

## Numerički modeli izdvojene ploče i grede inženjerskih konstrukcija

Karlo Kopljari<sup>1</sup>, prof.dr.sc. Mladen Meštrović<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut IGH d.d., Zavod za materijale i konstrukcije, [karlo.kopljari@igh.hr](mailto:karlo.kopljari@igh.hr)

<sup>2</sup> Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, [mestar@grad.hr](mailto:mestar@grad.hr)

### Sažetak

Razmotreni su osnovni numerički modeli inženjerskih konstrukcija na realnoj konstrukciji. Promatran je primjer armiranobetonske ploče koja je slobodno oslonjena po rubovima, a u sredini oslonjena na armiranobetonsku gredu. Realna konstrukcija je aproksimirana na deset različitih načina te su uspoređeni rezultati proračuna. Uspoređene su vrijednosti momenata savijanja, potrebne armature i vrijednosti elastičnih progiba. Upozorilo se i na moguće pogreške koje bi se mogle izbjegnuti znanjem i iskustvom te je objašnjen pojam kinematičkoga ograničenja na realnomu primjeru. Za provedbu proračuna upotrijebljen je programski paket CSI SAP2000, utemeljen na metodi konačnih elemenata. Uočene su znatne razlike u rezultatima proračuna ovisno o primijenjenoj aproksimaciji.

*Ključne riječi: numerički model, metoda konačnih elemenata, SAP 2000, ploča, greda, aproksimacija*

## Design models of extracted slab and beam for engineering structures

### Abstract

Basic design models of engineering structures are studied on a real-life structure. An example of a reinforced concrete slab, pinned at the edges and supported in the middle by a reinforced concrete beam, is considered. The real structure is approximated in ten different ways, and calculation results are compared. Bending moment values, required reinforcement, and elastic deflection values, are compared. Possible mistakes that could be avoided by knowledge and experience are indicated, and the concept of constraints is explained on a real example. A software package based on the finite element method, CSI SAP2000, is used for structural calculations. Significant differences in design results, depending on the type of approximation used, have been registered.

*Key words: design model, finite element method, SAP 2000, slab, beam, approximation*

## 1 Uvod

Riječ SAP potječe iz engleskoga govornog područja i u žargonu označava lakovjernu osobu. Naziv SAP (skraćeni naziv poznatoga računalnog programa za proračun konstrukcija SAP2000) odabran je da bi se korisnik sjetio da program, kao i svi računalni programi, nema inteligenciju. Odgovornost je na inženjeru da ispravno aproksimira konstrukciju i prihvati odgovornost za rezultate proračuna [1].

Točnost računala je nedvojbeno. Računala mogu izračunati po volji točan rezultat, mnogo točnije i brže od čovjeka. No, je li velika točnost potrebna u građevinarstvu i koliko joj se smije vjerovati? Postoji nekoliko izvora pogrešaka. Pogreške se mogu podijeliti na one koje se mogu i na one koje se ne mogu izbjeći. Pogreške koje se mogu izbjeći ponajprije su proizvod neznanja poput loše koncepcije objekta, lošega modeliranja, neispravnoga programskog koda, postupka proračuna ili pogreške poput krivog množenja. Neizbježne pogreške nastaju pri aproksimaciji projektirane konstrukcije matematičkim modelom, pri aproksimaciji matematičkoga modela numeričkim, pri rješavanju numeričkoga modela, zbog netočnosti izvedene konstrukcije u odnosu na projektiranu. Pogreške pri aproksimaciji projektirane konstrukcije matematičkim modelom i pogreške zbog netočnosti izvedene konstrukcije u odnosu na projektiranu možemo svesti na jednu: pogreške koje nastaju zbog razlike između matematičkoga modela i izvedene konstrukcije. Te su pogreške bile mnogo veće prije uporabe računala, ali i danas dominiraju i mnogo su češće od ostalih [2]. Mišljenje je autora da, iako računalni programi za proračun konstrukcija postoje već jako dugo vremena, većina korisnika nije dovoljno upoznata s teorijama i pretpostavkama koje stoje iza njih. Iako postoji mnogo radova koji skreću pozornost na tu problematiku, mišljenje je autora da ih ne postoji dovoljno koji su prikazali navedenu problematiku na realnomu primjeru.

