

Prijenos sile kroz zrnati materijal

Vedran Pavlič¹, prof.dr.sc. Tomislav Ivšić²

¹ Nikole Tesle 49, Malinska, vedran.pavlic@gmail.com

² Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za geotehniku, tom@grad.hr

Sažetak

U radu se daje pregled spoznaja o prijenosu sile i modeliranju lanaca sile u zrnatu materijalu. Lanci sile imaju ključnu ulogu kao mehanizam prijenosa sile u zrnatu materijalu i određuju mehanička svojstva materijala (stabilnost, elastičnost i protočnost). Oni predstavljaju početnu točku u proučavanju vremenski i prostorno ovisnih procesa koji su raspravljeni u tekstu. Formiranje i razvoj lanaca sile u sustavu zrna i šupljina predstavlja glavni problem istraživanja. Problem je moguće riješiti primjenom numeričke metode diskretnih elemenata i usporidbom s laboratorijskim ispitivanjima.

Ključne riječi: zrnati materijali, pijesak, bimodalna raspodjela sile, lanci sile, izvijanje, diskretan numerički model

Force transmission through granular material

Abstract

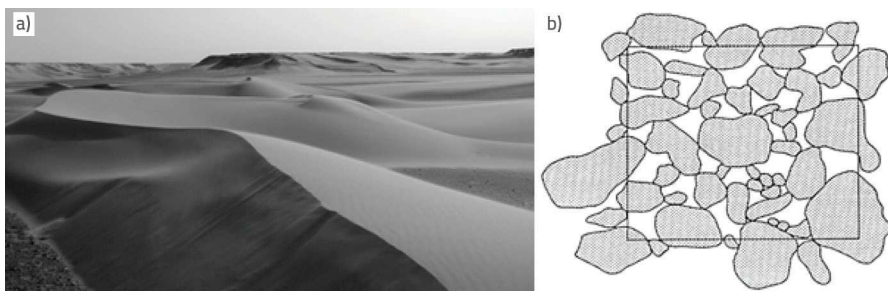
An overview of knowledge related to force transmission and modeling of force chains in granular material is presented in the paper. Force chains play a key role as the mechanism of force transfer in granular material, while also determining mechanical properties of the material (stability, elasticity and flow). They represent the starting point in the study of the time and space dependent processes discussed in this paper. The formation and development of force chains in the system of grains and voids constitutes the main issue of the research. This issue can be solved through numerical method of discrete elements and comparison with laboratory tests.

Key words: granular materials, sand, bimodal force transmission, force chains, buckling, discrete numerical model

1 Uvod

Zrnati je materijal nakupina diskretnih, čvrstih zrna promjera većeg od $100\ \mu\text{m}$ i šupljina između njih. Navedena veličina, prema geotehničkom kriteriju, predstavlja granicu između zrnatoga materijala i praha. Gornja granica veličine zrna nije određena. Primjeri su zrnatoga materijala pijesak, šljunak, riža, ljuške lješnjaka, blokovi leda, itd.

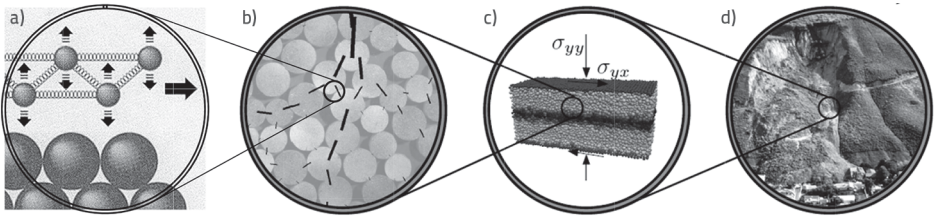
U radu je izdvojen pijesak kao tipičan primjer nakupine zrnatoga materijala. Bitna su svojstva pijeska stupanj zbijenosti i lokalni efekti premoštenja i uklještanja zrna. Stupanj zbijenosti ovisi o načinu taloženja, obliku i organizaciji zrna te granulometrijskom sastavu. O vrsti opterećenja (statičko, dinamičko) ovisi utjecaj lokalnih efekata na mehanički odziv pijeska. Navedene ovisnosti čine pijesak složenim materijalom za proučavanje.



