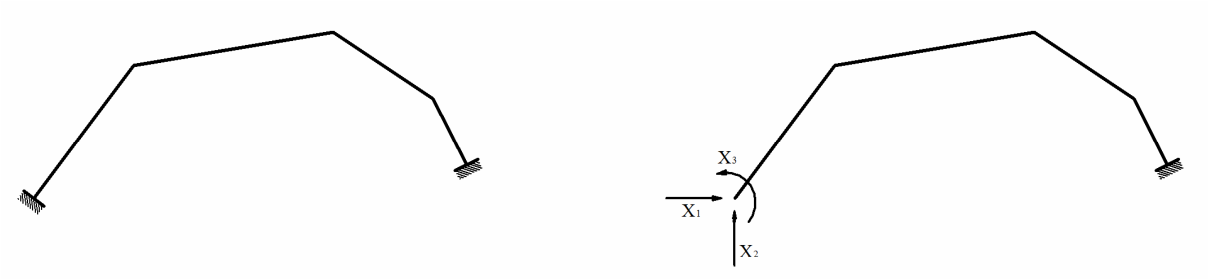
ELASTIČNO TEŽIŠTE

U gradnji mostova lukovi su vrlo često upotrebljavane konstrukcije. U pravilu su promjenjive krutosti po duljini te najčešće imaju jednu os simetrije.

Kao što je poznato, određivanje unutarnjih sila na upetom luku svodi se na rješavanje tri puta statički neodređenog sistema. Pritom luk ne mora imati niti jednu os simetrije.

Jedan od načina rješavanja tog tri puta statički neodređenog sistema metodom sila prikazat će se na upetom okviru.



Za odabrani osnovni sistem mogu se postaviti tri jednadžbe kontinuiteta (neprekinutosti):

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{10} = \overline{\delta}_1$$
$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{20} = \overline{\delta}_2$$
$$X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{30} = \overline{\delta}_3$$

ili, u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\delta}_1 \\ \overline{\delta}_2 \\ \overline{\delta}_3 \end{bmatrix}$$

tj. $D \cdot X + \Delta = \overline{\Delta}$

Radi jednostavnosti izraza pretpostavit ćemo da nema zadanih prisilnih pomaka, tj. $\overline{\Delta} = 0$.
Slijedi: $D \cdot X + \Delta = 0$

Izračun elemenata matrice fleksibilnosti (popustljivosti) relativno je jednostavan ako je luk konstantnog poprečnog presjeka a os zadana analitičkim izrazom pogodnim za direktnu integraciju.

Kada je oblik dobiven kao tlačna linija ili je luk promjenjivog poprečnog presjeka, koeficijenti matrice fleksibilnosti računaju se numeričkom integracijom.

Može se zamisliti da u ravnini luka postoji jedna točka u kojoj su elementi matrice fleksibilnosti van glavne dijagonale jednaki nuli. Dakle, vrijedi: $\delta_{ij}=0$ za $\forall\ i \neq j$.

Ukoliko takva točka postoji i ako su u nju postavljene nepoznate sile X_1, X_2 i X_3, matrica fleksibilnosti bit će:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33}^* \end{bmatrix}$$

Sada jednadžbe neprekinutosti možemo napisati:

$$X_1 \cdot \delta_{11}^* + \delta_{10}^* = 0$$
$$X_2 \cdot \delta_{22}^* + \delta_{20}^* = 0$$
$$X_3 \cdot \delta_{33}^* + \delta_{30}^* = 0$$

Slijedi:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}^*}{\delta_{11}^*}$$
$$X_2 = -\frac{\delta_{20}^*}{\delta_{22}^*}$$
$$X_3 = -\frac{\delta_{30}^*}{\delta_{33}^*}$$

u matričnom obliku: $X = -D^{-1} \cdot \Delta$, tj.