Cilj je rada zainteresirati čitatelje koje ne zanimaju komplicirane matematičke jednadžbe nego primjeri koje mogu primijeniti u svomu svakodnevnom radu. Promatrat će se utjecaj odabranoga modela na momente savijanja koji se javljaju u armiranobetonskoj gredi i armatura koja je potrebna za izračunani moment savijanja. Također će se promatrati i elastični progib. Autori su upoznati s činjenicom da se pri pojavi pukotina u armiranobetonskim elementima javlja nelinearan problem i da bi ispravan pristup problematici progiba bio preko nelinearnoga proračuna. No cilj rada nije izračunati točan progib nego usporediti aproksimacije modela.

U inženjerskim krugovima uvriježeno je mišljenje kako je proračun dugotrajnoga progiba kompliciran i dugotrajan proces i zbog toga se često izbjegava. Većinom se problem određivanja dugotrajnoga progiba rješava tako da se kratkotrajni elastičan progib uveća tri do četiri puta. U duhu toga, promotrit će se kako na elastični progib grede utječe uzimanje u obzir momenta tromosti za raspucani presjek u vlaku do neutralne osi za kratkotrajno djelovanje.

## 2 Matematički podmodeli

Dijelovi realnih konstrukcija aproksimiraju se odabirom odgovarajućega podmodela. U radu su uzeti u razmatranje podmodeli štapa i podmodeli ploče.

### 2.1 Podmodel štapa

Ako tijelo ima jednu dimenziju mnogo veću od preostale dvije, uvodi se podmodel štapa. Štap nije potrebno analizirati kao trodimenzionalni kontinuum. Dovoljno ga je smatrati linijom koja se naziva os štapa. Preostale dvije dimenzije uzimaju se u obzir odabirom poprečnoga presjeka štapa [2].

### 2.2 Podmodel ploče

Podmodel ploče dobiva se ako se pretpostavke podmodela štapa primijene u dvije dimenzije. Ploča je tijelo kojem je debljina puno manja od preostale dvije dimenzije. Po tlocrtnome obliku najčešće je pravokutna ili kvadratna, ali može biti i trokutna, kružna ili prstenasta [2].

### 2.3 Ostali podmodeli

Osim podmodela štapa i ploče postoje još dva podmodela: ljuska i ravninsko stanje koje se ovisno o pretpostavkama dijeli na ravninsko stanje naprezanja, ravninsko stanje deformacija i osnosimetrično stanje. Svaki od tih podmodela ima svoje podnačice [2].

## 3 Primjena kinematičkih ograničenja

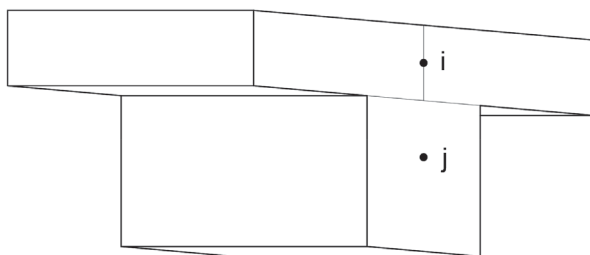
Numerički se modeli uvijek svode na sustav linearnih jednadžbi ravnoteže oblika

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{u}$  vektor nepoznatih pomaka, a  $\mathbf{f}$  vektor opterećenja.

Iako je vektor pomaka nepoznanica, ponekad se mogu unaprijed odrediti neki pomaci i/ili definirati njihovi odnosi. Tada se govori o ograničenjima vektora pomaka. Takva se ograničenja najčešće uvode odabirom odgovarajućega podmodela [2]. Pretežito se primjenjuje podskup kinematičkih ograničenja koja se temelje na pretpostavci o apsolutno krutim vezama među stupnjevima slobode.