Slika 1. Primjer zrnatog materijala: a) pješčane dine [1], b) skica strukture pijeska [2]

Složeno mehaničko ponašanje pijeska ovisi i o veličini (eng. *scale dependence*), tj. mjerilu promatranja i povezanosti varijabli svojstava materijala i mjerila. Za različite razine problema koji rješavamo biramo mjerilo i ključne parametre za modeliranje pijeska. Istraživanje za doktorski rad usredotočit će se na definiranje kontrolnih mehanizama ponašanja ciklički opterećenoga uzorka pijeska, ovisno o veličini amplitude ciklično - posmičnih deformacija. Kako bi se odredili kontrolni mehanizmi, istraživanje je podijeljeno na četiri mjerila promatranja, a konačan je cilj istraživanja povezivanje više razina mjerila.

- Na razini kontakta dva zrna ("nano" razina) istražuju se karakteristike kontakta i interakcije površine zrna, slika 1.a.
- Na "mikro" razini (niz od minimalno tri zrna) istražuju se ponašanje lanaca sile i stabilnost niza zrna, slika 1.b.
- "Mezo" razina (uzorak odviše milijuna zrna) je razina veličine uzorka u laboratorijskom ispitivanju tla, slika 1.c.
- Na "makro" razini (homogeni slojevi pijeska) analiziraju se realni geotehnički fenomeni i problemi, slika 1.d.



Slika 2. Mjerilo promatranja: a) "nano"razina [3], b) "mikro"razina [4], c) "mezo"razina [4], d) "makro"razina [4]

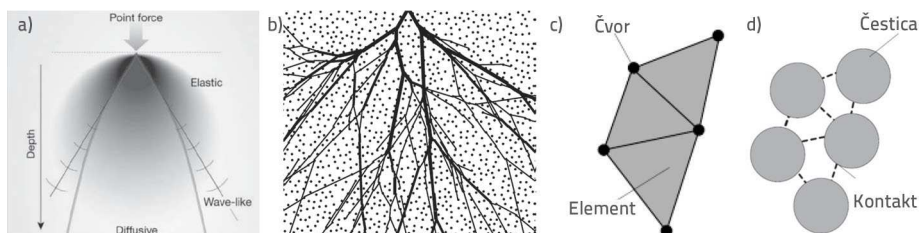
U ovom radu prikazuje se pijesak na mikro razina kojoj dominantan utjecaj na ponašanje materijala imaju lanci sile. Lanci sile predstavljaju mehanizam prijenosa sile kroz zrnati materijal i slabo su istraženi u odnosu na neke druge fenomene vezane uz gibanje zrna (npr. konvekcija, segregacija, grupiranje). Očekuje se da bi istraživanje lanaca sile trebalo omogućiti razumijevanje fenomena na realnoj makro razini, npr. dinamičkih fenomena, režima tečenja, blokiranja i podmazivanja zrnato-ga toka, širenja valova, lavine, rasjeda i potresa.

2 Prijenos sile u zrnatu materijalu

Za predviđanje ponašanja tla danas se još uvijek ponajprije upotrebljava koncepcija kontinuuma. U kontinuumu materijal je konstantan u promatranoj domeni. Analitičkim modelom (konstitucijskim jednadžbama) uspostavlja se veza između deformacije i naprezanja. Svakoj točki kontinuuma pridružuje se statistički makroskopski ekvivalent realnoga svojstva materijala. Koncepcija zanemaruje mikro parametre materijala, što za većinu problema na makro razini, npr. stabilnost kosina, nema utjecaja. Uobičajeni opisi prijenosa sile u zrnatu materijalu kao kontinuumu upućuju i na tri karakteristična problema koja se ne mogu zadovoljavajuće opisati tim modelom [5 - 7]:

- Silos ispunjen zrnatim materijalom - naprezanje i dubina nisu linearno zavisni.
- Stožac pijeska na horizontalnoj podlozi - najveće naprezanje nije u osi stošca.
- Točkasto opterećenje pijeska - postoji više načina širenja sile: difuzan (parabolična jednadžba), elastičan (eliptična jednadžba), putem valova (hiperbolična jednadžba).

Navedenim je istraživanjima zajedničko da nisu formirala jedinstvenu jednadžbu koja opisuje prijenos sile, primjenjuju kompleksne konstitucijske jednadžbe kako bi opisale ponašanje materijala i ne daju dobra rješenja za uočene probleme. Razlog je izrazita nehomogenost zrnatoga materijala (sustav zrna i šupljina) i izostavljanje relativnih pomaka i rotacija pojedinačnih zrna u modelima kontinuuma.