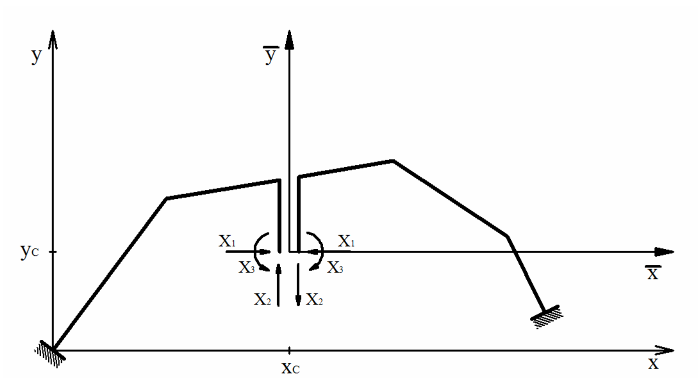
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{11}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{22}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{33}^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix}$$

Vidimo da se sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice raspada na tri neovisne jednadžbe sa po jednom nepoznanicom (ortogonalizacija matrice fleksibilnosti).

Točka u kojoj nepoznate sile imaju pretpostavljeno svojstvo zove se **centar elastičnog pomaka** ili **elastično težište**.

Sile u elastičnom težišu označuju se sa X_1, X_2 i X_3 iako su različite od jednako označenih na osnovnom sistemu.

Početi ćemo određenjem koordinata elastičnog težišta koje ćemo označiti točkom $C(x_C,y_C)$.



$$\overline{x} = x - x_C$$
$$\overline{y} = y - y_C$$

Sile iz elastičnog težišta prenose se na okvir preko zamišljenog štapa beskonačne krutosti.

Uvest ćemo novi koordinatni sustav $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ s ishodištem u točki C.

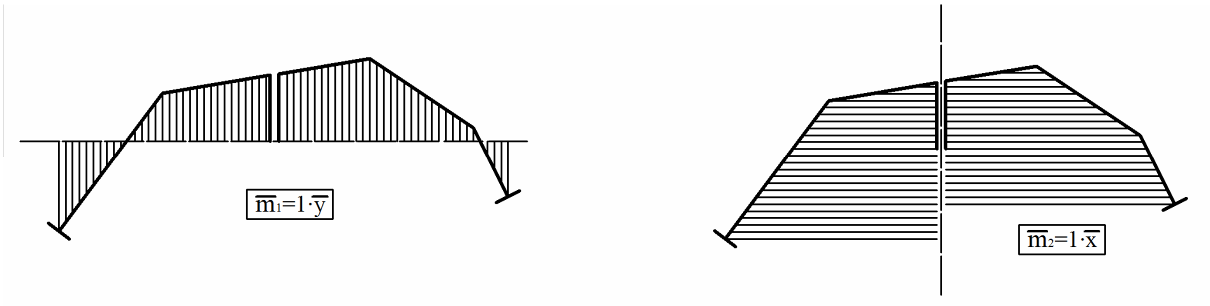
Rekli smo da su u elastičnom težištu $\delta_{ij}=0$ za $\forall$ i≠j. Za određenje x_C i y_C iskoristit ćemo jednadžbe:

$$\delta_{13}^{*} = \delta_{31}^{*} = 0$$
$$\delta_{23}^{*} = \delta_{32}^{*} = 0$$

$\overline{m}_1 = 1 \cdot \overline{y}$

$\overline{m}_2 = 1 \cdot \overline{x}$

$\overline{m}_3 = 1$



$$\delta_{23}^{*} = \int_i^j \frac{\overline{m}_2 \overline{m}_3}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{1 \cdot \overline{x} \cdot 1}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\overline{x}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{x - x_c}{EI(s9} ds = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{x_C}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds - x_C \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = 0$$

$$\int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds = x_C \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} \qquad \rightarrow \qquad x_C = \frac{\int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{ds}{EI(s)}}$$

$$\delta_{13}^{*} = \int_i^j \frac{\overline{m}_1 \overline{m}_3}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{1 \cdot \overline{y} \cdot 1}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\overline{y}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y - y_c}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{y_C}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds - y_C \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = 0$$

$$\int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds = y_C \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} \qquad \rightarrow \qquad y_C = \frac{\int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{ds}{EI(s)}}$$

Shvati li se veličina $dg = \frac{ds}{EI(s)}$ kao element „teške linije“, $G = \int_i^j dg = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)}$ težina je „teške linije“.