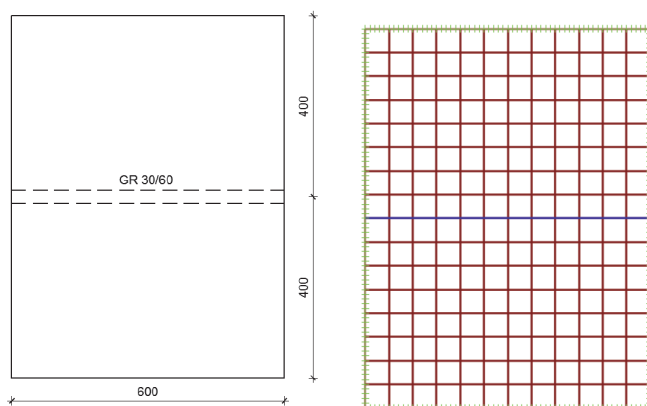
U praksi se često nailazi na model ploče s gredama (slika 1.). Prirodno je upotrijebiti plošni konačni element sa četiri čvora za modeliranje ploče i štapni konačni element s dva čvora za modeliranje grede. Oba elementa imaju 6 stupnjeva slobode po čvoru. Problem je što nemaju zajedničkih čvorova u prostoru kojima bi se povezala ta dva tipa elemenata. Problem se rješava tako da se čvor  $i$ , u osi ploče, spoji sa čvorom  $j$  u neutralnoj osi grede apsolutno krutim elementom. Na taj se način osigurava prirodna interakcija plošnoga i štapnog konačnog elementa. Uz smanjenje broja nepoznanica, rješava se i problem odabira sudjelujuće širine ploče [1].



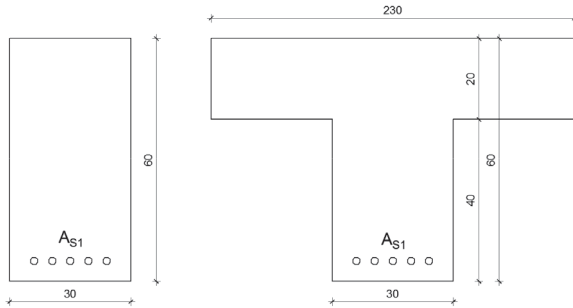
Slika 1. Model spoja ploče i grede

#### 4 Numerički model izdvojene ploče i grede

Izrađen je numerički model ploče debljine 20 cm dimenzija 6,00 x 8,00 m slobodno oslonjene po rubovima, a u sredini oslonjene na gredu širine 30 cm i visine 60 cm (slike 2. i 3.). Ploča i greda izrađene su od armiranoga betona razreda C25/30, pri čemu je upotrijebljena armatura B500B. Ploča je opterećena vlastitom težinom, dodatnim stalnim opterećenjem od  $2 \text{ kN/m}^2$  i korisnim opterećenjem od  $2 \text{ kN/m}^2$ .



Slika 2. Tlocrt ploče s dimenzijama (lijevo) i numerički model (desno)



**Slika 3. Pravokutni poprečni presjek grede (lijevo) i T-presjek grede sa sudjelujućom širinom (desno)**

Analizirano je 10 različitih varijanata numeričkoga modela. U svim je modelima ploča modelirana plošnim konačnim modelima. Promatrane su razlike u rezultatima proračuna zbog aproksimacije matematičkog modela numeričkim temeljem čega se upozorava na moguće pogreške u analiziranju rezultata. Promotren je i utjecaj redukcije krutosti grede i utjecaj nadvišenja grede na rezultate proračuna. Prilikom odabira mogućih numeričkih modela uzeto je u obzir ono što bi primijenili manje upućeni korisnici programskih paketa.

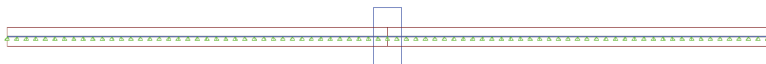
Prvi numerički model jedan je od najčešćih modela. Greda je modelirana štapnim konačnim elementom kao pravokutni poprečni presjek u kojem je težište grede postavljeno u os ploče. Takav model korisnik postiže ako uloži minimalan trud u modeliranje. Modeliranje takvim postupkom nije u potpunosti ispravno budući da računalni program ne uzima u obzir sudjelujuću širinu ploče.

U drugomu numeričkom modelu greda je modelirana štapnim konačnim elementom kao pravokutni poprečni presjek, no težište je grede pomaknuto od osi ploče kako bi odgovaralo realnoj konstrukciji. Težište grede i os ploče povezuje se ranije opisanim kinematičkim ograničenjima koje računalni program samostalno postavlja. Modeliranjem takvim postupkom uzima se u obzir sudjelujuća širinu ploče, no u gredi se javlja vlačna sila koja se ne smije zaboraviti pri interpretaciji rezultata proračuna.