Slika 3. Prijenos sile u zrnatu materijalu: a) skica prijenosa sile u kontinuumu [5], b) skica prijenosa sile u diskontinuumu [6], c) modeliranje materijala u kontinuumu [7], d) modeliranje materijala u diskontinuumu [7]

Alternativa koncepciji kontinuum jest diskontinuum. U diskontinuumu se zrnati materijal sastoji od diskretnih elemenata (zrna) i šupljina (pora). Prijenos sile odvija se putem zrna, a ovisno o položaju zrna u sustavu razlikuje se i veličina sile koju prenose. Metode temeljene na diskontinuumu omogućavaju praćenje svakoga zrna pojedinačno (pomak, brzina), niza zrna (smjer i veličina kontaktnih sila), ali i uprosječenih vrijednosti naprezanja i deformacija u većem volumenu, npr. laboratorijskom uzorku. Naprezanje je mjera intenziteta sile definirana u koncepciji kontinuum i ne može se definirati na isti način u svakoj točki u diskontinuumu. Zbog toga se računa uprosječno naprezanje unutar reprezentativnoga volumena diskretnog sustava. Postupkom uprosječivanja možemo povezati mikro razinu (diskontinuum) s mezo razinom (kontinuum). Analiziranjem pijeska kao diskretnoga sustava izdvojeni su pojedini faktori i njihov utjecaj na prijenos sile kako slijedi.

- Stanje naprezanja: pri izotropnoj kompresiji opterećenje se prenosi lancima sile koji nisu usmjereni i kratkoga su dometa; pri čistom posmiku lanci sile se usmjeravaju u smjeru glavnih naprezanja i dugoga su dometa.
- Vrsta opterećenja: ako dođe do nagle promjene smjera opterećenja (karakteristika cikličkih opterećenja), tj. nagle rotacije glavnih naprezanja, sustav bira novu grupu kontakata za prijenos sile.
- Granulometrijski sastav materijala: mješavina pijeska i praha u omjeru 70/30 predstavlja prijelaznu točku u kojoj zrna praha preuzimaju prijenos sile i razdvajaju zrna pijeska (zrna pijeska plivaju u prahu).
- Razmještaj i struktura zrna.

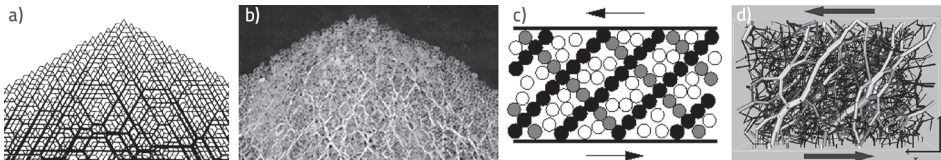
3 Lanci sile

Lanac sile je put kojim se prenose velika tlačna naprezanja u labirintu zrna i šupljina. Za razliku od mikenskoga labirinta u kojem se Tezej kreće "šupljinama", u geotehničkomu se labirintu sila prenosi zrnima koja su u kontaktu. Lanac sile čine najmanje tri zrna koja prenose opterećenje. Više lanaca sile formira prostornu mrežu prijenosa sile.

3.1 Vizualizacija lanaca sile

Uporabom valjaka od pleksiglasa (fotoelastičan materijal) i zrna od pireksa (vatros- talno staklo) eksperimentalno je otkriveno postojanje lanaca sile, tj. lanaca prijenosa naprezanja (*des chainons de transmission de contraintes*), prema Dantu, 1968. [8]. Lanci sile opisani su kao izražene prostorne fluktuacije kontaktnih sila. Zbog ograničenja analitičkoga i fizičkog modela, kao osnovni se alat za praćenje stvaranja, širenja, izvijanja i pucanja lanaca sile primjenjuje numerički model, slika 4. U nastavku je dana numerička definicija lanca sile koja predstavlja početnu točku algoritma za izdvajanje i prikazivanje lanaca sile, prema Poschel i Schwager [9]. Lanci sile definirani su s tri uvjeta: zrna i, j te j, k se smatraju članovima istog lanca sile u sljedećem slučaju:

- zrna i, j te j, k susjedna su zrna,
- naprezanje koje djeluje na svako zrno prelazi određeni prag i
- linije spoja između i, j te j, k formiraju kut veći od 150° , tj. centri sva tri zrna gotovo su na istoj osi.



