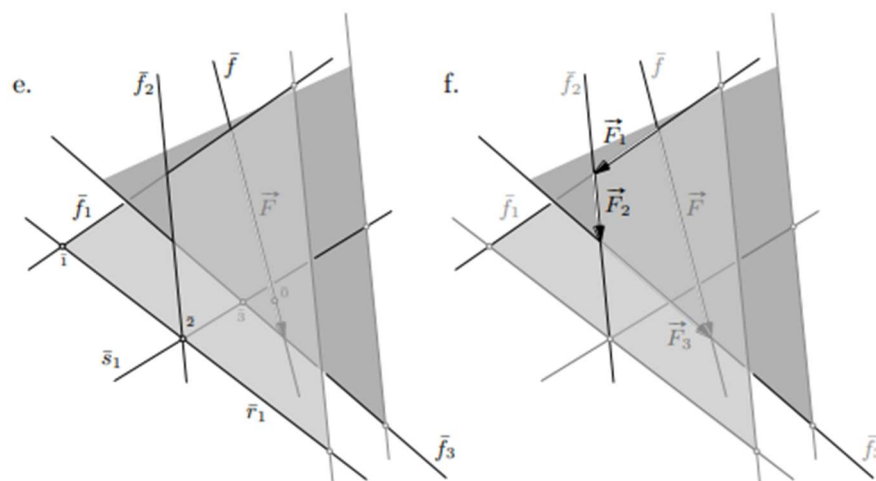
3.2. Drugi način: Izravna konstrukcija lanca sila u prostoru sila (svođenje na transverzalu)

U drugom se postupku za razliku od prvog ne određuje pomoćna komponenta $\vec{F}_{1,2}$ u planu položaja, već se postupak izvodi u prostoru sila traženjem odgovarajuće transverzale mimosmjernih pravaca [3].

Promatrajući sliku 9. možemo vidjeti da su dvije ključne točke u prostoru sila početak i vrh sile $\vec{F}$. Kroz početnu točku sile $\vec{F}$ povuče se pravac $\bar{f}_1$ koji je paralelan s pravcem f_1 , a kroz vrh sile $\vec{F}$ povuče se pravac $\bar{f}_3$ koji je paralelan s pravcem f_3 (slika 9.b) [3]. Pravci f_1, f_2 i f_3 u prostoru općenito nisu u istoj ravnini, stoga su konstruirani pravci $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ u prostoru sila *mimosmjerni*. Za formiranje neprekinutog lanca, potrebno je pronaći pravac $\bar{f}_2$ koji je paralelan s pravcem f_2 i siječe oba mimosmjerna pravca $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_3$ [3]. Da bismo to postigli, konstruiramo dvije pomoćne ravnine u prostoru sila. Prva ravnina $\bar{q}$ sadrži pravac $\bar{f}_1$ i proizvoljni pravac $\bar{f}_{2,1}$ koji je paralelan s pravcem f_2 i siječe pravac $\bar{f}_1$ (slika 9.c) [3]. Druga ravnina $\bar{\zeta}$ sadrži pravac $\bar{f}_3$ i proizvoljni pravac $\bar{f}_{2,3}$ koji je paralelan s pravcem f_2 i siječe pravac $\bar{f}_3$ (slika 9.d) [3]. Presječna tih dviju ravnina daje traženi pravac $\bar{f}_2$ (slika 9.e) [3]. Ovime su zadovoljeni svi uvjeti za formiranje lanca sila. Sjecište pravaca $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_2$ označava kraj sile $\vec{F}_1$ i početak sile $\vec{F}_2$, a sjecište $\bar{f}_2$ i $\bar{f}_3$ označava kraj sile $\vec{F}_2$ i početak sile $\vec{F}_3$ (slika 9.f) [3].



Slika 9. (nastavak na idućoj stranici)



Slika 9. (nastavak s prethodne strane): Izravna konstrukcija lanca sila u prostoru sila u aksonometrijskom prikazu (Izvor: [3])

Statičku ravnotežu ćemo postići ako u lancu sila obrnemo orijentacije vektora $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, čime dobivamo zatvoreni prostorni četverokut sila s 3 uravnotežujuće sile.

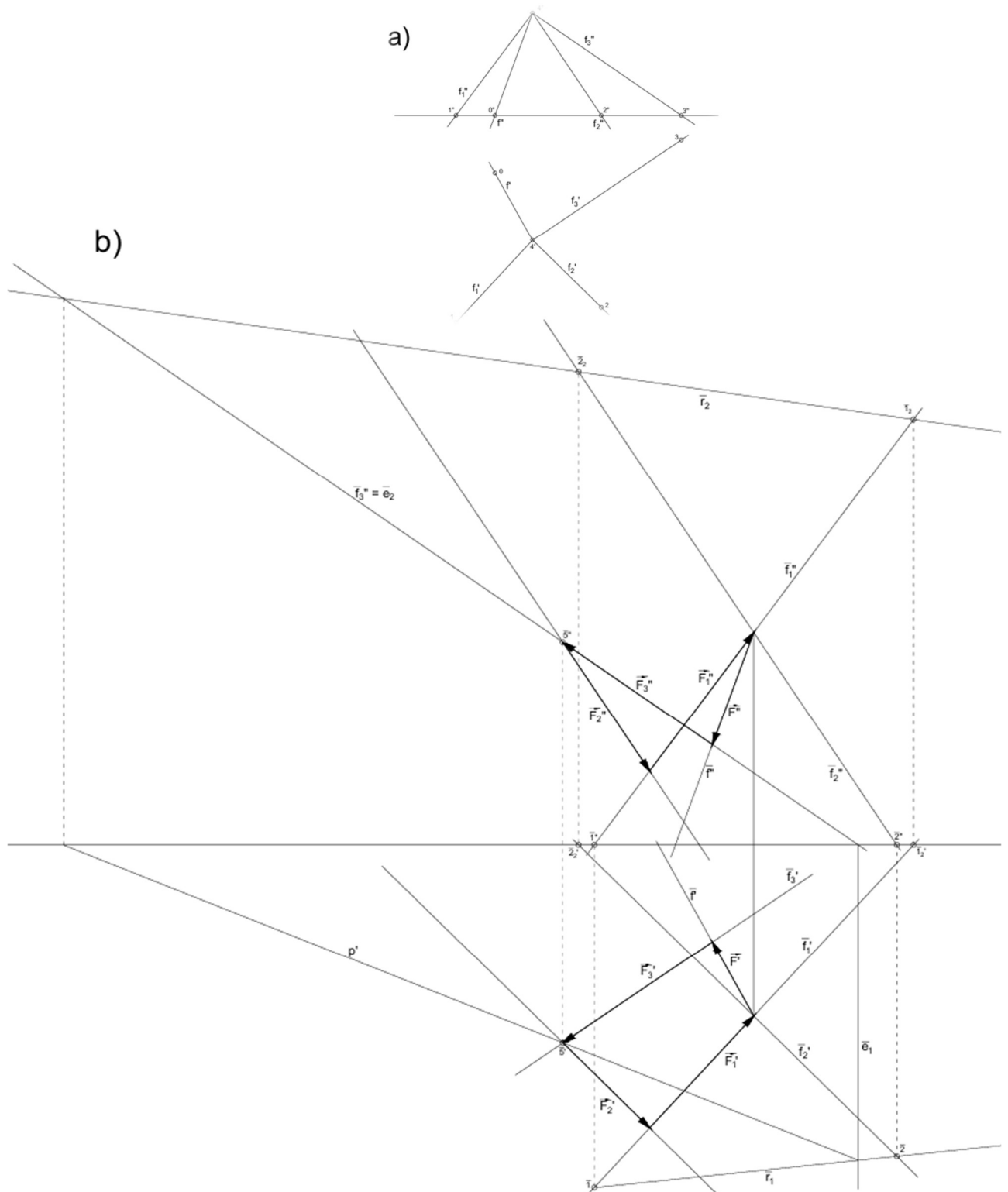
3.3. Treći način: Metoda probodišta ravnine i pravca u prostoru sila

Treći način se kao i drugi način odvija u prostoru sila, ali se kao i u prvom načinu vraćamo na zbroj $\vec{F}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, samo bez crtanja te sile. U ovom ćemo načinu direktno preći na uravnoteženje sile (u prethodna dva načina smo objasnili rastavljanje sile na komponente kojima bi na kraju postupka obrnuli smjer), odnosno sile ćemo promatrati u obrnutom smjeru od početka.

Krajnja točka sile $\vec{F}_{1,2}$ se nalazi u početnoj točki sile $\vec{F}$. Zbog toga će se u prostoru sila nalaziti u ravnini $\bar{q}$, ravnini razapetoj pravcima $\bar{f}_1$ i $\bar{f}_2$ (paralelnim s f_1 i f_2). Također, znamo da u vrhu vektora $\vec{F}$ počinje komponenta $\vec{F}_3$ te na temelju toga kroz vrh vektora $\vec{F}$ povlačimo pravac $\bar{f}_3$ (paralelan s f_3). Ključan korak u ovom postupku je određivanje probodišta pravca $\bar{f}_3$ s ravninom $\bar{q}$. Dobiveno probodište početak je pomoćnog vektora $\vec{F}_{1,2}$ i kraj vektora $\vec{F}_3$ koji započinje u krajnjoj točki sile $\vec{F}$. Preostalo je još odrediti komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Njih određujemo tako da provučemo pravac $\bar{f}_{2,1}$ (paralelan s $\bar{f}_2$) kroz dobiveno probodište tako da siječe pravac $\bar{f}_1$. Komponenta $\vec{F}_1$ ležat će na pravcu $\bar{f}_1$ i protezati se od sjecišta pravaca $\bar{f}_{2,1}$ i $\bar{f}_1$ do početne točke sile $\vec{F}$, dok će se od prethodno dobivenog probodišta do navedenog sjecišta protezati komponenta $\vec{F}_2$.

U Mongeovu dvocrtnom postupku (slika 10.) probodište pravca $\bar{f}_3$ i ravnine $\bar{q}$ odredili smo pomoću druge projicirajuće ravnine $\bar{e}$. Budući da se u nacrtu sve u toj ravnini projicira u njezin

drugi trag, vrijedi da je $\bar{e}_2 = \bar{f}_3'' = \bar{p}'$, gdje je p presječnica ravnina $\bar{e}$ i $\bar{q}$. Tlocrt presječnice $\bar{p}'$ prolazi kroz sjecište tragova ravnina $\bar{e}_1$ i $\bar{r}_1$ te kroz tlocrt njihova drugog sjecišta. Tlocrt traženog probodišta dobiva se kao sjecište tlocrta presječnice $\bar{p}'$ i pravca $\bar{f}_3$.



Slika 10.: Mongeov postupak za uravnoteženje sile metodom probodišta ravnine i pravca u prostoru sila

4. Statika sistema točaka u prostoru

Kod sustava sastavljenog od više povezanih materijalnih točaka ili krutog tijela u prostoru, osim zbroja sila, treba promatrati i međusobne prostorne odnose sila. Sile koje djeluju na sustav dijele se na *vanjske sile* (npr. opterećenja, reaktivne sile oslonca) i *unutarnje sile* (npr. uzdužne sile u štapovima rešetke) [2]. Treći Newtonov zakon (zakon akcije i reakcije) potvrđuje nam da se unutarnje sile između bilo koje dvije točke sustava javljaju u parovima jednakih intenziteta, suprotnih smjerova i na istom pravcu. Iz tog razloga vektorski zbroj svih unutarnjih sila kao i zbroj svih momenata unutar sustava jednak je nuli. Zaključno, može se reći da na uvjete ravnoteže cjelokupnog sustava utječu isključivo vanjske sile [2].

U statičkoj analizi Schwedlerova kupola se promatra kao sistem prostornih točaka (čvorova) međusobno povezanih zglobnim štapovima. Budući da opterećenje djeluje samo u čvorovima i da su štapovi zglobno spojeni, u svim štapovima mogu se javiti samo uzdužne sile [4]. Kod rješavanja takvog sustava najvažniji je redoslijed rješavanja čvorova. U svakom koraku nužno je odabrati čvor u kojem su najviše tri štapa s nepoznatim unutarnjim silama [4].