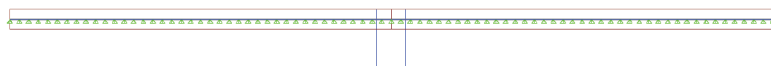
U trećemu numeričkom modelu greda je modelirana plošnim konačnim elementima okomito na os ploče. Greda je zadana kao plošni element debljine 30 cm, a po visini je podijeljena na 5 konačnih elemenata, što je minimalno za pravilnu interpretaciju rezultata proračuna. Problematika je ovakvoga modeliranja interpretacija rezultata budući da za prikaz momenata savijanja i sila treba integrirati naprezanja i/ili sile što korisnik mora samostalno napraviti.

U četvrtomu numeričkom modelu greda je modelirana odvojeno od ploče. Takav je numerički model najbliži "ručnomu" proračunu greda (hijerarhijski model konstrukcije), pri čemu je greda za ploču apsolutna kruta i nepomična te ima funkciju linijskoga nepomičnog ležaja. U tom slučaju reakcije u linijskom ležaju ploče opterećenja su na gredu. Greda je modelirana kao T-presjek štapnim konačnim elementom u zasebnom modelu.

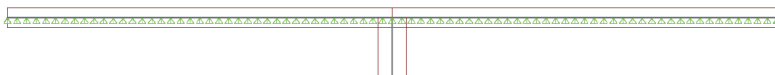
Sljedeća su tri modela podvarijante modela 1, 2 i 4. Na ta je tri modela primijenjen reducirani moment tromosti za raspucani presjek u vlaku do neutralne osi za kratkotrajno djelovanje. Pretpostavljena je armatura u donjoj zoni  $5\varnothing 20$ . Armatura u gornjoj zoni se zanemaruje. Na modelu 1 primijenjen je reducirani moment tromosti za pravokutni poprečni presjek budući da programski paket ne uzima u obzir sudjelujuću širinu presjeka. Na modelu 2 i 4 primijenjen je reducirani moment tromosti za T-presjek grede. Za pravokutni poprečni presjek redukcija momenta tromosti iznosi 64,32 %, dok za T-presjek grede redukcija momenta tromosti iznosi 78,12 % [3, 4]. Posljednja su tri modela također podvarijante modela 1, 2 i 4. Na ta tri modela analiziran je utjecaj početnoga nadvišenja grede. Na trećinama je greda nadvišena za 1 cm, dok je na polovici presjeka greda nadvišena za 1,5 cm. Nadvišenje se postiže crtanjem modela. Prikaz Modela 1 do Modela 10 dan je na slikama 4. do 13.



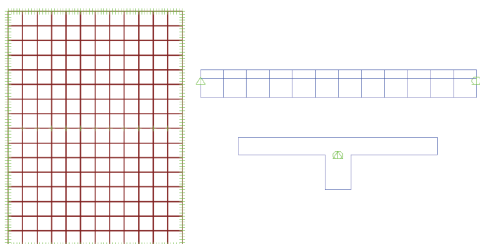
Slika 4. Model 1 - greda modelirana "štapno"



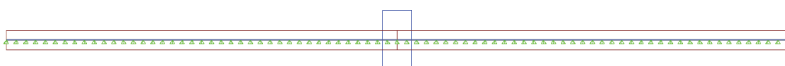
Slika 5. Model 2 - greda modelirana "štapno" s pomaknutim težištem



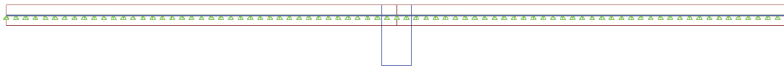
Slika 6. Model 3 - greda modelirana "plošno"



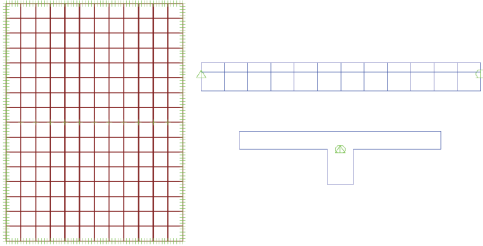
Slika 7. Model 4 - greda modelirana "štapno" odvojeno od ploče