Slika 4. Vizualizacija lanaca sile: a) idealiziran numerički model (gravitacija) [10], b) fizički model (gravitacija) [11], c) idealiziran dvodimenzionalni prikaz (posmik) [12], d) numerički trodimenzionalni model (posmik) [13]

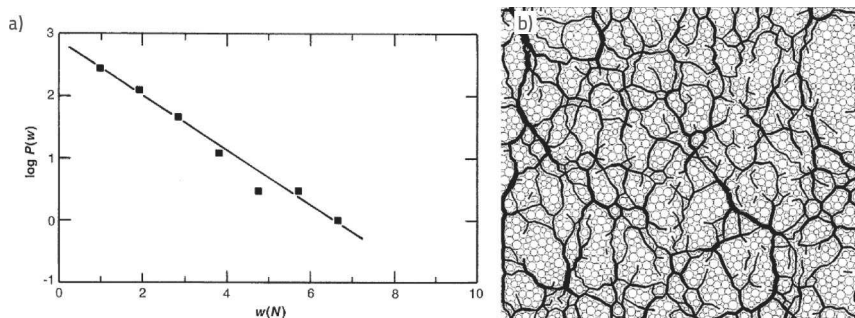
Algoritam u osnovi prikuplja informacije vezane za zrna u kontaktu (veličina kontaktne sile, položaj zrna) i filtrira ih. Identifikacija veličine i usmjerenja lanaca sile vizualizira se linijom koja povezuje centre zrna. Debljina linije proporcionalna je veličini kontaktne sile između dva zrna, slika 4. U trodimenzionalnom modelu umjesto linije rabi se valjak.

3.2 Distribucija lanaca sile

Prvi statistički model za predviđanje distribucije sila u zrnatom materijalu je q - model, Liu et all. [14]. Sile su predstavljene kao skalarne vrijednosti koje se šire od zrna do zrna uzduž mreže kontakata. Vjerojatnost pojave sile veće od njihove aritmetičke sredine (srednja sila) pokazuje eksponencijalnu zakonitost. Navedena zakonitost naznačuje da je pojava lanaca sile većega intenziteta rijetka.

Pomoću numeričkih simulacija Radjai et all. [15, 16] otkrili su bimodalno svojstvo raspodjele sila u zrnatom materijalu. Dvije mreže kontakata zrna međusobno se

nadopunjuju. Slaba mreža, koju čine kontakti koji prenose sile manje od srednje sile, i jaka mreža, koju čine kontakti koji prenose sile veće od srednje sile, pokazuju drukčije ponašanje. Slaba mreža mehanički se ponaša kao tekućina (ne prenosi posmična naprezanja), a jaka mreža kao skelet. Raspodjela jakih sila eksponencijalno se smanjuje, dok je raspodjela slabih sila jednolika, slika 5.



Slika 5. Prijenos sile u zrnatu materijalu: a) vjerojatnost pojave sile $P(w)$ u ovisnosti o veličini sile w [14], b) bimodalna raspodjela sile (skica jake mreže) [15]

Navedeno pojednostavnjenje (samo dvije mreže kontakata) ne utječe na analizu prijenosa sile. Naime, lanci sile krući su u odnosu na ostatak materijala zarobljenog između njih. Krući element definira pomak, tj. ponašanje sustava, tako da lanci sile kontroliraju ponašanje pijeska. Lanci sile (jaka mreža) obuhvaćaju oko 40 % kontakata cijele mreže.

3.3 Stabilnost lanaca sile

Lanci sile formiraju se pri taloženju pijeska u mediju vode ili zraka pod utjecajem gravitacije. Ako na sustav ne djeluje dodatno vanjsko opterećenje, lanci sile su stabilni, tj. ne mijenjaju položaj i intenzitet u vremenu. Promjenom vanjskoga opterećenja lanci sile mogu postati nestabilni i mijenjati položaj i intenzitet u vremenu.