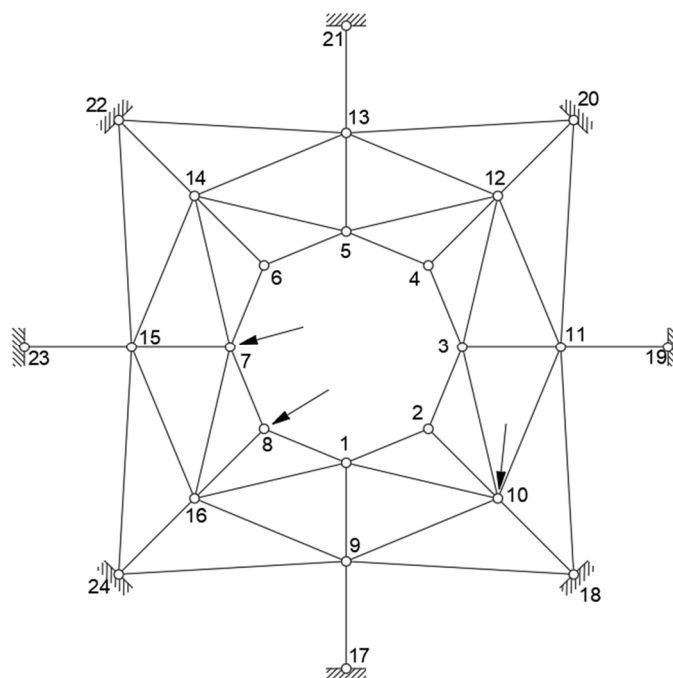
4.1. Posebni slučajevi uravnoteženja točke prostorne rešetke

Prije samog rješavanja sustava, korisno je znati neka opća načela ravnoteže čvora prostorne rešetke:

- 1) Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako na njega ne djeluje sila, vrijednosti sila u sva tri štapa jednake su nuli [4].
- 2) Ako na čvor u kojem su spojena tri štapa nekomplanarnih osi djeluje vanjska sila čiji pravac djelovanja ne leži ni u jednoj od ravnina koje tvore parovi štapova, sile u sva tri štapa su različite od nule [4].
- 3) Ako vanjska sila djeluje u ravnini koju razapinju osi dvaju štapova bez da se poklapa s osima tih štapova, u ta se dva štapa javljaju sile različite od nule, dok je sila u trećem štapu koji nije u toj ravnini jednaka nuli [4].
- 4) Ako vanjska sila djeluje na osi jednog štapa, u tom štapu se javlja sila jednakog intenziteta i suprotne orijentacije, dok su sile u ostala dva štapa jednake nuli [4].
- 5) Ako se u čvoru sastaju četiri štapa od kojih tri leže u istoj ravnini, a četvrti izlazi iz nje, i ako na čvor ne djeluje sila, sila u četvrtom štapu jednaka je nuli [4].

Navedena načela mogu se primjenjivati i na čvorove s pet ili više štapova, uz uvjet da su sile u svim osim u tri poznate. To je moguće jer rezultanta poznatih sila iz ostalih štapova preuzima ulogu vanjske sile za rješavanje ostala tri štapa [4].

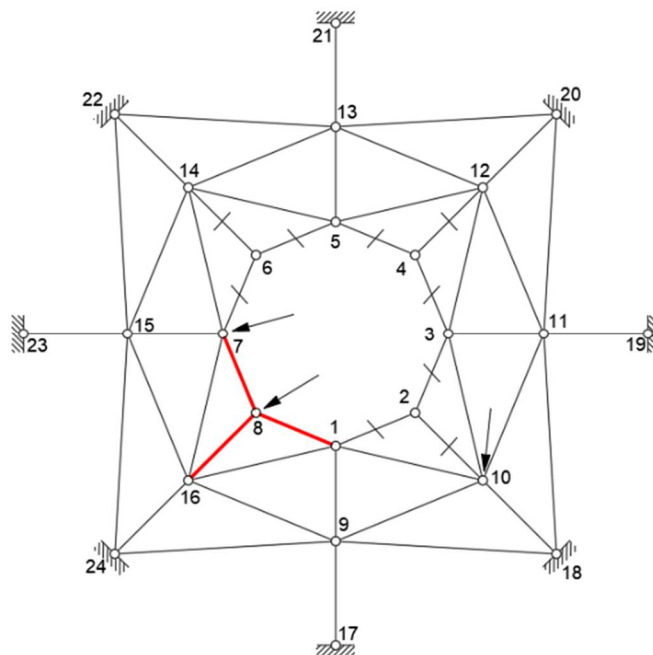
4.2. Primjer redoslijeda rješavanja čvorova Schwedlerove kupole



Slika 11.: Schwedlerova kupola 1. vrste opterećena u tri čvora

Na slici 11. prikazana je Schwedlerova kupola 1. vrste na koju djeluju tri vanjske sile. Postupak započinjemo u čvorovima gornjega prstena, ali samo onim čvorovima u kojima se sastaju po tri štapa (čvorovi 2, 4, 6 i 8).

Na čvor 8 djeluje vanjska sila čiji se pravac djelovanja ne nalazi ni u jednoj od ravnina koje tvore parovi štapova, tako da na temelju postavke 2. možemo zaključiti da će vrijednosti sila u štapovima $\{7,8\}$, $\{1,8\}$ i $\{8,16\}$ biti različite od nule (slika 12.).



Slika 12.: Rješavanje čvorova u koje su priključena samo tri štapa

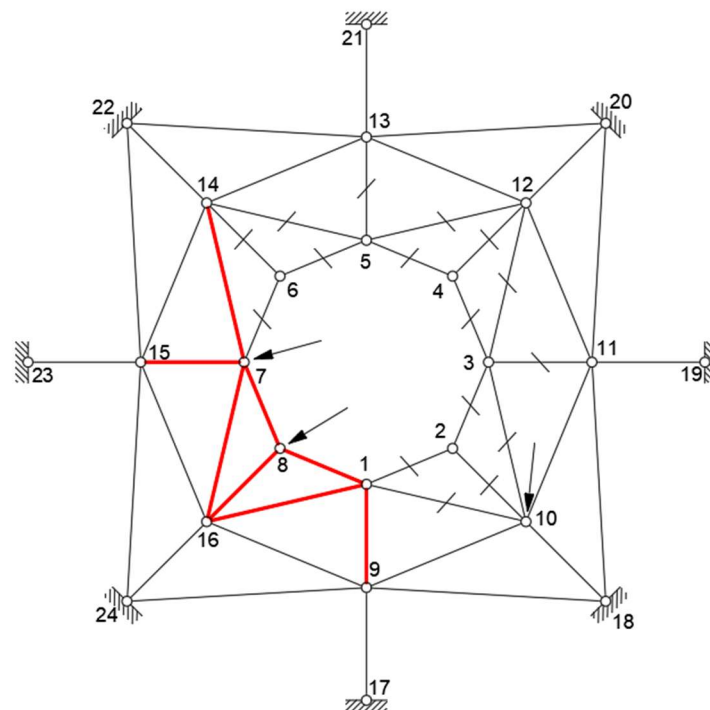
Na čvorove 2, 4 i 6 ne djeluje vanjsko opterećenje, što prema 1. postavci znači da su vrijednosti sile u štapovima $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,10\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{4,12\}$, $\{5,6\}$, $\{6,7\}$ i $\{6,14\}$ jednake nuli (slika 12.).

U čvorovima 1, 3, 5 i 7 se sastaje po pet štapova, no kako smo već u prethodnom koraku odredili jesu li vrijednosti sile gornjeg prstena jednake nuli ili različite od nje, preostaju nam samo tri štapa po čvoru u kojima trebamo odrediti sadrže li uzdužnu silu (slika 12.).

Na čvor 1 ne djeluje vanjska sila. Vrijednost sile u štapu $\{1,2\}$ jednaka je nuli, dok je vrijednost sile u štapu $\{1,8\}$ različita od nule. Štap $\{1,8\}$ leži u ravnini sa štapovima $\{1,16\}$ i $\{1,9\}$, dok štap $\{1,10\}$ izlazi iz te ravnine. Na temelju toga, prema 3. postavci, u štapovima koji se nalaze u ravnini sa štapom $\{1,8\}$ (štapovi $\{1,16\}$ i $\{1,9\}$), vrijednost sile će biti različita od nule, a u štapu koji izlazi iz te ravnine (štapu $\{1,10\}$), vrijednost sile će biti nula (slika 13.).

Na čvorove 3 i 5 ne djeluje vanjska sila te su vrijednosti sile gornjeg pojasa na tim pozicijama jednake nuli. Prema 1. postavci možemo zaključiti da su vrijednosti sile u štapovima $\{3,10\}$, $\{3,11\}$, $\{3,12\}$, $\{5,12\}$, $\{5,13\}$ i $\{5,14\}$ također jednake nuli (slika 13.).

U gornjem prstenu preostalo je riješiti još samo čvor 7. Opterećen je vanjskom silom te je u štapu $\{7,8\}$ vrijednost sile različita od nule, dok je u štapu $\{6,7\}$ vrijednost sile jednaka nuli. Rezultanta vanjske sile i sile u štapu $\{7,8\}$ u općem slučaju neće ležati ni u jednoj od ravnina koje razapinju parovi štapova $\{7,14\}$, $\{7,15\}$ i $\{7,16\}$. Primjenom 2. postavke, sile u ta tri štapa bit će različite od nule (slika 13.).



Slika 13.: Rješavanje preostalih čvorova gornjeg prstena

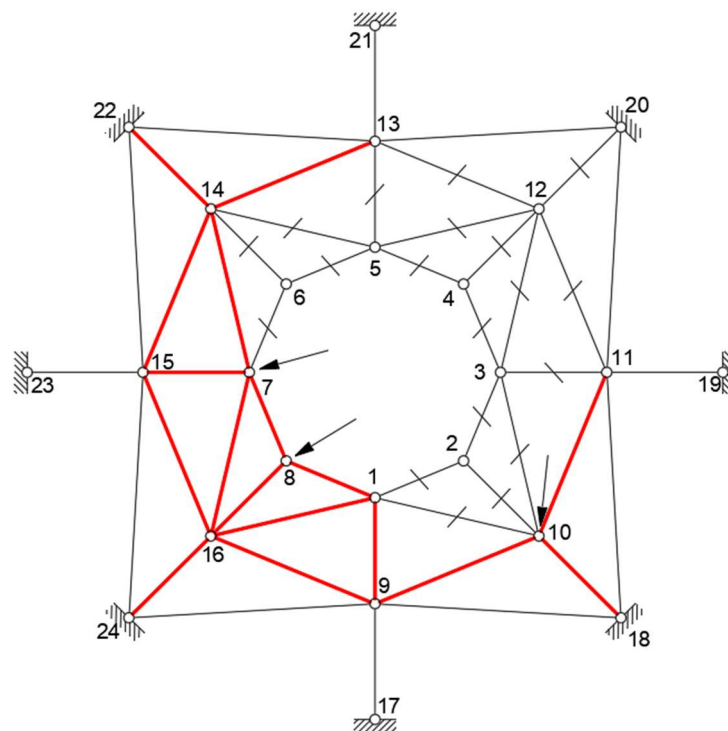
Možemo uočiti da se u donjem prstenu sastaje po šest štapova u svakom čvoru. Idući korak je rješavanje onih čvorova u kojima su nam nepoznate vrijednosti sila samo tri štapa, a to su čvorovi 10, 12, 14 i 16 (slika 13.).

Vrijednosti sila u štapovima $\{1,10\}$, $\{2,10\}$ i $\{3,10\}$ jednake su nuli, ali na čvor 10 djeluje vanjska sila koja u općem slučaju ne leži ni u jednoj od ravnina koja razapinju parovi štapova $\{9,10\}$, $\{10,18\}$ i $\{10,11\}$. Primjenom 2. postavke, vrijednosti sila u tim štapovima bit će različite od nule (slika 14.).

Na čvor 12 ne djeluje vanjska sila te su vrijednosti sila u štapovima $\{3,12\}$, $\{4,12\}$ i $\{5,12\}$ jednake nuli. Zaključno, prema postavci 1., sile u štapovima $\{11,12\}$, $\{12,20\}$ i $\{12,13\}$ bit će jednake nuli (slika 14.).

Jedina trenutno nam poznata sila koja djeluje na čvor 14 je sila iz štapa $\{7,14\}$. Budući da taj štap ne leži ni u jednoj od ravnina koje razapinju parovi štapova $\{13,14\}$, $\{14,22\}$ i $\{14,15\}$, prema 2. postavci vrijedi da će sile u tim štapovima biti različite od nule (slika 14.).

Na čvor 16 ne djeluje vanjska sila, ali znamo da su sile u štapovima $\{7,16\}$, $\{8,16\}$ i $\{1,16\}$ različite od nule. Njihova rezultanta u općem slučaju ne leži ni u jednoj od ravnina koje razapinju parovi štapova $\{15,16\}$, $\{16,24\}$ i $\{9,16\}$. Prema tome, primjenom postavke 2., zaključujemo da su sile u tim štapovima različite od nule (slika 14.).

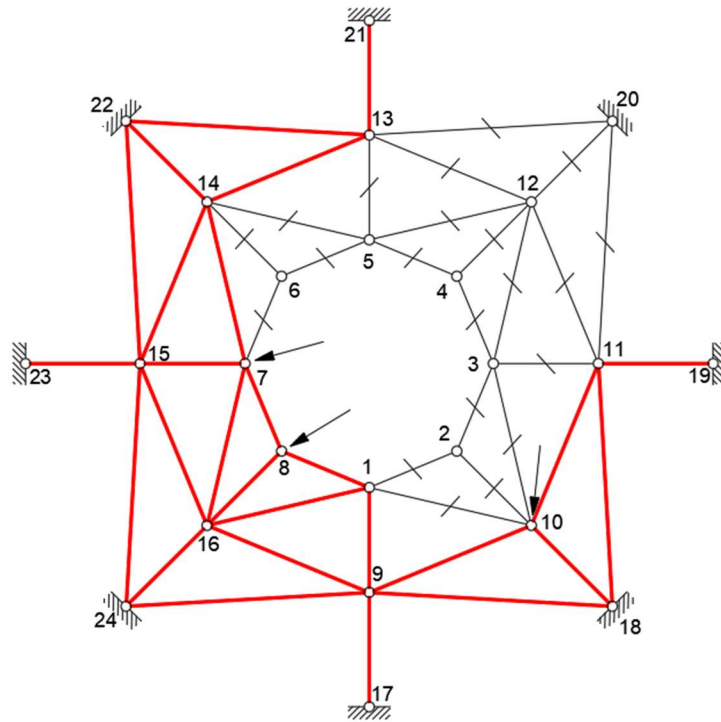


Slika 14.: Rješavanje čvorova donjeg prstena koji imaju samo tri nepoznate sile

Na slici 14. možemo vidjeti za sve štapove donjeg prstena jesu li vrijednosti sila u njima jednake ili različite od nule. Također, možemo uočiti da su u čvorovima 9, 11, 13 i 15 ostala po samo tri štapa za koje ne znamo imaju li silu ili ne.