Također možemo shvatiti $S_G(y) = \int_i^j x \cdot dg = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds$ kao statički moment „teške linije“ oko osi y

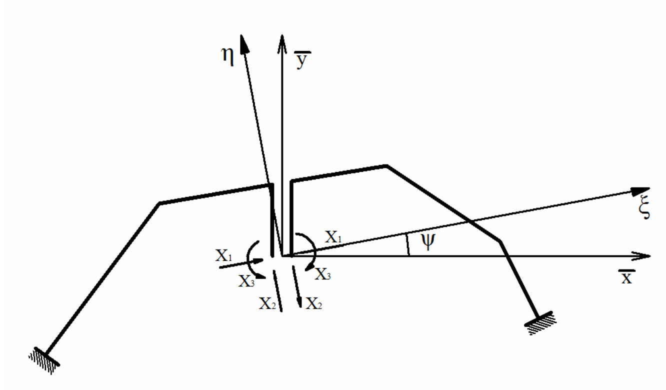
te $S_G(x) = \int_i^j y \cdot dg = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} \cdot ds$ kao statički moment „teške linije“ oko osi x.

Prema tim oznakama slijedi:

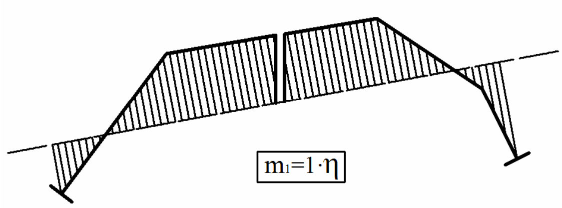
$$x_C = \frac{S_G(y)}{G}$$

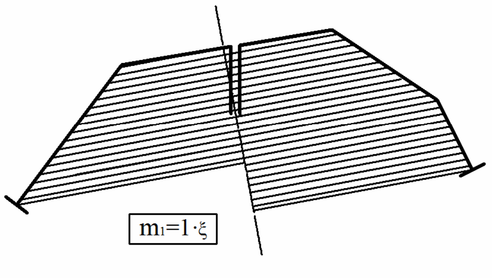
$$y_C = \frac{S_G(x)}{G}$$

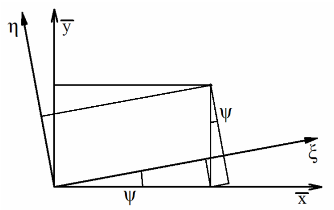
Potrebno je odrediti i kut ψ. Kut ψ kut je što ga sila X_1 zatvara sa osi $\bar{x}$. Njega ćemo odrediti iz jednadžbe: $\delta_{12}^* = \delta_{21}^* = 0$



$$m_1 = 1 \cdot \eta$$
$$m_2 = 1 \cdot \xi$$
$$m_3 = 1$$







$$\xi = \bar{x}\cos\psi + \bar{y}\sin\psi$$
$$\eta = -\bar{x}\sin\psi + \bar{y}\cos\psi$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{12}^* = \int_i^j \frac{m_1 m_2}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\eta \cdot \xi}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{(-\bar{x}\sin\psi + \bar{y}\cos\psi)\cdot(\bar{x}\cos\psi + \bar{y}\sin\psi)}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{(-\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\sin\psi\cos\psi + \bar{x}\bar{y}(\cos^2\psi - \sin^2\psi)}{EI(s)} ds =$$

$$\tfrac{1}{2}\sin 2\psi - \left[\int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds\right] + \cos 2\psi \int_i^j \frac{\bar{x}\bar{y}}{EI(s)} ds = 0$$

$$tg2\psi = \frac{2\int_i^j \frac{\bar{x}\,\bar{y}}{EI(s)}ds = 0}{\int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)}ds - \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)}ds}$$