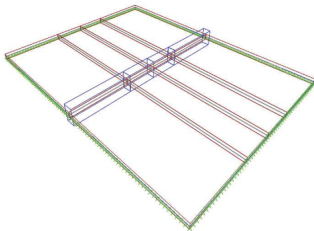
Slika 8. Model 5 - greda modelirana "štapno" s reduciranim momentom tromosti grede za raspucani presjek



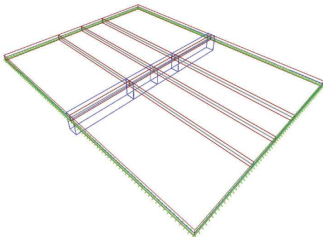
Slika 9. Model 6 - greda modelirana "štapno" s pomaknutim težištem i reduciranim momentom tromosti grede za raspucani presjek



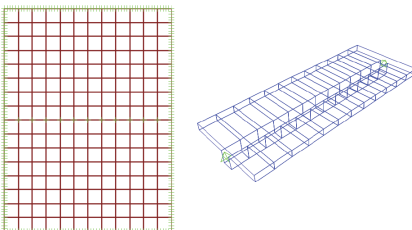
Slika 10. Model 7 - greda modelirana "štapno" odvojeno od ploče s reduciranim momentom tromosti grede za raspucani presjek



Slika 11. Model 8 - greda modelirana "štapno" s početnim nadvišenjem



Slika 12. Model 9 - greda modelirana "štapno" s pomaknutim težištem i početnim nadvišenjem



Slika 13. Model 10 - greda modelirana "štapno" odvojeno od ploče i s početnim nadvišenjem

## 5 Usporedba rezultata numeričkih modela

Odvojeno su promatrani rezultati ploče i grede. Za ploču su promatrani momenti savijanja u polju i nad ležajem. Za gredu su promatrani moment savijanja, uzdužna sila i progib. Potrebna je armatura za sve numeričke modele izračunana "ručnim" postupkom prema normi HRN EN 1992 [5] budući da u računalnom programu SAP2000 nije moguće izračunati potrebnu armaturu u elementima modeliranim plošnim konačnim elementima. Za numeričke modele u kojima se ne uzima u obzir sudjelujuća širina ploče dimenzioniranje je provedeno za gredu pravokutnoga presjeka bez sudjelujuće širine. Prikaz rezultata dan je u tablici 1.

**Tablica 1. Usporedba rezultata numeričkih modela**

Oznaka modela	Ploča			Greda				
	M <sub>xm</sub> [kNm/m']	M <sub>ym</sub> [kNm/m']	M <sub>ey</sub> [kNm/m']	Moment savijanja		Uzdužna sila		w [mm]
				M [kNm]	As <sub>req</sub> [cm <sup>2</sup> ]	N [kN]	As <sub>req</sub> [cm <sup>2</sup> ]	
Model 1	18,07	14,84	3,67	130,84	5,75	0,00	0,00	2,16
Model 2	12,74	13,48	-4,52	87,78	3,71	474,27	10,91	1,44
Model 3	10,09	12,82	-9,58	61,44	2,59	841,82	19,36	1,02
Model 4	5,20	11,70	-21,87	279,11	11,91	0,00	0,00	2,14
Model 5	26,15	16,98	13,94	66,17	2,85	0,00	0,00	3,05
Model 6	16,12	14,30	0,81	27,94	1,17	620,82	14,28	1,88
Model 7	5,20	11,70	-21,87	279,11	11,91	0,00	0,00	9,47
Model 8	17,13	15,03	8,98	129,98	5,50	-28,13	0,00	2,15
Model 9	14,41	12,74	2,08	90,42	3,82	469,12	10,79	1,48
Model 10	9,73	9,06	-15,03	279,07	11,91	0,00	0,00	2,14