U čvorove 9 i 15 spojena su po tri štapa u kojima je vrijednost sile različita od nule, što znači da će prema postavci 2. i u ostalim štapovima koji su spojeni za te čvorove vrijednost sile biti različita od nule ($\{9,17\}$, $\{9,18\}$ i $\{9,24\}$ te $\{15,22\}$, $\{15,23\}$ i $\{15,24\}$; slika 15.).

U čvorovima 11 i 13 samo jedan od tri štapa za koje imamo informaciju ima vrijednost sile različitu od nule ($\{10,11\}$ i $\{13,14\}$). U oba čvora taj štap leži u ravnini s još 2 štapa ($\{11,18\}$ i $\{11,19\}$; $\{13,21\}$ i $\{13,22\}$), dok treći štap izlazi iz te ravnine ($\{11,20\}$ i $\{13,20\}$). Prema 3. postavci, štapovi $\{11,18\}$, $\{11,19\}$, $\{13,21\}$ i $\{13,22\}$ bit će različiti od nule, a štapovi $\{11,20\}$ i $\{13,20\}$ jednaki nuli (slika 15.).



Slika 15.: Rješavanje preostalih čvorova donjeg prstena te konačno rješenje

5. Jednake vertikalne sile u čvorovima

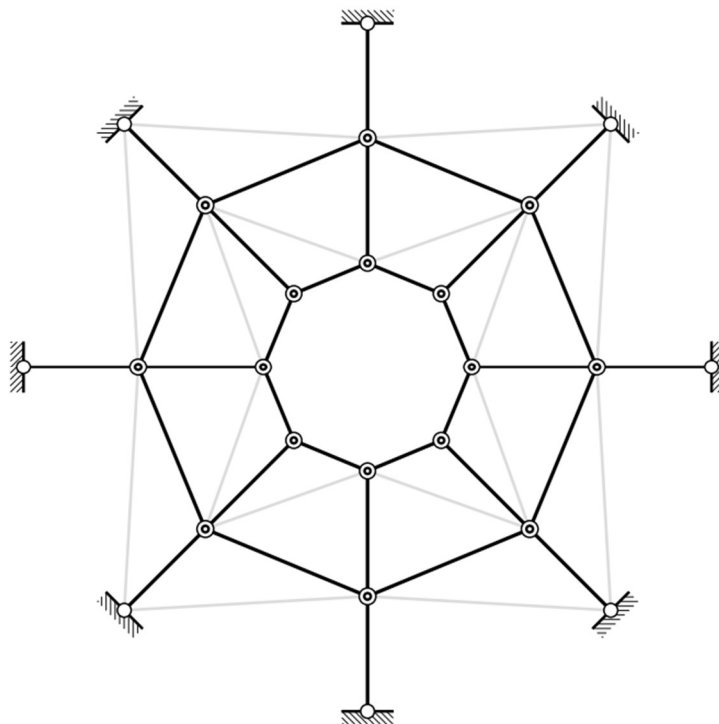
U posebnim slučajevima, kada su čvorovi Schwedlerove kupole opterećeni vertikalnim silama koje su međusobno jednake unutar istog horizontalnog prstena, značajno se pojednostavljuje statički sustav, a time i njegovo rješavanje. Glavni razlog tomu je činjenica da se kod takvog načina opterećenja dijagonalni štapovi ne aktiviraju, odnosno da su sile u njima jednake nuli [1].

Budući da se dijagonalni štapovi mogu u potpunosti zanemariti, trodimenzionalni problem prostorne rešetke praktički se svodi na rješavanje jednog reprezentativnog meridijalnog sklopa kao *ravninske rešetke* [1]. Takav pristup rješavanju u potpunosti je identičan i primjenjiv za obje vrste Schwedlerovih kupola (1. i 2. vrste) [1].

Prije razrade postupka rješavanja, izvesti ćemo dokaz o izostanku unutrašnjih sila u dijagonalnim štapovima za obje vrste Schwedlerovih kupola.

5.1. Dokaz izostanka sila u dijagonalnim štapovima Schwedlerove kupole 1. vrste

Na slici 16. prikazana je Schwedlerova kupola 1. vrste koja je u čvorovima opterećena vertikalnim silama (u tlocrtu se projiraju u točke), pri čemu su intenziteti sila u čvorovima jednog prstena jednaki [1].



Slika 16.: Schwedlweova kupola 1. vrste s jednako opterećenim čvorovima (Izvor: [1])

Kao što je već prije navedeno, postupak započinjemo u čvorovima gornjeg prstena u koje su priključena po tri štapa. Osi tih štapova nisu komplanarne, a vanjska sila ne leži ni u jednoj od ravnina koje razapinju ti štapi, što znači da će vrijednosti sila u sva tri štapa biti različite od nule. Budući da su vanjske sile u svakom čvoru jednake, jednake će biti i vrijednosti sila u svim štapovima prstena [1]. Isto se može zaključiti i za meridijalne štape priključene u te čvorove [1].

Budući da su čvorovi u ravnoteži, poligon sila svakog čvora je zatvoren, odnosno vektorske strelice u njemu teku u neprekinutom slijedu. Iz toga slijedi da će rezultanta sila triju štapova ležati na osi vanjske sile te je uravnotežiti. Na isti će način rezultanta vanjske sile i sila u štapovima prstena ležati na osi meridijalnog (trećeg) štapa, dok će sila u tom štapu uravnotežiti dobivenu rezultantu [1].

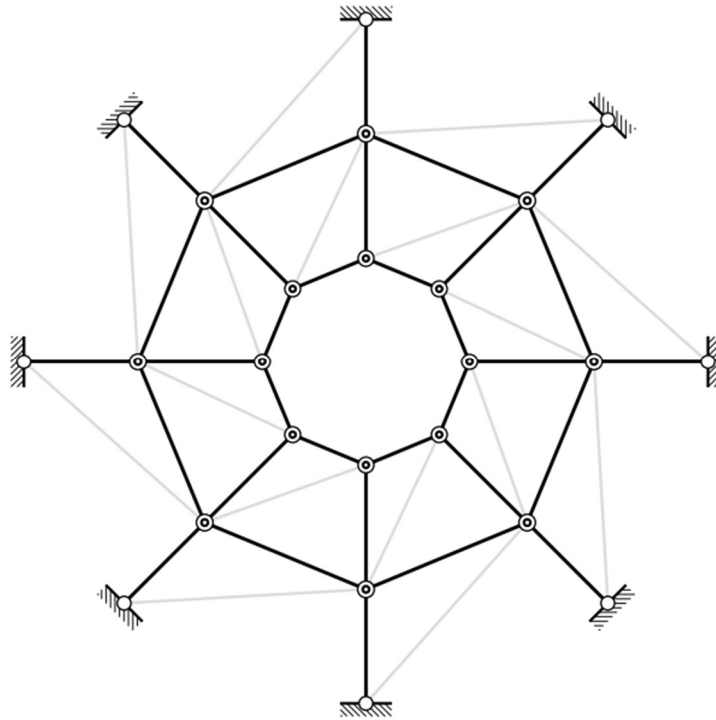
Na čvorove s pet priključenih štapova djeluju jednake sile u štapovima prstena i vanjska sila kao i na čvorove s tri priključena štapa [1]. Stoga će rezultanta tih sila također ležati na osi meridijalnog štapa [1]. Kako bi čvor bio u ravnoteži, na toj osi mora djelovati i rezultanta sila u dijagonalnim štapovima priključenima u taj čvor. Međutim, to nije moguće jer se os meridijalnog štapa ne nalazi u ravnini koju razapinju osi dijagonalnih štapova [1]. Naime, rezultanta sila dijagonalnih štapova može ležati isključivo u ravnini razapetoj njihovim osima, zbog čega ne može djelovati u smjeru potrebnom za uspostavljanje ravnoteže čvora. Iz toga proizlazi da sile u dijagonalnim štapovima moraju biti jednake nuli [1].

Posljedica toga je da dijagonalni štapi ne sudjeluju u prijenosu opterećenja, čime se statički sustav u tim čvorovima dodatno pojednostavljuje [1]. Budući da su sile u štapovima prstena i vanjska sila jednake kao i u čvorovima s tri priključena štapa, ravnoteža se ostvaruje preko meridijalnog štapa. Time će vrijednosti sila u meridijalnim štapovima priključenima u čvorove s pet štapova biti jednake onima u meridijalnim štapovima priključenima u čvorove s tri štapa [1]. Zaključno, nema razlike u proračunu čvorova s pet priključenih štapova i čvorova s tri priključena štapa, stoga rješavanje cijele kupole možemo svesti na rješavanje jednog meridijalnog sklopa kao ravninske rešetke.

5.2. Dokaz izostanka sila u dijagonalnim štapovima Schwedlerove kupole 2. vrste (1. način)

Kod Schwedlerove kupole 2. vrste ne postoji čvor koji je povezan sa samo tri štapa, kao što je to slučaj kod kupole 1. vrste. Zbog rotacijske simetrije kupole, njezina geometrija je takva da su u sve njezine čvorove priključena minimalno po četiri štapa, zbog čega se postupak dokazivanja izostanka sila u dijagonalnim štapovima ne može započeti na isti način kao kod kupole 1. vrste. Stoga je, za razliku od kupole 1. vrste, potrebno primijeniti drugačiji pristup u dokazivanju izostanka sile u dijagonalama.

U prethodno provedenoj analizi dokazali smo da su sile u dijagonalnim štapovima 1. vrste jednake nuli. Budući da kupola 2. vrste ima isti raspored štapova, uz iznimku dijagonala, pretpostavit ćemo da su i u dijagonalnim štapovima kupole 2. vrste sile jednake nuli (slika 17.). Na temelju te pretpostavke može se izdvojiti jedan meridijalni presjek i promatrati kao ravninska rešetka. Na taj se način proračun može provesti na isti način kao i kod kupole 1. vrste.



Slika 17.: Schwedlweova kupola 2. vrste s jednako opterećenim čvorovima (Izvor: [1])

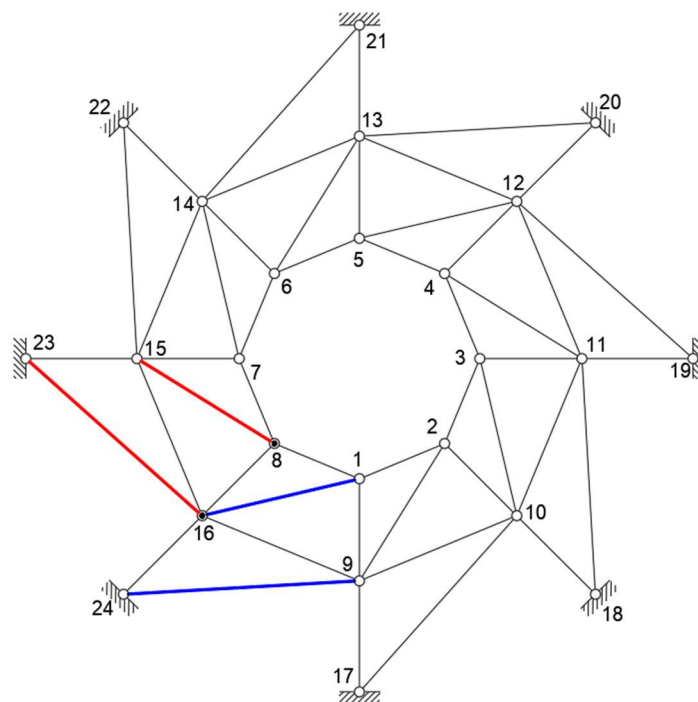
Međutim, sama pretpostavka o nepostojanju sila u dijagonalnim štapovima nije dovoljna da bi se takvo rješenje smatralo potpuno v. Potrebno je pokazati da dobiveno stanje sila uistinu zadovoljava sve uvjete ravnoteže cjelokupnog statičkog sustava. S obzirom na to da je kupola 2. vrste, kao i kupola 1. vrste, statički određena, njezino ravnotežno stanje je jedinstveno definirano. Drugim riječima, za svako zadano opterećenje postoji samo jedno ispravno rješenje koje zadovoljava jednadžbe ravnoteže.

Ako se pretpostavkom o zanemarivanju sila u dijagonalnim štapovima dođe do rješenja koje ispunjava sve uvjete ravnoteže kupole, onda to rješenje mora biti stvarno i ispravno rješenje. U tom slučaju, nema potrebe za zasebnim određivanjem sila u dijagonalnim štapovima, jer su njihove vrijednosti uistinu jednake nuli. Umjesto toga, dovoljno je riješiti jedan meridijalni presjek kao ravninsku rešetku te dobivene rezultate primijeniti na ostale dijelove kupole.