Ako $I_G(\bar{x}) = \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)}ds$ predstavlja moment inercije „teške linije“ oko osi $\bar{x}$, $I_G(\bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)}ds$ moment inercije „teške linije“ oko osi $\bar{y}$, a $I_G(\bar{x},\bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x}\,\bar{y}}{EI(s)}ds$ centrifugalni moment inercije „teške linije“ oko točke C, tada je

$$\psi = \tfrac{1}{2} arctg\left(\frac{2I_G(\bar{x},\bar{y})}{I_G(\bar{y}) - I_G(\bar{x})}\right)$$

Dijagonalni elementi matrice fleksibilnosti određuju se također prema ranije izvedenim izrazima u koje uvrstimo pripadne karakteristike „teške linije“

$$\delta_{11}^* = \int_i^j \frac{m_1^{\ 2}}{EI(s)}ds = \int_i^j \frac{\eta^2}{EI(s)}ds = I_G(\xi) = I_G(\bar{x})\cos^2\psi + I_G(\bar{y})\sin^2\psi - I_G(\bar{x},\bar{y})\sin 2\psi$$

$$\delta_{22}^* = \int_i^j \frac{m_{22}^{\ 2}}{EI(s)}ds = \int_i^j \frac{\xi^2}{EI(s)}ds = I_G(\eta) = I_G(\bar{x})\sin^2\psi + I_G(\bar{y})\cos^2\psi + I_G(\bar{x},\bar{y})\sin 2\psi$$

$$\delta_{33}^* = \int_i^j \frac{m_{33}^{\ 2}}{EI(s)}ds = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = G$$

Elementi vektora Δ ($\delta_{10}^*, \delta_{20}^*$ i δ_{30}^*) određuju se kao i kod ostalih konstrukcija

Za simetrične lukove/okvire/linijske elemente za potpuno određenje elastičnog težišta treba odrediti samo y_C jer su x_C=L/2 i $\psi = 0$.

Fizikalno značenje:

δ_{ij} ... poopćeni pomak hvatišta sile X_i u smjeru njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem poopćene sile X_j

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ... teorem uzajamnosti pomaka

$\rightarrow \quad \delta_{12}^* = \delta_{21}^* = 0$

δ_{12}^* ... pomak hvatišta sile X_1 u smjeru njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem sile X_2

$\delta_{12}^* = 0$ ... sila X_2 ne izaziva pomak u smjeru sile X_1

δ_{21}^* ... pomak hvatišta sile X_2 u smjeru njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem sile X_1

$\delta_{21}^* = 0$ ... sila X_1 ne izaziva pomak u smjeru sile X_2

$\rightarrow \quad \delta_{13}^{*} = \delta_{31}^{*} = 0$

δ_{13}^{*} ...	pomak hvatišta sile X_1 u smjeru njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem momenta X_3
$\delta_{13}^{*} = 0$ ...	moment X_3 ne izaziva pomak u smjeru sile X_1
δ_{31}^{*} ...	zaokret u hvatištu sile X_3 uzrokovan djelovanjem sile X_1
$\delta_{31}^{*} = 0$ ...	sila X_1 ne izaziva zaokret u hvatištu sile X_3

$\rightarrow \quad \delta_{23}^{*} = \delta_{32}^{*} = 0$

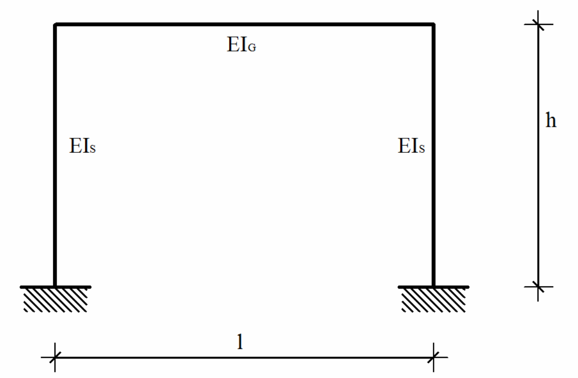
δ_{23}^{*} ...	pomak hvatišta sile X_2 po pravcu njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem momenta X_3
$\delta_{23}^{*} = 0$ ...	moment X_3 ne izaziva pomak u smjeru sile X_2
δ_{32}^{*} ...	zaokret u hvatištu sile X_3 uzrokovan djelovanjem sile X_2
$\delta_{32}^{*} = 0$ ...	sila X_2 ne izaziva zaokret u hvatištu sile X_3

Elastično težište – točka pridružena elastičnom luku/okviru/linijskom elementu tako da sila koja u njoj djeluje ne izaziva zaokret pripadnog presjeka, a moment koji u njoj djeluje ne izaziva pomak.