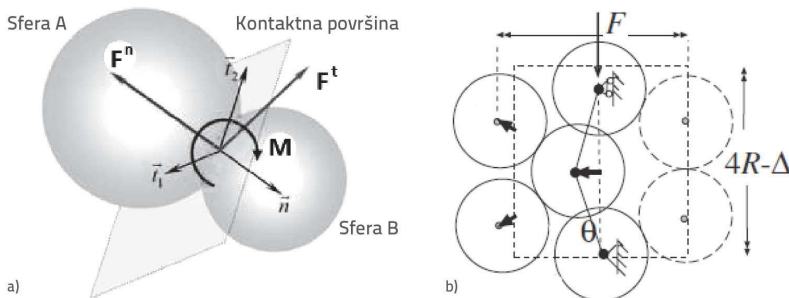
Razlikujemo stabilnost pojedinoga lanca sile i stabilnost sustava, tj. mreže lanaca sile. Stabilnost lanca sile ovisi o njegovoj duljini i karakteristikama zrna koja su njegovi članovi: čvrstoća zrna (otpor drobljenju), oblik zrna (otpor rotaciji) i materijal zrna (otpor klizanju). Za stabilnost sustava osim pojedinačne stabilnosti lanaca sile ključan je i stupanj zbijenosti materijala između njih (sposobnost bočne potpore da preuzme dodatno opterećenje).

U slučaju kada su pojedinačni lanci sile nestabilni, sustav svejedno može biti prilagodljiv i otporan. Navedeno je karakteristično za zbijene sustave, gdje se, zbog velikoga broja potencijalnih putova prijenosa sile, sila preusmjeri na novu grupu kontakata. Rahli sustavi s puno šupljina nemaju rezervnu mogućnost (potencijalno novu grupu kontakata) za prijenos sile te ovise o uspostavljenim lancima sile. U tom

slučaju pucanje nekoliko lanaca sile može dovesti do lavine, urušavanja kompletnog sustava ili imati zanemariv utjecaj, ovisno o njihovom položaju.

3.4 Modeliranje gubitka stabilnosti lanca sile

Lanci sile kao krući, vremenski i prostorno promjenjivi elementi kontroliraju mehaničko ponašanje i stabilnost zrnatoga materijala. Mehaničko ponašanje zrnatoga materijala modelira se numeričkom metodom *Discrete Element Method* (DEM) [17]. DEM uzima u obzir svako zrno pojedinačno, a gibanje zrna određeno je na osnovi međudodosa sa susjednim zrnima pomoću kružnog postupka proračuna. U kružnom postupku izmjenjuju se proračuni na kontaktu zrna (kontaktne sile i kontaktni moment) s proračunom gibanja zrna (pravocrtno i rotacijsko gibanje), vidi sliku 6. Postoji više načina proračuna sile i momenata između dva zrna u kontaktu [18, 19]. Mogu se odabrati različiti modeli za proračun kontaktne sile: linearni, Hertzov, histerezni, itd. Kontaktne momente može se proračunati na osnovi realnoga oblika zrna ili uporabom idealiziranog oblika zrna (sfera, disk) s dodanim momentom otpora rotaciji. Idealizirani moment otpora zamjenjuje nepravilan oblik, uklještenje i hrapavost zrna pomoću krutosti i relativne rotacije zrna.



Slika 6. Modeliranje: a) međudodosa zrna (F^n - kontaktne normalne sile, F^t - kontaktne tangencijalne sile, M - kontaktne momente) [19], b) lanca sile (F - vanjsko opterećenje, R - radijus zrna, Δ - pomak, θ - kut izvijanja) [20]

Rad Tordesillas i Muthuswamy [20] daje prvi dvodimenzionalni analitički model elastičnoga i plastičnog izvijanja lanca sile s bočnom potporom pri osnom tlačenju. Rad predstavlja trenutačno stanje znanja u tom području. U radu su uspoređeni rezultati analitičkoga i numeričkog modela. Kako bi se omogućila usporedba numeričkoga i analitičkog modela za izvijanje lanca sile odabran je linearni kontaktne model sile i idealiziran kontaktne momente.

Do izvijanja lanca sile može doći zbog klizanja ili rotiranja između dva zrna na najopterećenijem dijelu lanca u trenutku prekoračenja komponente čvrstoće. Otpor izvijanju lanca sile pruža materijal zrna (trenje), oblik zrna (rotacija) i zbijenost

susjednih zrna (bočna potpora). Variranjem vrijednosti osnovnih parametara zrna određen je utjecaj na izvijanje. Model je lanca sile ravan "stup" sastavljen od tri sfere, a međudnos zrna modeliran je mehaničkim modelima opruge i plastičnoga klizača, vidi sliku 6.