Na taj se način može pokazati da se, bez obzira na to što kod kupole 2. vrste ne postoji čvor sa samo tri priključena štapa od kojega bi se mogla započeti standardna metoda čvorova, njezin proračun može svesti na isti princip kao i kod kupole 1. vrste. Time je potvrđena pretpostavka da dijagonalni štapovi ne sudjeluju u prijenosu opterećenja.

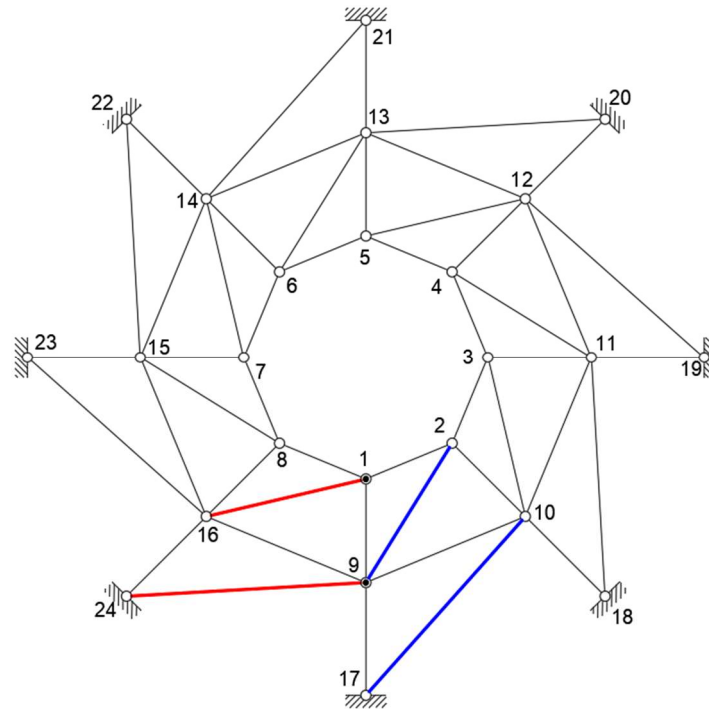
5.3. Dokaz izostanka sila u dijagonalnim štapovima Schwedlerove kupole 2. vrste (2. način)

Za dokazivanje izostanka sila u dijagonalnim štapovima kupole 2. vrste postoji i drugi način. Umjesto promatranja cjelokupnog sustava, fokus je na jednom meridijalnom presjeku, odnosno na njihovim čvorovima na koje djeluje vanjska sila. Rješavanjem takvog čvora dobiva se da je sila u jednoj od dijagonala vlačna, a sila u drugoj dijagonali tlačna. Važno je napomenuti da su intenziteti tih dviju sila jednaki, a razlikuju se samo po smjeru djelovanja. Primjerice, u slici 18. možemo vidjeti da se zbog djelovanja vanjske sile u čvorovima 8 i 16 javljaju vlačne sile (u slici označene crvenom) u dijagonalama $\{8,15\}$ i $\{16,23\}$, dok se u dijagonalama $\{1,16\}$ i $\{9,24\}$ javljaju tlačne sile (u slici označene plavom).



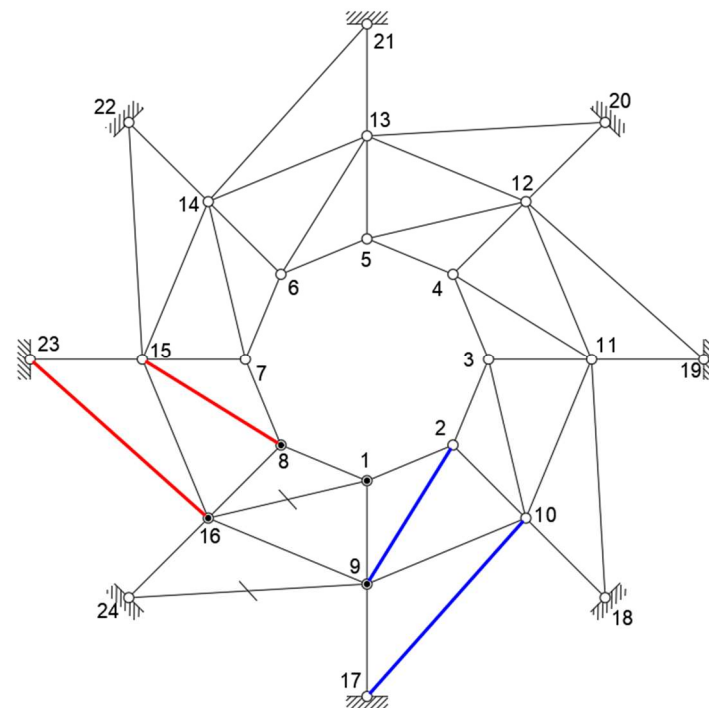
Slika 18.: Kupola 2. vrste opterećena u čvorovima jednog meridijalnog sklopa

Budući da je kupola 2. vrste rotacijski simetrična, nije potrebno provoditi zasebno proračun susjednog čvora. Umjesto toga, rješenje dobiveno za prvi čvor se može jednostavno „zarotirati“ na susjedni čvor, pri čemu se ne mijenjaju intenziteti sila, već samo njihov položaj i smjer. Tako će, ako su čvorovi 1 i 9 opterećeni vanjskom silom, dijagonale $\{1,16\}$ i $\{9,24\}$ postati vlačne, a dijagonale $\{2,9\}$ i $\{10,17\}$ tlačne (slika 19.).



Slika 19.: Kupola 2. vrste opterećena u čvorovima susjednog meridijalnog sklopa

Opteretimo li čvorove iz prvog i drugog slučaja (8, 16, 1 i 9) istodobno, dolazi do preklapanja sile u dijagonalnim štapovima {1,16} i {9,24}. Zbog djelovanja vanjske sile u čvorovima 8 i 16 u navedenim se dijagonalama javljaju tlačne sile, dok se zbog djelovanja vanjske sile u čvorovima 1 i 9 u tim istim dijagonalama javljaju vlačne sile jednakog intenziteta. Na temelju toga može se zaključiti da će zbroj sile u tim dijagonalama biti jednak nuli. Drugim riječima, vlačne i tlačne sile u dijagonalnim štapovima {1,16} i {9,24} će se međusobno „poništi“ (slika 20.).



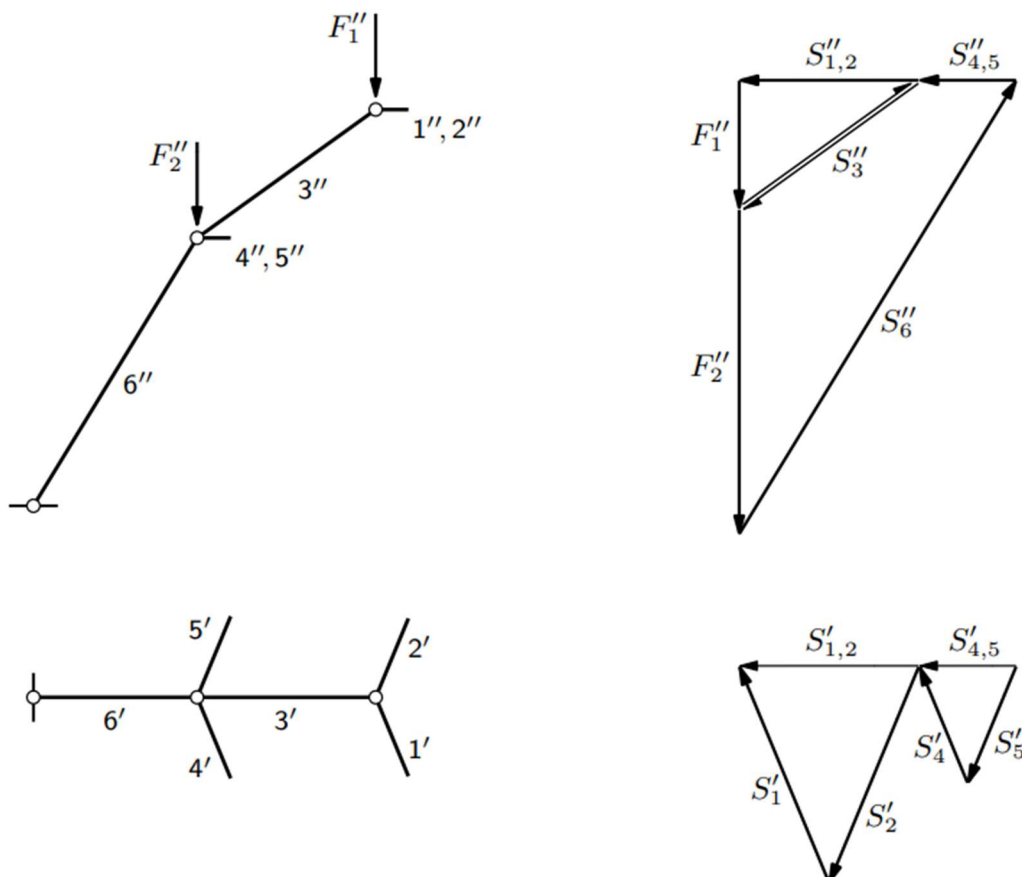
Slika 20.: Kupola 2. vrste opterećena u čvorovima dva susjedna meridijalna sklopa

Analogno prethodno opisanom slučaju, isti princip se može primijeniti kad su svi čvorovi po prstenu jednako opterećeni. Vlačne i tlačne sile u svim dijagonalama će se „poništi“, odnosno vrijednosti rezultantna sila u njima će biti jednaka nuli. Time je potvrđeno da dijagonalni štapovi neće sudjelovati u prijenosu opterećenja, odnosno da će, pri jednakom opterećenju svih čvorova, opterećenje prenositi isključivo meridijalni i prstenasti štapovi.

5.4. Rješavanje jednog meridijalnog sklopa kao ravninske rešetke

Zbog djelovanja jednakih vertikalnih sila u čvorovima svakog pojedinog prstena, vrijednosti unutrašnjih sila u svim štapovima istog prstena te u svim meridijalnim štapovima iste etaže su jednaki. Budući da je prethodno dokazano da su vrijednosti sila u dijagonalnim štapovima jednake nuli, proračun cijele kupole se pojednostavljuje i svodi na rješavanje samo jednog meridijalnog sklopa kao ravninske rešetke [1].

U proračunu se koristi metoda projekcije sila na vertikalnu i horizontalnu ravninu. Postupak određivanja unutrašnjih sila se provodi od vrha konstrukcije prema nižim etažama.



Slika 21.: Rješavanje jednog meridijalnog sklopa; dominantna sila u donjem čvoru (Izvor: [1])

Na slici 21. prikazan je cijeli postupak određivanja sila u štapovima jednog meridijalnog sklopa. U čvoru gornje etaže poznata nam je vanjska vertikalna sila $\vec{F}_1$, dok nam je u čvoru donje etaže

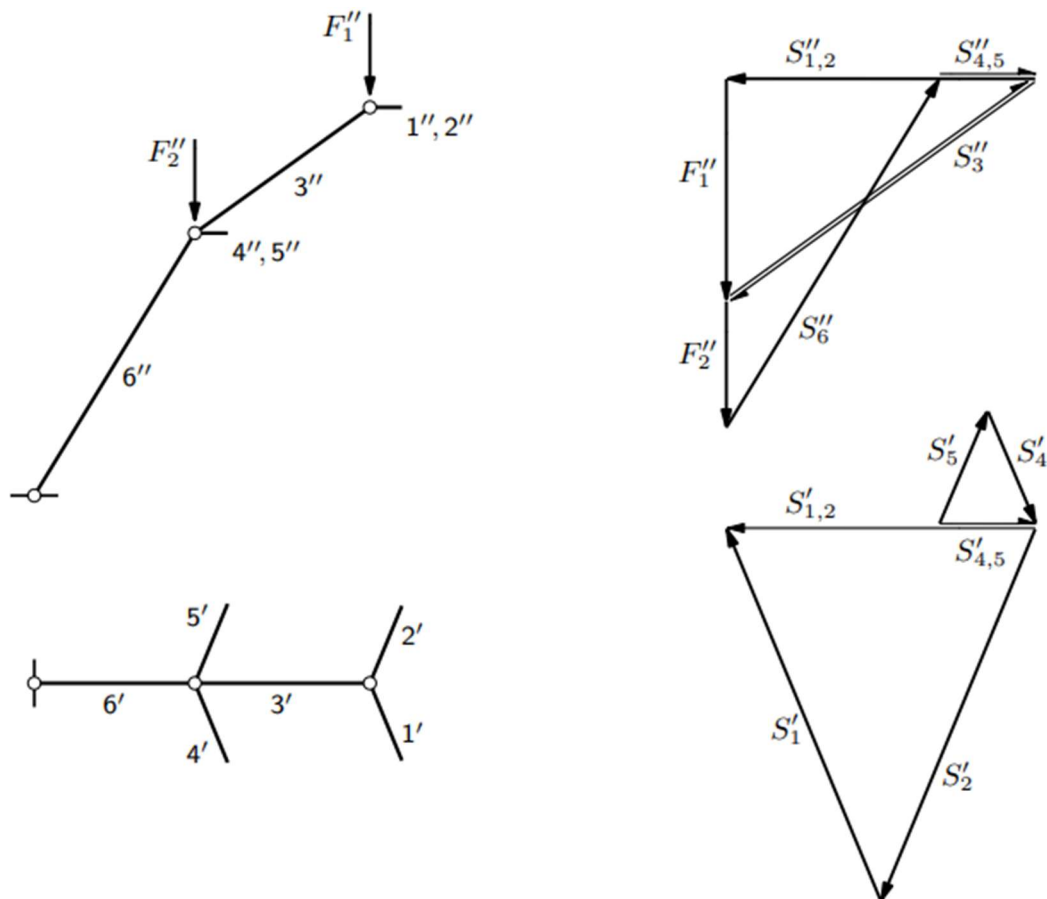
poznata vanjska vertikalna sila $\vec{F}_2$ [1]. U gornjem čvoru postoje dvije nepoznanice, dok se u donjem čvoru pojavljuju tri. Budući da je problem sveden na ravninski, mogu se uravnotežiti samo čvorovi s dvije nepoznate sile (dvije jednadžbe ravnoteže čvora). Drugim riječima, grafički promatrano, kod čvora s dvije nepoznanice postoji jedno i samo jedno rješenje kojim se zatvara poligon sila, jer je potrebno odrediti samo dvije stranice poligona čiji su pravci djelovanja paralelni sa zadanim pravcima. Čvor s tri nepoznate sile je statički neodređen (dvije jednadžbe ravnoteže s tri nepoznanice), odnosno dvije paralele se mogu povući kroz početnu i krajnju točku otvorenog poligona, dok se treća može povući bilo gdje, što znači da postoji više mogućih rješenja. Dakle, započnimo u gornjem čvoru zato što samo u njemu možemo započeti.