Korištenjem elastičnog težišta (centra elastičnog pomaka) kod višestruko neodređenih nosača, može se postići da matrica fleksibilnosti nije puna. Time se ubrzava postupak inverzije matrice popustljivosti ili bilo koji iterativni postupak rješavanja jednadžbi kontinuiteta.

Primjer:

Odredite elastično težište.



$l = 6{,}5$ m
$h = 4{,}5$ m
$EI_S = 103\ 500$ kNm^2
$EI_G = 133\ 500$ kNm^2

1. NAČIN:

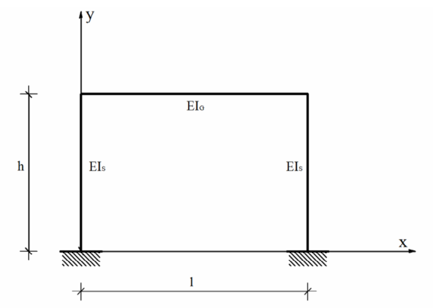
Duljina teške linije:

$$G = \int_i^j dg = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} \quad \rightarrow \quad G = \sum \frac{L_{ij}}{EI_{ij}}$$

$$G = \frac{h}{EI_S} \cdot 2 + \frac{l}{EI_G}$$

$$G = \frac{4{,}5}{103500} \cdot 2 + \frac{6{,}5}{133500}$$

$$G = 135{,}65 \cdot 10^{-6} \ \frac{1}{kNm}$$



Statički momenti „teške linije" oko osi x i y:

$$S_G(x) = \int_i^j y \cdot dg = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds$$

$$S_G(x) = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{EI_S} \cdot 2 + h \cdot \frac{l}{EI_G}$$

$$S_G(x) = \frac{h^2}{EI_S} + \frac{h \cdot l}{EI_G}$$

$$S_G(x) = \frac{4{,}5^2}{103500} + \frac{4{,}5 \cdot 6{,}5}{133500}$$

$$S_G(x) = 414{,}75 \cdot 10^{-6} \ \frac{1}{kN}$$

$$S_G(y) = \int_i^j x \cdot dg = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds$$

$$S_G(y) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{EI_G} + l \cdot \frac{h}{EI_S}$$

$$S_G(y) = \frac{l^2}{2EI_G} + \frac{h \cdot l}{EI_S}$$

$$S_G(y) = \frac{6{,}5^2}{2 \cdot 133500} + \frac{4{,}5 \cdot 6{,}5}{103500}$$

$$S_G(y) = 440{,}85 \cdot 10^{-6} \ \frac{1}{kN}$$

Koordinate elastičnog težišta (centra elastičnog pomaka):

$$y_C = \frac{S_G(x)}{G} \qquad\qquad x_C = \frac{S_G(y)}{G}$$

$$y_C = \frac{414{,}75 \cdot 10^{-6}}{135{,}65 \cdot 10^{-6}} \qquad\qquad x_C = \frac{440{,}85 \cdot 10^{-6}}{135{,}65 \cdot 10^{-6}}$$