Hijerarhijski je pristup analizi konstrukcija u predračunalno vrijeme bio gotovo jedini način proračuna konstrukcija. Taj je pristup približan, jer ne postoji samo jednosmjerni utjecaj hijerarhijski nižega na viši element i obrnuto. Uglavnom se smatra da je kod sustava s jasnom hijerarhijom taj pristup na strani sigurnosti [2]. Te su pretpostavke potvrđene u ovom radu. Modeli 4, 7 i 10 kombinacija su računalno-hijerarhijskoga pristupa. Rezultati proračuna daju najveću količinu armature u donjoj zoni presjeka. U modelima 1, 5 i 8, u kojima se ne uzima u obzir sudjelujuća širina presjeka, potrebna je veća količina armature u donjoj zoni nego u modelima u kojima je sudjelujuća širina uzeta u obzir. Ako se pogledaju vrijednosti momenata u ploči nad gredom, može se zaključiti da u modelima bez sudjelujuće širine nije u potpunosti formiran ležaj u ploči. U modelu 2, u kojem je greda modelirana štapnim konačnim elementima s pomaknutim težištem, formirao se ležaj u ploči nad gre-

dom. Proračunom je dobivena manja armatura grede za moment savijanja u donjoj zoni nego u elementima bez sudjelujuće širine. No, nikako se ne smije zaboraviti na uzdužnu vlačnu silu i njezinu potrebnu armaturu koju treba raspodijeliti po cijelom presjeku grede. U modelu 3, u kojem je greda modelirana plošnim konačnim elementom, formirao se ležaj u ploči nad gredom. Kao što je prije navedeno, interpretacija rezultata kod ovoga numeričkog modela nije jednostavna budući da treba "ručno" integrirati naprezanja i/ili sile po visini presjeka. Usporedbom s modelom 2, koji je najbližiji modelu 3, rezultati pokazuju da je u modelu 3 potrebna manja količina armature za moment savijanja, a veća količina armature od uzdužne vlačne sile. Uzimanje u obzir reduciranoga momenta tromosti presjeka rezultiralo je na modelima 5 i 6 smanjenjem unutarnjih sila i količine armature u gredi u odnosu na modele 1 i 2. Smanjenjem momenta tromosti grede ploča je preuzela veći dio opterećenja. U modelu 5 u potpunosti je nestao ležaj nad gredom. U sva tri modela u kojima je uzet u obzir reducirani moment tromosti presjeka uočeno je povećanje progiba. U modelu 7, u kojem je greda modelirana odvojeno od ploče, uočeno je povećanje progiba od 343%. To povećanje progiba odgovara inženjerskim iskustvima iz prakse. Izvedba grede s nadvišenjem nije rezultirala razlikom u rezultatima. To potvrđuje da grešku geometrije ne treba uzimati u obzir ako je u razumnim iznosima.

## 6 Zaključak

Rezultati istraživanja pokazuju da u naizgled trivijalnomu primjeru ploče s gredom različiti numerički modeli daju velike razlike u rezultatima. Najjednostavniji se model pokazao kao netočan, jer ne uzima u obzir sudjelujuću širinu presjeka. Realniji su modeli pokazali da treba više truda uložiti za interpretaciju rezultata. Hijerarhijski je model konstrukcije pokazao da je najviše na strani sigurnosti. Redukcijom momenta tromosti na izdvojenoj gredi dobiven je omjer među progibima koji odgovara inženjerskim iskustvima iz prakse. Može se zaključiti da treba vrlo oprezno pristupiti proračunu konstrukcija i shvatiti da je odgovornost inženjera, a ne računalnoga programa da pravilno aproksimira konstrukciju i prihvati odgovornost za rezultate proračuna.

U budućim istraživanjima bilo bi poželjno na numeričkim modelima iz ovog rada provjeriti dugotrajan progib nelinearnim proračunom i usporediti ga s dobivenim rezultatima elastičnog progiba uz redukciju momenta tromosti.

## Literatura

- [1] Wilson, E.L.: SAP, A General Structural Analysis Program, Report to Walla Walla District, U.S. Engineers Office, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, 1970.

- [2] Lazarević, D., Dvornik, J.: Plošni nosači. Bilješke s predavanja, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb, 2014. (link za preuzimanje: [http://www.grad.unizg.hr/\\_download/repository/plosni.pdf](http://www.grad.unizg.hr/_download/repository/plosni.pdf))
- [3] Sorić, Z., Kišiček, T.: Betonske konstrukcije 1, Projektiranje betonskih konstrukcija prema europskim normama EN. Skripta Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb, 2011.
- [4] Sorić, Z., Kišiček, T.: Betonske konstrukcije 2, Projektiranje betonskih konstrukcija prema europskim normama EN. Skripta Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb, 2012.