Konstruiranjem poligona sila u vertikalnoj ravnini, određuje se tlačna sila $\vec{S}_3$ u meridijalnom štapu gornje etaže te horizontalna sila $\vec{S}_{1,2}$ koja je rezultanta sila u štapovima gornjeg prstena $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ [1]. Dobivena sila $\vec{S}_{1,2}$ prenosi se u poligon sila projiciran na horizontalnu ravninu gdje se rastavlja na svoje dvije komponente jednakih intenziteta (sile u štapovima gornjeg prstena $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$) [1]. Prelaskom da čvor donje etaže, sad su nam poznate dvije od četiri sile koje djeluju na taj čvor (vanjska vertikalna sila $\vec{F}_2$ te reakcija iz gornjeg meridijalnog štapa, odnosno sila $-\vec{S}_3$ suprotnog smjera). Konstrukcijom poligona sila u vertikalnoj projekciji određuju se preostale dvije sile, a to su tlačna sila u donjem meridijalnom štapu $\vec{S}_6$ i horizontalna sila $\vec{S}_{4,5}$ koja je rezultanta sila u štapovima donjeg prstena $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ [1]. Sila $\vec{S}_{4,5}$ se u horizontalnoj ravnini rastavlja na komponente $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ koje, kao što je prethodno opisano, djeluju u štapovima donjeg prstena [1]. U slučaju da imamo veći broj etaža, ovaj postupak se ponavlja za sve preostale niže čvorove i prstenove do konačnog prijenosa opterećenja na ležajevu konstrukcije.

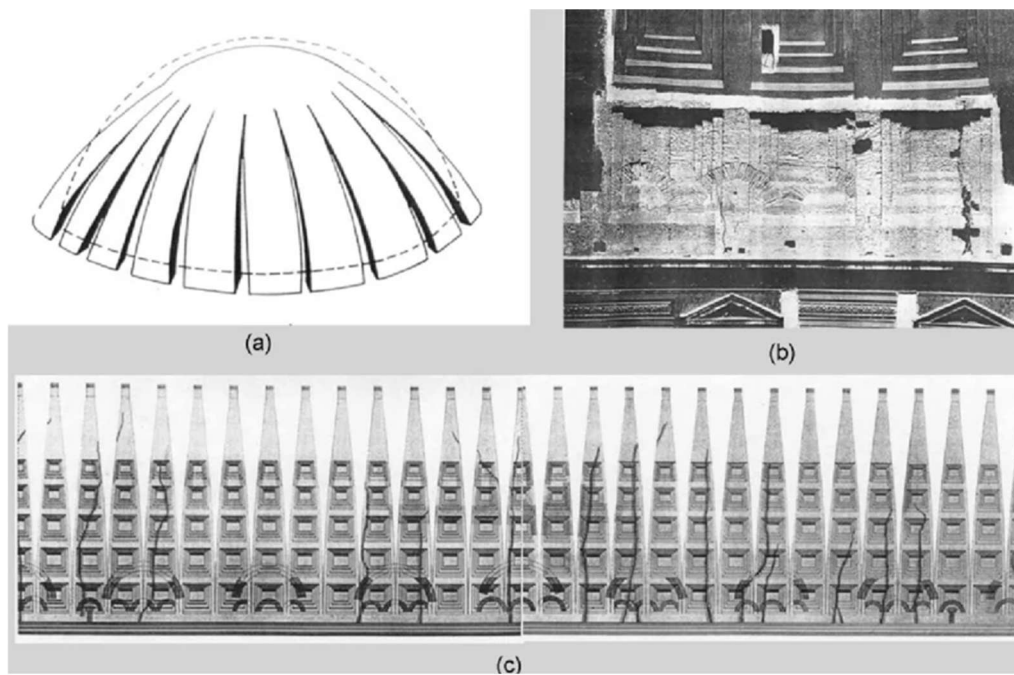
U uvjetima kada je vanjska vertikalna sila $\vec{F}_2$ znatno veća od vanjske vertikalne sile na gornjoj etaži $\vec{F}_1$, kako je prikazano na slici 21., cjelokupni se sustav nalazi u tlačnom stanju [1]. Zanimljivo je uočiti da unatoč tome što na donje čvorove djeluje veće vanjsko opterećenje ($\vec{F}_2$), izračunani su intenziteti tlačnih sila u štapovima donjeg prstena manji od intenziteta tlačnih sila u štapovima gornjeg prstena [1].

Ako se omjer vanjskih opterećenja promijeni tako da se intenzitet sile $\vec{F}_2$ smanji u odnosu na silu $\vec{F}_1$, dolazi do znatne promjene u statičkom ponašanju konstrukcije. Unutrašnje sile u štapovima donjeg prstena mijenjaju predznak, odnosno postaju vlačne (slika 22.)

Analiza naponskih stanja u Schwedlerovoj kupoli ima izuzetnu važnost jer daje jasan uvid u statičko djelovanje, odnosno tok sila u „pravim“, punostijenim kupolama (ljuskama) [1]. Pojava vlačnih sila u donjim prstenovima Schwedlerove kupole objašnjava zašto se u nižim dijelovima masivnih zidanih kupola pojavljuju prstenasti vlačni naponi. Budući da zidani materijali poput opeke, kamena i morta imaju jako malu vlačnu čvrstoću, pojava vlačnih sila dovodi do prekoračenja vlačne čvrstoće materijala. Posljedica toga su meridijalne pukotine koje se pružaju vertikalno uzduž meridijana kupole, odnosno okomito na smjer trajektorija prstenastih vlačnih sila [1] (slika 23.). Pojava takvih pukotina je zapravo prilagodba konstrukcije kojom se kontinuirana ljuska pretvara u niz zasebnih vertikalnih tlačnih lukova [5].



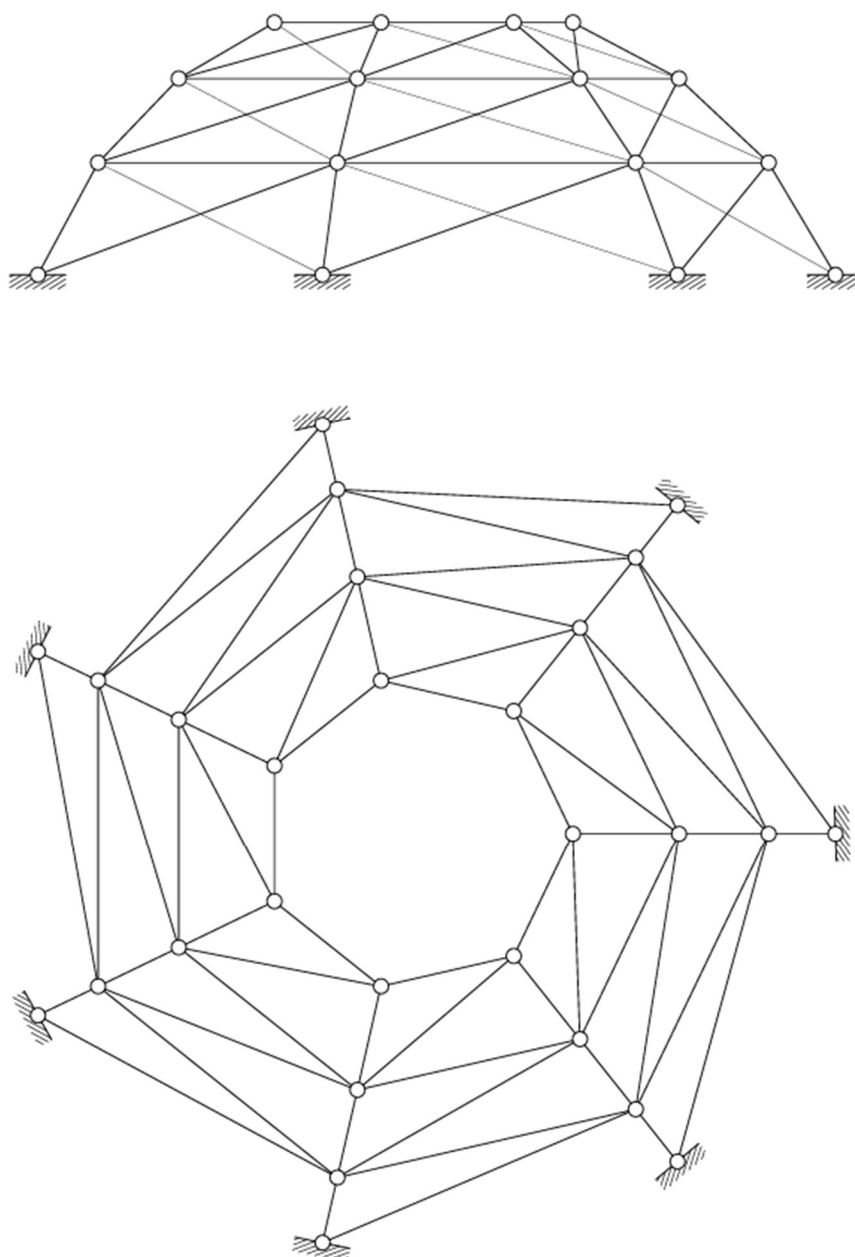
Slika 22.: Rješavanje jednog meridijalnog sklopa; dominantna sila u gornjem čvoru (Izvor: [1])



Slika 23.: (a) tipične pukotine u kupoli; (b) i (c) pukotine u Panteonu u Rimu (Izvor: [7])

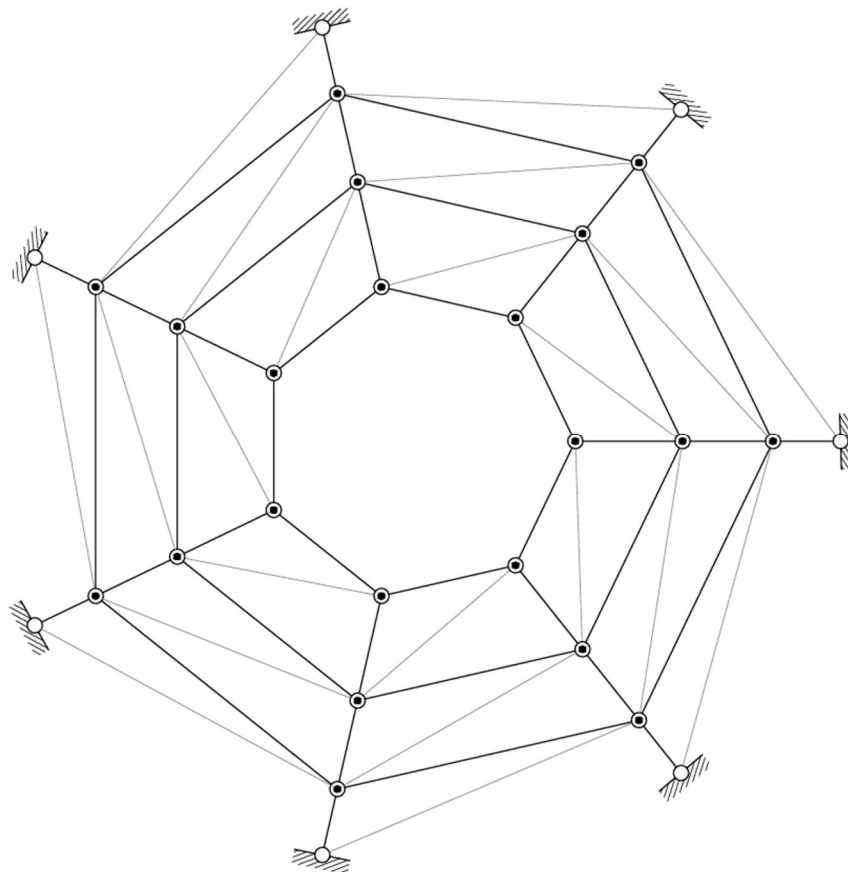
6. Primjeri

U dva ćemo različita slučaja jednako opterećenih čvorova grafičkim putem odrediti sile u štapovima Schwedlerove kupole. Schwedlerova kupola koju ćemo analizirati bit će kupola 2. vrste sa sedam meridijana i tri etaže, odnosno s tri horizontalna prstena (slika 24.). Svi čvorovi kupole leže na kuglinom odsječku (polumjer kugle $R = 16,25$ m), pri čemu se visine etaža postupno smanjuju prema gore. Polumjer položaja ležajnih štapova iznosi $r_0 = 15,0$ m, dok je ukupna visina tjemena plohe $h = 10,0$ m. Prvi prsten nalazi se na visini od 4 m, drugi na visini od 7 m, a treći je na visini od 9 m.