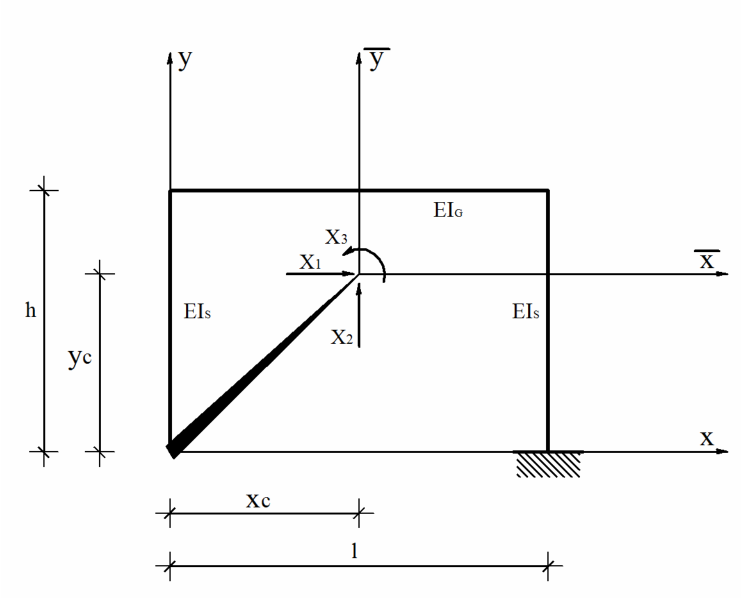
$$y_C = 3{,}06\ m \qquad\qquad x_C = 3{,}25\ m$$

$$x_C = \frac{S_G(y)}{G}$$

$$x_C = \frac{\frac{l^2}{2EI_G} + \frac{h \cdot l}{EI_S}}{\frac{2h}{EI_S} + \frac{l}{EI_G}}$$

$$x_C = \frac{l}{2}$$

$$x_C = \frac{6{,}5}{2} = 3{,}25\ m$$



$$\bar{x} = x - x_C$$

$$\bar{y} = y - y_C$$

Centrifugalni moment inercije „teške linije“ oko točke C:

$$I_G(\bar{x}, \bar{y}) = \int_i^j \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot dg = \int_i^j \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{EI(s)} \cdot ds = \int_i^j \frac{(x - x_C)(y - y_C)}{EI} ds$$

$$I_G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\ \frac{m}{kN}$$

Kut ψ = kut što ga sila X_1 zatvara sa osi $\bar{x}$

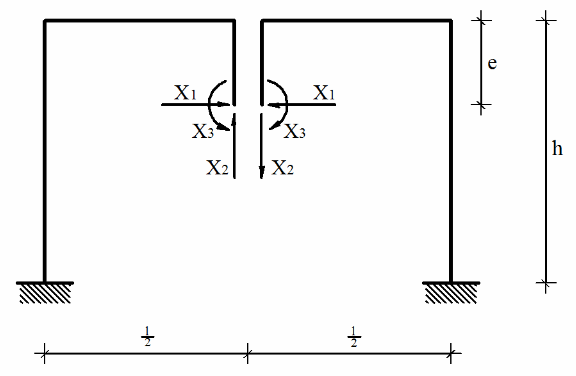
$$\psi = \frac{1}{2} \cdot arctg \frac{2 \cdot I_G(\bar{x}, \bar{y})}{I_G(\bar{y}) - I_G(\bar{x})}$$