4 Zaključak

Zrnati materijali pri različitim tipovima opterećenja u svakodnevnim situacijama pokazuju širok raspon pojava koje treba adekvatno karakterizirati i modelirati radi predviđanja mehaničkoga ponašanja u inženjerskoj primjeni. Numerički opisi tih pojava na makroskopskoj razini uključuju složene nelinearne modele u okviru mehanike kontinuuma, a u novije se vrijeme numeričkim simulacijama nakupina zrna (npr. metodom diskretnih elemenata) pokušava dobiti uvid u "unutarnje" odnose raspodjele sila među zrnima pri prijenosu vanjskih opterećenja, te karakterizirati ključne elemente prijenosa sila i njihove distribucije u zrnatu tijelu.

Prijenos sila u uzorku zrnatoga materijala uključuje formiranje lanaca sile. Lanci sile su ograničeno stabilni te se pri promjeni opterećenja mijenja i njihova konfiguracija; posebice pri cikličnom opterećenju oni se formiraju, "ojačavaju" i degradiraju. Jedan lanac sile predstavlja niz jako opterećenih zrna, a više lanaca sile formira prostornu mrežu prijenosa sila. Lanci sila određuju mehanička svojstva pijeska: stabilnost (tvore potporne stupove), elastičnost (predstavljaju opruge ako nema izvijanja) i protočnost (blokiraju tok zrnatoga materijala pri ispuštanju).

Numeričkim simulacijama, prema Radjai [15, 16], uočena je bimodalna raspodjela sila. Bimodalnom raspodjelom sila u sustavu zrnatoga materijala određene su funkcije jake (lanci sile) i slabe (bočna potpora lancima sile) mreže. U članku je dan omjer kontakata koji čine jaku i slabu mrežu (40:60).

Razumijevanje izvijanja lanaca sile predstavlja zagonetku koju je potrebno riješiti, a sve kako bi se moglo predvidjeti ponašanje zrnatoga materijala. Problem predstavlja ograničenje fizičkoga (pri laboratorijskom ispitivanju nije moguće "zaviriti" u uzorak) i analitičkog (rabi se jednostavna organizacija, mali broj i pravilan oblik zrna) modela.

Usporedba dostupne literature pokazuje da u novije vrijeme nema bitnijih poboljšanja u modeliranju izvijanja lanaca sile. Kao moguće poboljšanje ističe se postupak kombiniranja DEM - a i laboratorijskoga ispitivanja, vidi [21]. Simulacije laboratorijskih pokusa prvi su korak u makroskopskoj verifikaciji numeričkih modela. Verificirani numerički model upotrebljava se tako da se identificirani elementi sustava na mikro razini povežu s ponašanjem realnoga tijela uzorka u kontroliranim uvjetima. Na taj se način mogu provjeriti različite hipoteze u istraživanju zrnatoga materijala. U budućem će se istraživanju na osnovi laboratorijskih rezultata kalibrirati numerički (DEM) model uzorka pijeska kako bi se prepoznali kontrolni mehanizmi ponašanja

zrnatoga materijala pobuđenog cikličkim posmičnim opterećenjem. Kontrolni mehanizmi ponašanja zrnatoga materijala ovise o amplitudi cikličke posmične deformacije, a jedan je od kontrolnih mehanizama i gubitak stabilnosti (izvijanje) lanaca sile.

U ovom su radu ponajprije opisani lanci sila, a cilj je doktorskoga istraživanja potvrditi pretpostavku procesa formiranja, ojačanja i degradacije lanaca sile, te odrediti prag između ojačanja i degradacije lanaca sile. Predvidivi koraci u tom procesu, koji će se modelirati i pratiti, jesu:

1. Formiranje uzorka ("taloženje", "konsolidacija") - lanci sile se formiraju dominantno u vertikalnom smjeru.
2. Smicanje (male amplitude) - povećava se čvrstoća lanaca sile i cijelog uzorka.
3. Smicanje (srednje amplitude) - promjena ponašanja, tj. prag između ojačanja i degradacije lanaca sile.
4. Smicanje (velike amplitude) - dolazi do izvijanja i pucanja lanaca sile te smanjenja čvrstoće uzorka, a nakon određenoga broja ciklusa dolazi do tečenja (sloma) uzorka.