Slika 24.: Schwedlerova kupola 2. vrste sa sedam meridijana i tri etaže

Kao što je već dokazano, za slučajeve kad su svi čvorovi pojedine etaže jednako opterećeni vertikalnim silama dijagonalni štapovi ne sudjeluju u prijenosu opterećenja (vrijednosti sila u dijagonalnim štapovima jednake su nuli; slika 25.). Zbog toga možemo izdvojiti jedan reprezentativni meridijalni sklop te ga promatrati kao ravninsku rešetku, a dobiveno rješenje primijeniti na ostatak kupole.



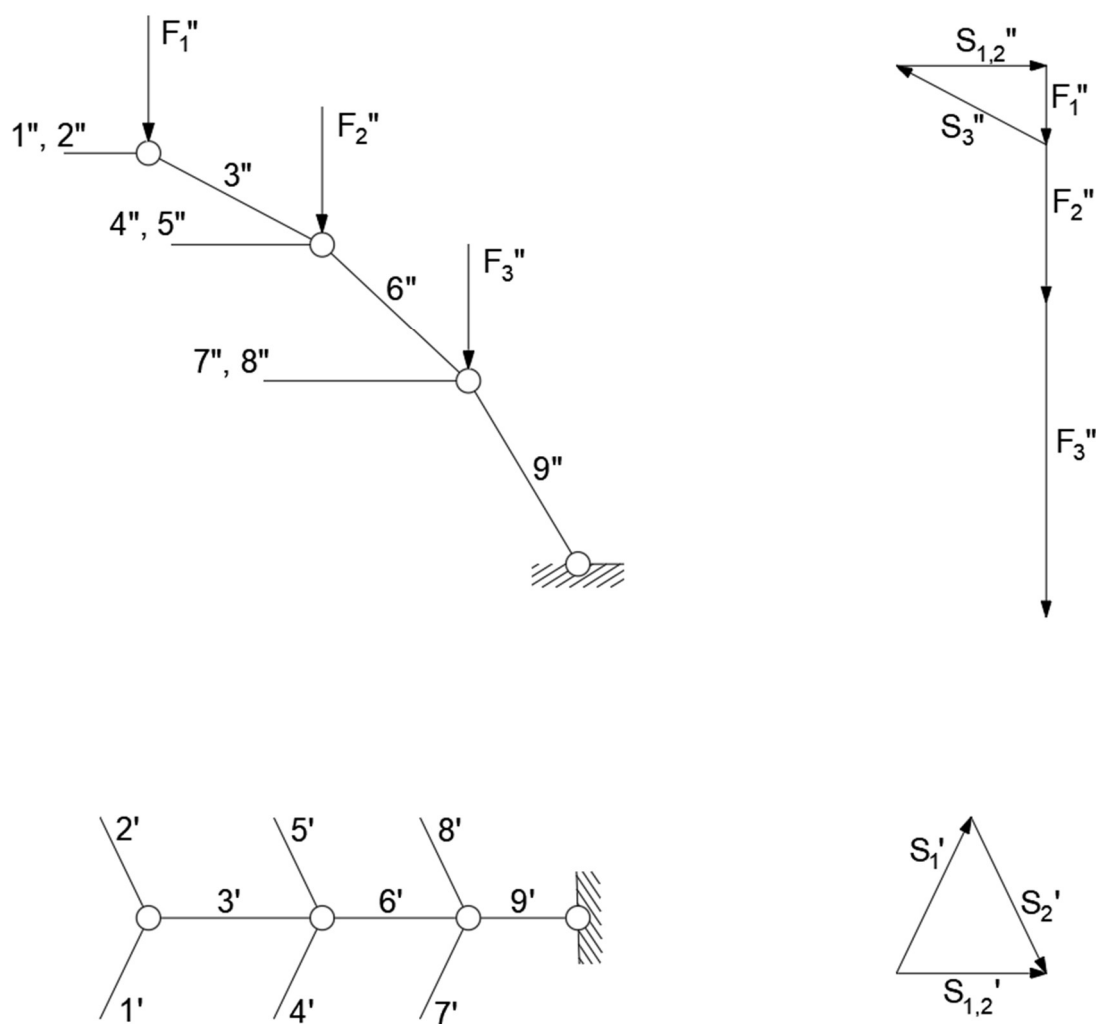
Slika 25.: Schwedlerova kupola 2. vrste sa sedam meridijana i tri etaže s jednako opterećenim čvorovima

6.1. Primjer 1

U prvom slučaju jednako opterećenih čvorova vertikalne se sile povećavaju od najvišeg prema najnižem prstenu:

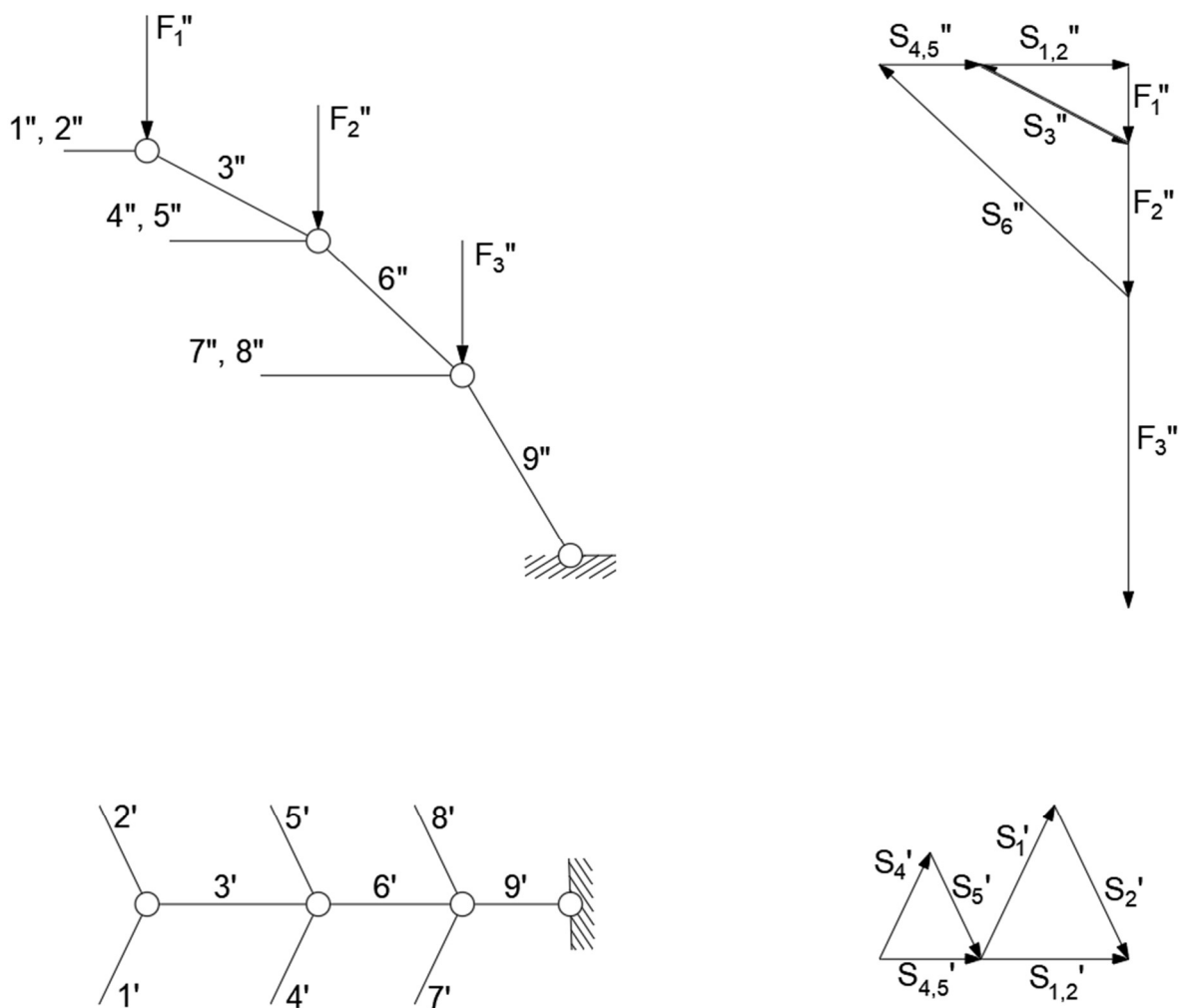
- sila $\vec{F}_1$ intenziteta $F_1 = 50 \text{ kN}$ (gornji prsten),
- sila $\vec{F}_2$ intenziteta $F_2 = 100 \text{ kN}$ (srednji prsten),
- sila $\vec{F}_3$ intenziteta $F_3 = 200 \text{ kN}$ (donji prsten).

Cilj analize ovog slučaja jest pokazati da se pri dominantnom opterećenju donjih etaža u svim prstenastim i meridijalnim štapovima javljaju isključivo tlačne sile.



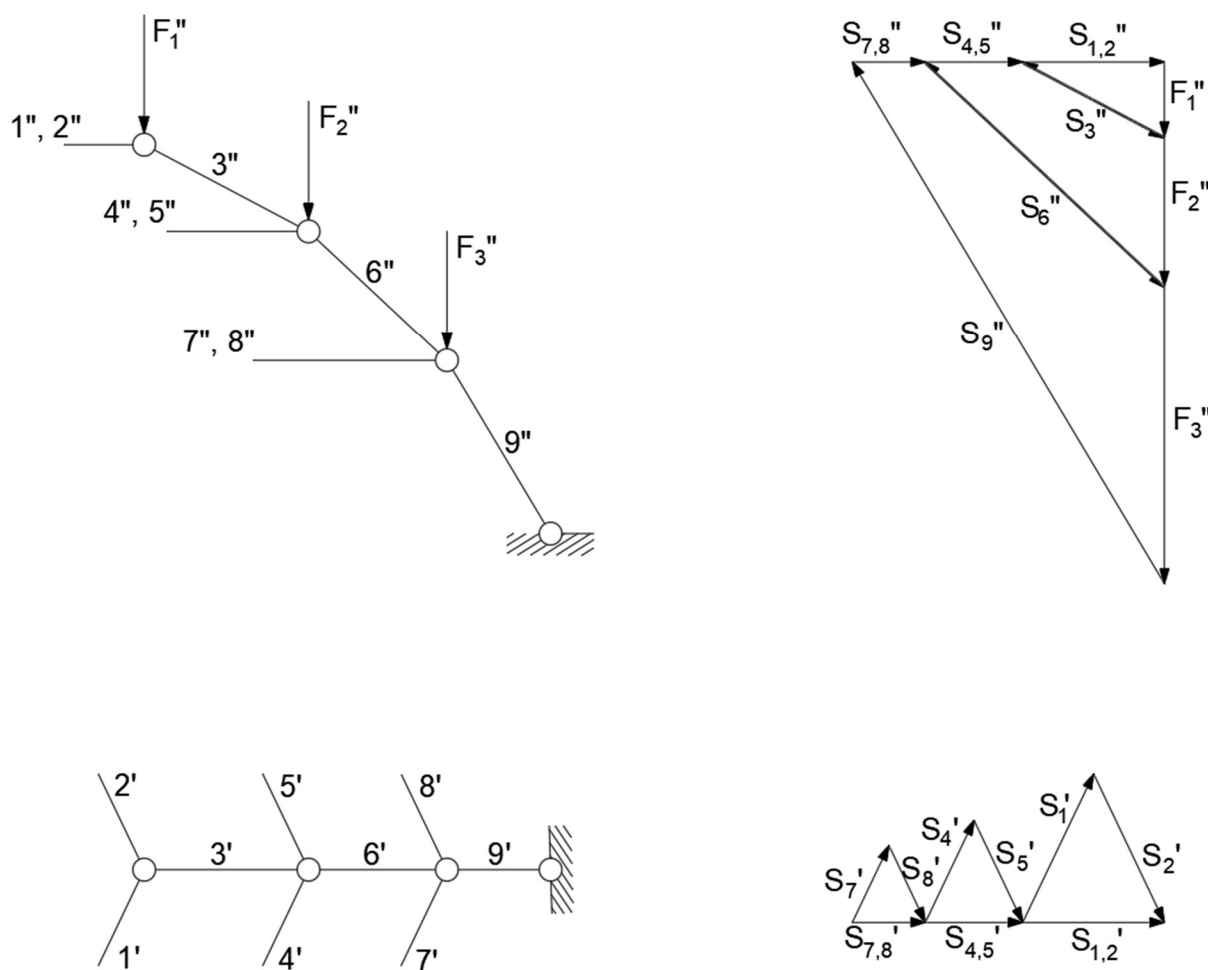
Slika 26.: Rješenje gornjeg čvora (dominantno donje opterećenje)

Na slici 26. vidimo da postupak moramo započeti u gornjem čvoru (dvije jednađbe ravnoteže i dvije nepoznanice) na koji djeluje vanjska vertikalna sila $\vec{F}_1$. Konstruiranjem poligona sila u vertikalnoj ravnini određuje se tlačna sila $\vec{S}_3$ intenziteta $S_3 = 107,24 \text{ kN}$ u meridijalnom štapu gornje etaže te horizontalna tlačna sila $\vec{S}_{1,2}$ intenziteta $S_{1,2} = 94,87 \text{ kN}$ koja je rezultanta sila u štapovima gornjeg prstena $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$. Dobivena sila $\vec{S}_{1,2}$ prenosi se u poligon sila projiciran na horizontalnu ravninu gdje se rastavlja na svoje dvije komponente $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ intenziteta $S_1 = S_2 = 109,33 \text{ kN}$.