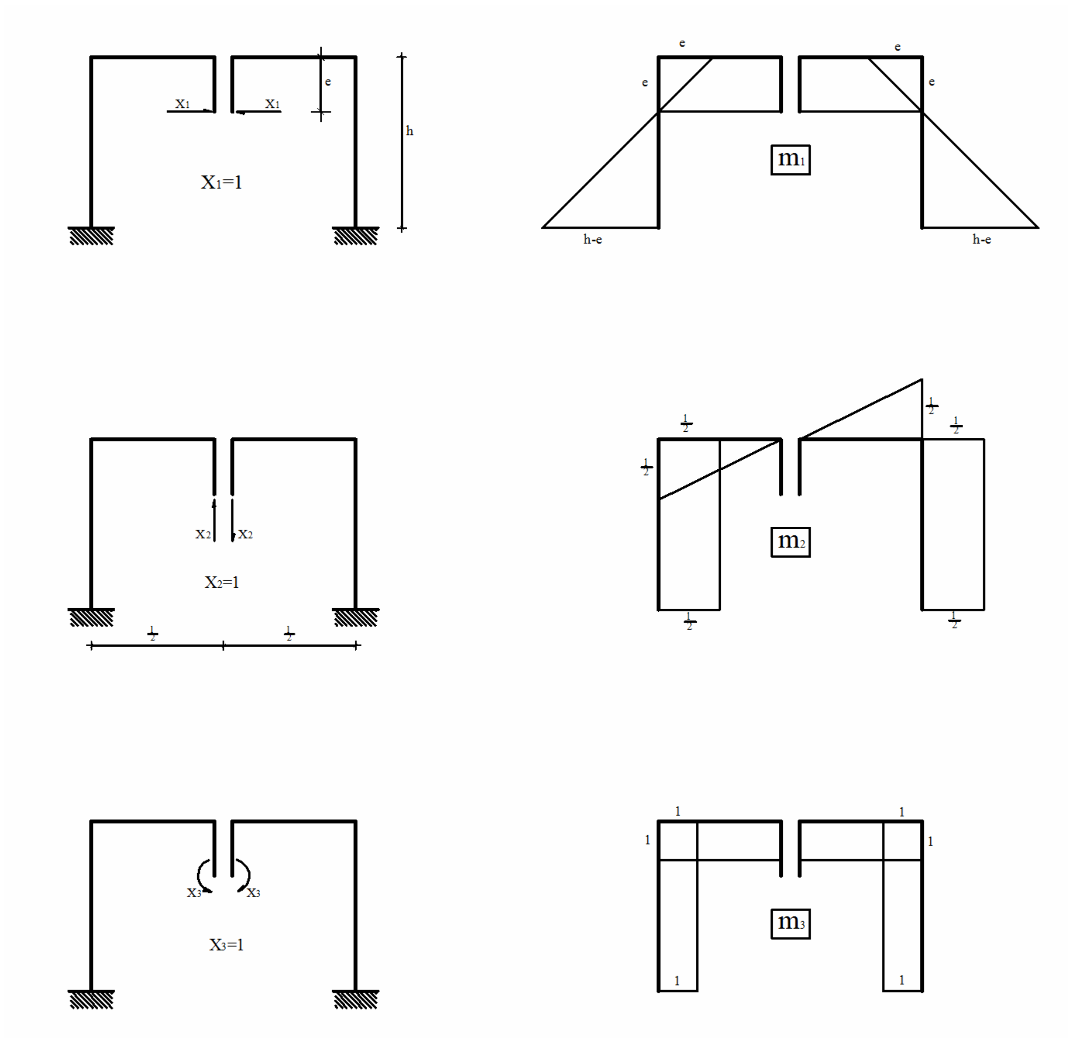
$$\psi = \frac{1}{2} \cdot arctg \frac{0}{I_G(\bar{y}) - I_G(\bar{x})}$$

$$\psi = 0°$$

2. NAČIN:

$$\delta_{12}^{*} = \delta_{21}^{*} = 0$$
$$\delta_{13}^{*} = \delta_{31}^{*} = 0$$
$$\delta_{23}^{*} = \delta_{32}^{*} = 0$$





$$\delta_{13}^* = \delta_{31}^* = 0$$

$$\delta_{13}^* = \delta_{31}^* = \tfrac{2}{EI_S} \cdot \left[\left(\left(\tfrac{1}{2} \cdot (h-e) \cdot (h-e)\right) \cdot (-1) + \left(\tfrac{1}{2} \cdot e \cdot e\right) \cdot 1\right)\right] + \tfrac{2}{EI_G}\left[\left(e \cdot \tfrac{l}{2}\right) \cdot 1\right]$$

$$\tfrac{1}{EI_S} \cdot \left[-(h-e)^2 + e^2\right] + \tfrac{1}{EI_G} e \cdot l = 0$$

$$e = \tfrac{h^2 \cdot EI_G}{2h \cdot EI_G + l \cdot EI_S}$$

$$e = 1{,}44m$$

$$\delta_{23}^* = \delta_{32}^* = 0 \quad \rightarrow \quad x_C = \tfrac{l}{2}$$

$$\delta_{12}^* = \delta_{21}^* = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = 0°$$