Dosadašnja istraživanja obuhvatila su klasifikacijske pokuse ispitivanoga materijala, modeliranje pijeska s realnijim oblikom čestica i granulometrijskom krivuljom, razvoj numeričkoga modela laboratorijskog uređaja u kojem je provedeno ispitivanje, pisanje koda koji simulira konsolidaciju i smicanje uzorka pijeska te kalibraciju mikro - karakteristika pijeska na osnovi laboratorijskih pokusa [21].

Eksperimentalno i numeričko istraživanje složenoga mehaničkog ponašanja zrnatih materijala daje uvid u unutarnje mehanizme složenih makroskopskih pojava, te mogućnost njihova boljeg predviđanja u inženjerskim primjenama. Lanci sile trebaju biti početna točka u proučavanju složenih, vremenski i prostorno ovisnih procesa, npr. lavina, likvefakcija i odziv materijala pri potresu.

Literatura

- [1] Welland, M.: *Sand: The Never - Ending Story*, University of California Press, Berkeley 2010
- [2] Holtz, R.D., Kovacs, W.D.: *An introduction to geotechnical engineering*, Prentice - Hall, New Jersey, 1981
- [3] Krim, J.: Surface science and the atomic - scale origins of friction: what once was old is new again, *Surface Science*, 500 (2002), pp. 741 - 758.
- [4] Hurley, C.R.: *Force chains, friction, and flow: Behavior of granular media across length scales*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, California, 2016

- [5] Luding, S.: Granular media: Information propagation, *Nature* 435 (2005), pp. 159 - 160.
- [6] Bouchaud, J., Claudin, P., Levine, D., Otto, M.: Force chain splitting in granular materials: A mechanism for large - scale pseudo - elastic behaviour, *European physical journal E*, 4 (2001), pp. 451 - 457.
- [7] O'Sullivan, C.: Particulate discrete element modelling: a geomechanics perspective, *Spon Press*, London and New York (2011).
- [8] Dantu, P.: Etude experimentale d'un milieu pulverulent: compris entre deux plans verticaux et paralleles, *Annales des ponts et chaussees*, 4 (1967), pp. 193 - 202.
- [9] Poschel, T., Schwager, T.: Computational granular dynamics /models and algorithms/, *Springer Verlag*, 2005
- [10] Luding, S.: Stress distribution in static two - dimensional granular model media in the absence of friction, *Physical review E*, 55 (1997) 4, pp. 4720 - 4729.
- [11] Krim, J., Behringer, R.P.: Friction, force chains and falling fruit, *Physics Today*, pp. 66 - 67, 2009
- [12] Cates, M.E., Wittmer, J.P., Bouchaud, J., Claudin, P.: Jamming, Force Chains and Fragile Matter, *Physical review letters*, 81 (1998) 9, pp. 1841 - 1844.
- [13] Mair, K., Hazzard, J.F.: Nature of stress accommodation in sheared granular material: Insights from 3D numerical modeling, *Earth and Planetary Science Letters*, 259 (2007), pp. 469 - 485.
- [14] Liu, C., Nagel, S.R., Schecter, D.A., Coppersmith, S.N., Majumdar, S., Narayan, O., Witten, T.A.: Force Fluctuations in Bed Packs, *Science*, 269 (1995) 5223, pp. 513 - 515.
- [15] Radjai, F., Wolf, D.E., Moreau, J.J.: Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings, *Physical review letters*, 80 (1998) 1, pp. 61 - 64.
- [16] Radjai, F., Roux, S., Moreau, J.J.: Contact forces in a granular packing, *Chaos*, 9 (1999) 3, pp. 544 - 550.
- [17] Cundall, P.A., Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, 29 (1979) 1, pp. 47 - 65.
- [18] Itasca.: PFC Version 5.0 Documentation. Minneapolis (2014).
- [19] Kozicki, J., Donze, F.V.: YADE - OPEN DEM: an open - source software using a discrete element method to simulate granular material, *Engineering Computations*, 26 (2009) 7, pp. 786 - 805.
- [20] Tordesillas, A., Muthuswamy, M.: On the modeling of confined buckling of force chains, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57 (2009), pp. 706 - 727.
- [21] Pavlic, V., Matesic, L., Kvasnicka, P.: Numerical modelling of the NGI - DSS test and cyclic threshold shear strain for degradation in sand, *Granular Matter*, 19 (2017) 37.