Slika 27.: Rješenje srednjeg čvora (dominantno donje opterećenje)

Na čvor srednjeg prstena djeluju vertikalna sila $\vec{F}_2$ i sila $-\vec{S}_3$, odnosno reakcija iz gornjeg meridijalnog štapa. Konstrukcijom poligona sila u vertikalnoj projekciji, kao što je prikazano na slici 27., određuje se tlačna sila u srednjem meridijalnom štapu $\vec{S}_6$ intenziteta $S_6 = 219,39$ kN i horizontalna tlačna sila $\vec{S}_{4,5}$ intenziteta $S_{4,5} = 65,23$ kN koja je rezultanta sila u štapovima srednjeg prstena $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$. Sila $\vec{S}_{4,5}$ se u horizontalnoj projekciji rastavlja na komponente $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ jednakih intenziteta $S_4 = S_5 = 75,17$ kN.



Slika 28.: Rješenje donjeg čvora (dominantno donje opterećenje) te konačno rješenje

Na slici 28. prikazano je rješenje za čvor donjeg prstena na koji djeluje vanjska vertikalna sila $\vec{F}_3$ i sila $-\vec{S}_6$. Konstrukcijom poligona sila u vertikalnoj projekciji određuje se tlačna sila u donjem meridijalnom štapu $\vec{S}_9$ intenziteta $S_9 = 407,74$ kN i horizontalna tlačna sila $\vec{S}_{7,8}$ intenziteta $S_{7,8} = 49,06$ kN koja je rezultanta sila u štapovima donjeg prstena $\vec{S}_7$ i $\vec{S}_8$. Sila $\vec{S}_{7,8}$ se u horizontalnoj projekciji rastavlja na dvije komponente $\vec{S}_7$ i $\vec{S}_8$ intenziteta $S_7 = S_8 = 56,54$ kN.

Također, na slici 28. možemo vidjeti da je cilj analize ovog slučaja dostignut, odnosno da su sile u svim štapovima, pri dominantnom donjem opterećenju, tlačne.

Rekapitulacija dobivenih vrijednosti sila:

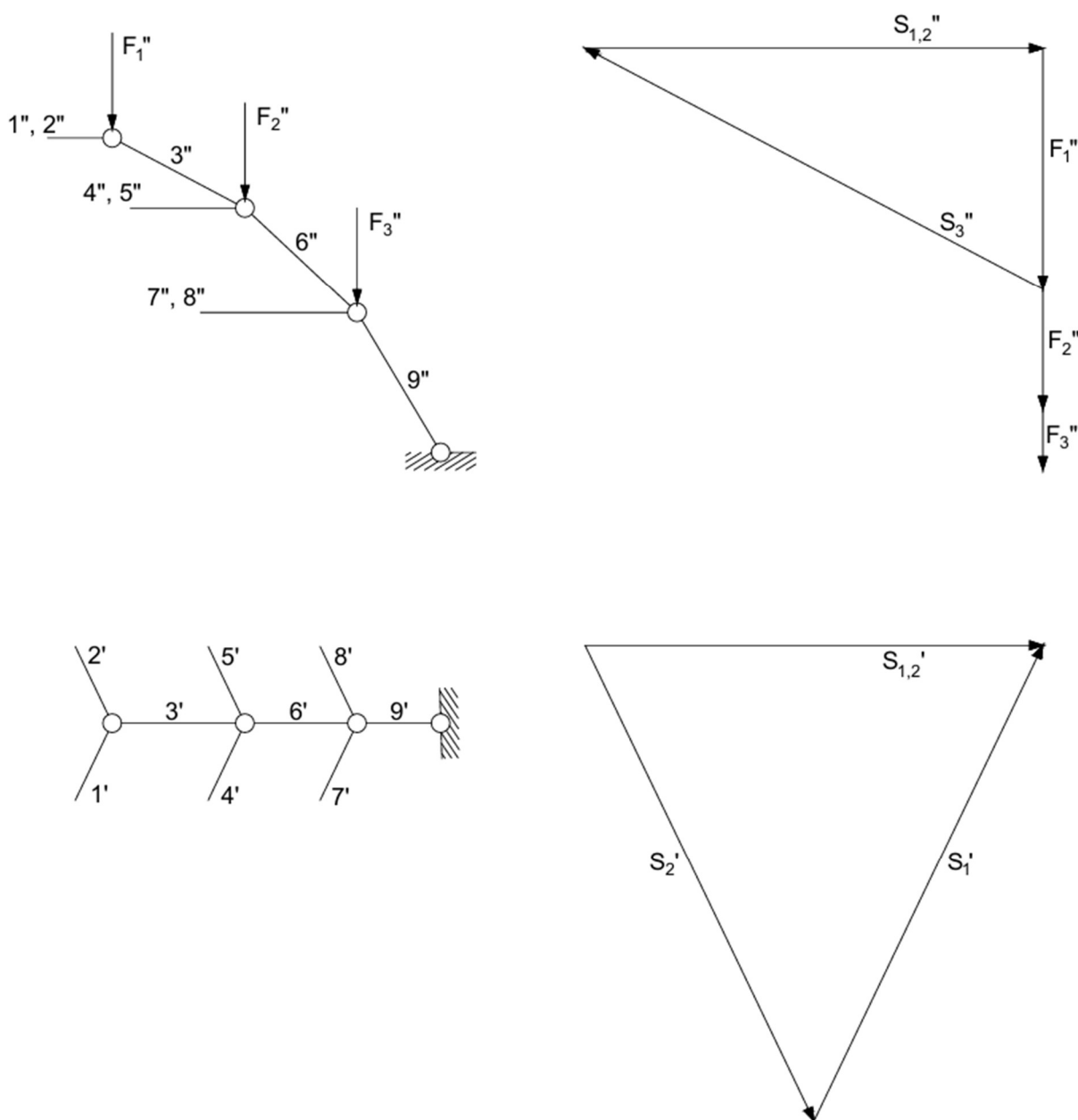
- $S_{1,2} = 94,87$ kN (tlak) $\rightarrow S_1 = S_2 = 109,33$ kN (tlak)
- $S_3 = 107,24$ kN (tlak)
- $S_{4,5} = 65,23$ kN (tlak) $\rightarrow S_4 = S_5 = 75,17$ kN (tlak)
- $S_6 = 219,39$ kN (tlak)
- $S_{7,8} = 49,06$ kN (tlak) $\rightarrow S_7 = S_8 = 56,54$ kN (tlak)
- $S_9 = 407,74$ kN (tlak)

6.2. Primjer 2

U drugom slučaju jednako opterećenih čvorova vertikalne sile su preraspoređene u odnosu na prvi, odnosno gornje etaže nose znatno veće opterećenje u odnosu na najdonju:

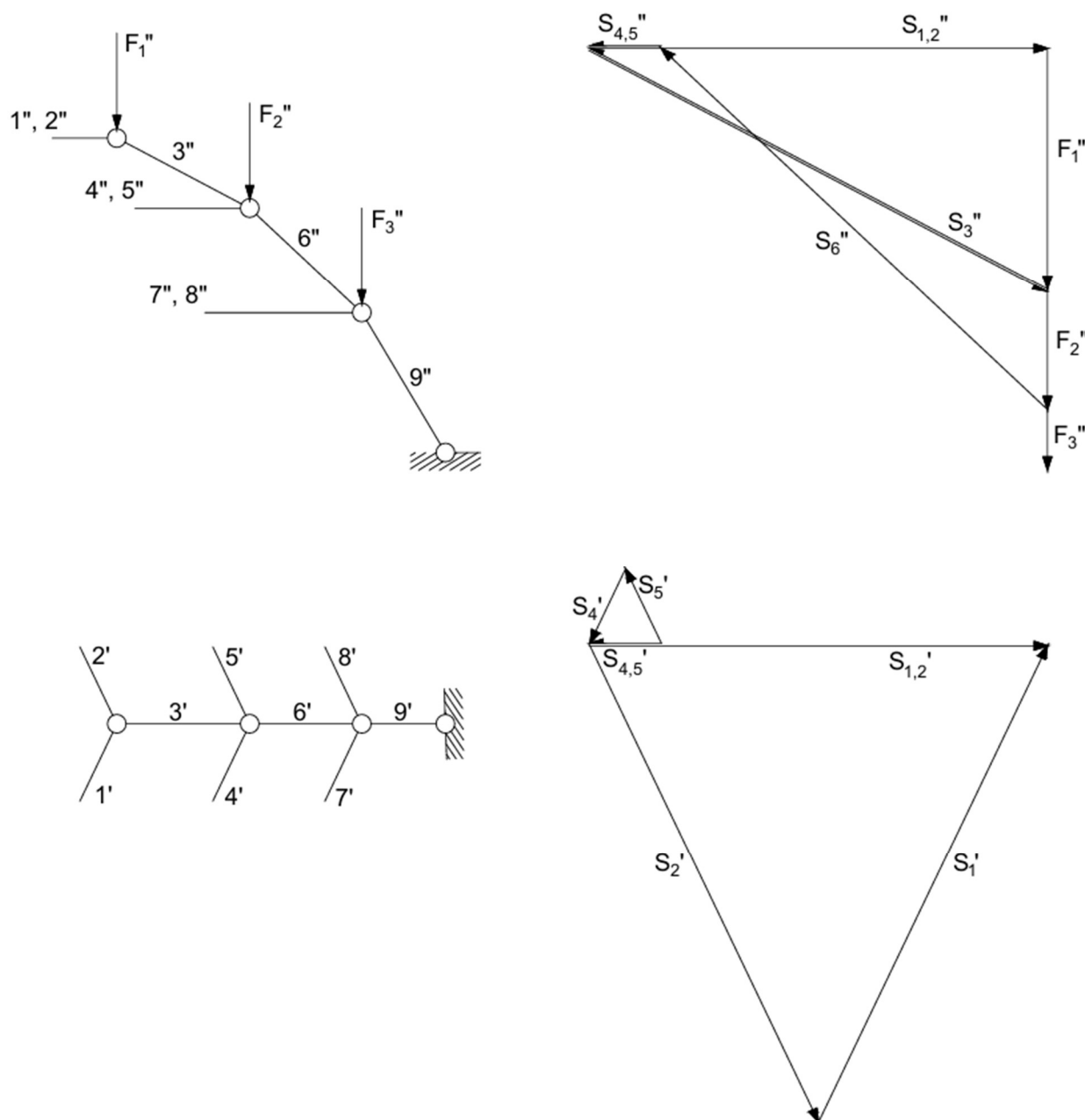
- sila $\vec{F}_1$ intenziteta $F_1 = 200$ kN (gornji prsten)
- sila $\vec{F}_2$ intenziteta $F_2 = 100$ kN (srednji prsten)
- sila $\vec{F}_3$ intenziteta $F_3 = 50$ kN (donji prsten).

Cilj analize ovog slučaja jest pokazati da pri dominantnom opterećenju gornjih etaža, unutarnje sile u štapovima donjih prstenova mijenjaju predznak, odnosno postaju vlačne, dok gornji prsten ostaje u tlačnom režimu.



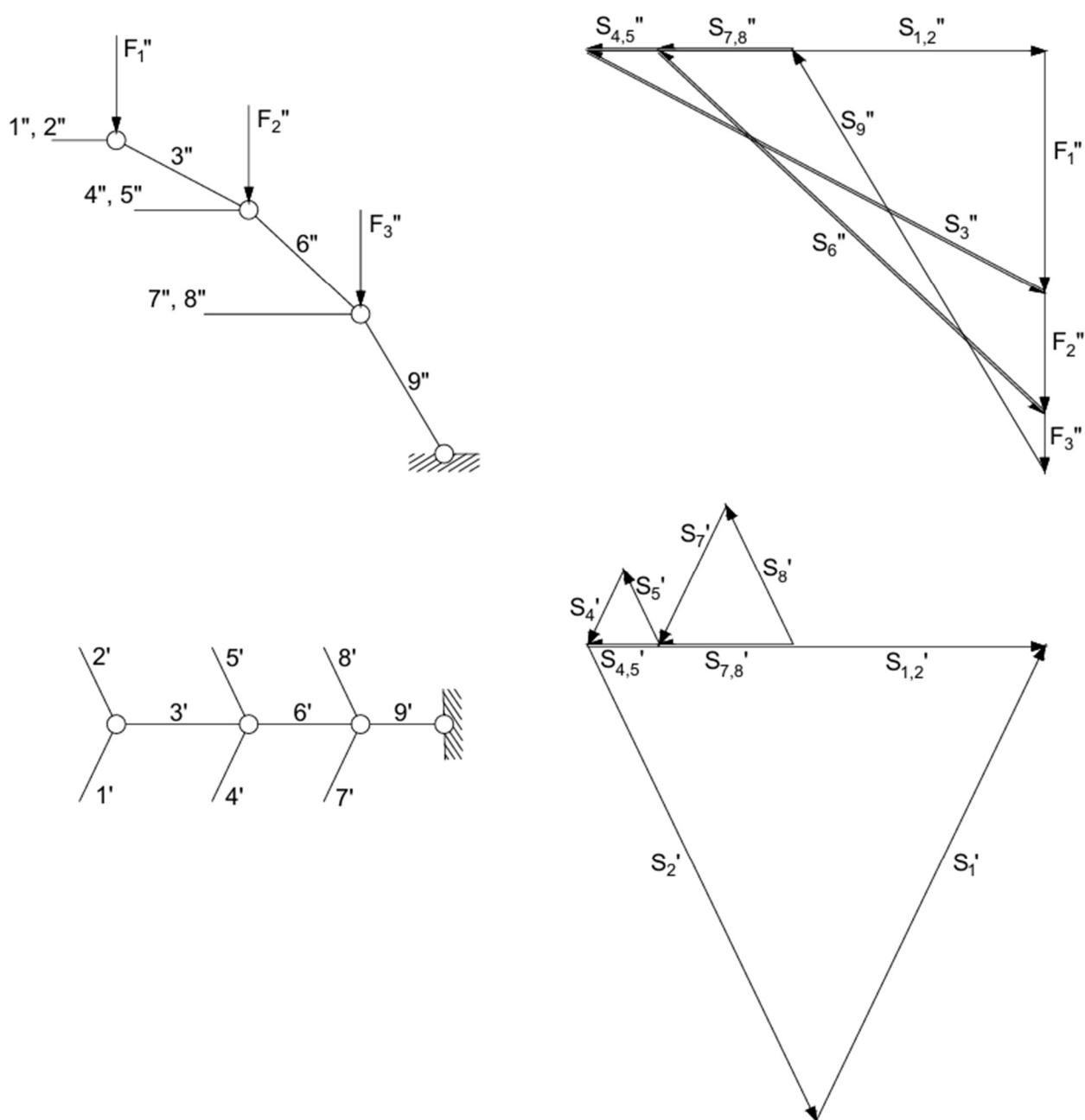
Slika 29.: Rješenje gornjeg čvora (dominantno gornje opterećenje)

Postupak, kao i u prethodnom primjeru, moramo započeti u gornjem čvoru (dvije jednadžbe ravnoteže i dvije nepoznanice) na koji djeluje vanjska vertikalna sila $\vec{F}_1$. Na slici 29. možemo vidjeti da se konstruiranjem poligona sila u vertikalnoj ravnini određuje tlačna sila $\vec{S}_3$ intenziteta $S_3 = 428,97 \text{ kN}$ u meridijalnom štapu gornje etaže te horizontalna tlačna sila $\vec{S}_{1,2}$ intenziteta $S_{1,2} = 379,50 \text{ kN}$ koja je rezultanta sila u štapovima gornjeg prstena $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$. Dobivena sila $\vec{S}_{1,2}$ prenosi se u poligon sila projiciran na horizontalnu ravninu gdje se rastavlja na svoje dvije komponente $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ intenziteta $S_1 = S_2 = 437,32 \text{ kN}$.



Slika 30.: Rješenje srednjeg čvora (dominantno gornje opterećenje)

Na čvor srednjeg prstena djeluju vertikalna sila $\vec{F}_2$ i sila $-\vec{S}_3$, odnosno reakcija iz gornjeg meridijalnog štapa. Na slici 30. možemo vidjeti da pri izradi poligona sila za srednji čvor u vertikalnoj projekciji, sila $\vec{F}_2$ intenziteta $F_2 = 100$ kN nije dovoljna da kompenzira strmi nagib srednjeg meridijalnog štapa. Da bi se poligon sila zatvorio, vektor horizontalne sile $\vec{S}_{4,5}$ mora promijeniti smjer (usmjerava se od čvora prema van). Time dobivamo horizontalnu vlačnu silu $\vec{S}_{4,5}$ intenziteta $S_{4,5} = 59,29$ kN i tlačnu silu u srednjem meridijalnom štapu $\vec{S}_6$ intenziteta $S_6 = 438,79$ kN. Dobivena sila $\vec{S}_{4,5}$ prenosi se u poligon sila projiciran na horizontalnu ravninu gdje se rastavlja na svoje dvije vlačne komponente $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ intenziteta $S_4 = S_5 = 68,32$ kN.



Slika 31.: Rješenje donjeg čvora (dominantno gornje opterećenje) te konačno rješenje

Na slici 31. možemo vidjeti da na čvor donjeg prstena djeluju vertikalna sila $\vec{F}_3$ i sila $-\vec{S}_6$. Kao što je bilo u vertikalnoj projekciji srednjeg čvora, u vertikalnoj projekciji donjeg čvora mala sila $\vec{F}_3$ intenziteta $F_3 = 50$ kN nije dovoljna da kompenzira strmi nagib donjeg meridijalnog štapa. Stoga, da bi se zatvorio poligon sila, vektor horizontalne sile $\vec{S}_{7,8}$ mijenja smjer. Time dobivamo horizontalnu vlačnu silu $\vec{S}_{7,8}$ intenziteta $S_{7,8} = 111,04$ kN i tlačnu silu u donjem meridijalnom štapu $\vec{S}_9$ intenziteta $S_9 = 407,74$ kN. Dobivena sila $\vec{S}_{7,8}$ prenosi se u poligon sila projiciran na horizontalnu ravninu gdje se rastavlja na svoje dvije vlačne komponente $\vec{S}_7$ i $\vec{S}_8$ intenziteta $S_7 = S_8 = 127,96$ kN.

Također, na slici 31. možemo vidjeti da je cilj analize ovog slučaja dostignut, odnosno da su sile u štapovima donjih prstenova, pri dominantnom gornjem opterećenju, vlačne.

Rekapitulacija dobivenih vrijednosti sila:

- $S_{1,2} = 379,50$ kN (tlak) $\rightarrow$ $S_1 = S_2 = 437,32$ kN (tlak)
- $S_3 = 428,97$ kN (tlak)
- $S_{4,5} = 59,29$ kN (vlak) $\rightarrow$ $S_4 = S_5 = 68,32$ kN (vlak)
- $S_6 = 438,79$ kN (tlak)
- $S_{7,8} = 111,04$ kN (vlak) $\rightarrow$ $S_7 = S_8 = 127,96$ kN (vlak)
- $S_9 = 407,74$ kN (tlak)

7. Zaključak

Kupole su jedan od značajnijih oblika konstrukcija u graditeljstvu, te se tijekom povijesti primjenjuju u različitim vrstama građevina. Njihov oblik omogućuje prekrivanje velikih prostora uz mali broj unutarnjih oslonaca, a pritom građevinama daje prepoznatljiv i estetski privlačan izgled. Razumijevanje njihovog geometrijskog i statičkog ponašanja ima bitnu ulogu u projektiranju sigurnih i funkcionalnih konstrukcija.

U radu se Schwedlerova kupola 1. i 2. vrste statički i geometrijski analizirala, pri čemu su se obradile njihove sličnosti i razlike u pogledu simetrije i načina sklapanja. Posebna pozornost posvetila se grafostatičkim metodama uravnoteženja točke i njihovoj primjeni na prostorne sustave, odnosno Schwedlerovu kupolu.

Analizom slučaja opterećenja čvorova pojedinog prstena jednakim vertikalnim silama dokazano je da dijagonalni štapovi ne preuzimaju opterećenje, odnosno da sile u njima poprimaju vrijednost nula. Time se prostorni sustav kupole može svesti na analizu jednog meridijalnog sklopa kao ravninske rešetke.

Na konkretnim primjerima opterećenja jednakim vertikalnim silama pokazano je da raspored opterećenja različitih intenziteta po etažama utječe na predznak sila u prstenastim štapovima. Kada su donje etaže opterećene silama većeg intenziteta od sila u gornjim etažama, u prstenastim i meridijalnim štapovima javljaju se tlačne sile. U obrnutom slučaju, kada su gornje etaže opterećene silama većeg intenziteta od sila u donjim etažama, u donjim prstenastim štapovima javljaju se vlačne sile, dok meridijalni štapovi i dalje ostaju tlačno opterećeni. Dobiveni rezultati omogućuju bolje razumijevanje statičkog ponašanja Schwedlerove kupole te pojavu vlačnih naprezanja i meridijalnih pukotina u masivnom zidanim kupolama.

Popis literature

- [1] Krešimir Fresl: Statički određeni prostorni rešetkasti nosači, prezentacija predavanja, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2020.,
<https://grad.hr/nastava/gS/gS1/pdn/p-pr.pdf>
- [2] Krešimir Fresl: Građevna statika 1. Predavanja, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017.,
<https://grad.hr/nastava/gS/gS1/gS1.pdf>
- [3] Krešimir Fresl: Statika točke, poglavlje skripte iz Mehanike 1., Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2024.,
<https://master.grad.hr/nastava/gS/gS3d/st.pdf>
- [4] Krešimir Fresl: Schwedlerova kupola
<https://grad.hr/nastava/gS/gS1/pdn/schw3.pdf>
- [5] V. Paris, G. Ruscica, G. Mirabella Roberti: Graphical Modeling of Hoop Force Distribution for Equilibrium Analysis of Masonry Domes, Nexus Network Journal, vol. 23., br. 4, str. 855-878, lip. 2021.
https://www.researchgate.net/publication/352582506_Graphical_Modelling_of_Hoop_Force_Distribution_for_Equilibrium_Analysis_of_Masonry_Domes
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Wilhelm_Schwedler
- [7] S. Huerta: Ethics and materials: Some Spanish Cases, u Déontologie de la Lausanne, Lausanne, 2013.
https://www.researchgate.net/publication/267366320_Ethics_and_materials_Some_Spanish_Cases

Popis slika

Slika 1.: Spremnik za plin Fichte-Bunker, Berlin (Izvor: [6])	1
Slika 2.: Kuglasti zglobovi (Izvor: [1])	3
Slika 3.: Schwedlerova kupola 1. vrste (Izvor: [1])	3
Slika 4.: Nastajanje Schwedlerove kupole 1. vrste drugim elementarnim postupkom (Izvor: [1])	4
Slika 5.: Analiza kupole 1. vrste trećim elementarnim postupkom (Izvor: [1])	5
Slika 6.: Schwedlerova kupola 2. vrste (Izvor: [1])	6
Slika 7.: Rastavljanje sile u međusobno okomite komponente, usporedne s osima Kartezijeva koordinatnog sustava (Izvor: [2])	7
Slika 8.: Dvostupanjsko rastavljanje pomoću pomoćne ravnine i presječnice prikazano u kosoj aksonometriji (Izvor: [3])	9
Slika 9. (nastavak s prethodne strane): Izravna konstrukcija lanca sila u prostoru sila u aksonometrijskom prikazu (Izvor: [3])	11
Slika 10.: Mongeov postupak za uravnoteženje sile metodom probodišta ravnine i pravca u prostoru sila	12
Slika 11.: Schwedlerova kupola 1. vrste opterećena u tri čvora	14
Slika 12.: Rješavanje čvorova u koje su priključena samo tri štapa	14
Slika 13.: Rješavanje preostalih čvorova gornjeg prstena	15
Slika 14.: Rješavanje čvorova donjeg prstena koji imaju samo tri nepoznate sile	16
Slika 15.: Rješavanje preostalih čvorova donjeg prstena te konačno rješenje	17
Slika 16.: Schwedlerova kupola 1. vrste s jednako opterećenim čvorovima (Izvor: [1])	18
Slika 17.: Schwedlerova kupola 2. vrste s jednako opterećenim čvorovima (Izvor: [1])	20
Slika 18.: Kupola 2. vrste opterećena u čvorovima jednog meridijalnog sklopa	21
Slika 19.: Kupola 2. vrste opterećena u čvorovima susjednog meridijalnog sklopa	22
Slika 20.: Kupola 2. vrste opterećena u čvorovima dva susjedna meridijalna sklopa	22
Slika 21.: Rješavanje jednog meridijalnog sklopa; dominantna sila u donjem čvoru (Izvor: [1])	23
Slika 22.: Rješavanje jednog meridijalnog sklopa; dominantna sila u gornjem čvoru (Izvor: [1])	25
Slika 23.: (a) tipične pukotine u kupoli; (b) i (c) pukotine u Panteonu u Rimu (Izvor: [7])	25
Slika 24.: Schwedlerova kupola 2. vrste sa sedam meridijana i tri etaže	26
Slika 25.: Schwedlerova kupola 2. vrste sa sedam meridijana i tri etaže s jednako opterećenim čvorovima	27
Slika 26.: Rješenje gornjeg čvora (dominantno donje opterećenje)	28
Slika 27.: Rješenje srednjeg čvora (dominantno donje opterećenje)	29
Slika 28.: Rješenje donjeg čvora (dominantno donje opterećenje) te konačno rješenje	30
Slika 29.: Rješenje gornjeg čvora (dominantno gornje opterećenje)	31
Slika 30.: Rješenje srednjeg čvora (dominantno gornje opterećenje)	32
Slika 31.: Rješenje donjeg čvora (dominantno gornje opterećenje) te konačno rješenje	33