Stručni rad
Prihvaćeno 27. 5. 2001.

SANJA FILIPAN
SONJA GORJANC
HRVOJE KVASNIČKA

Natkrivanje paraboličkim konoidom

Natkrivanje paraboličkim konoidom

SAŽETAK

U radu je za jedan tip paraboličkog konoida 3. stupnja dan način konstrukcije te izvod jednadžbi u Kartezijevim koordinatama. U programu *Mathematica* definirane su funkcije za crtanje i izrađeni crteži konoida, grafovi funkcija Gaussove i srednje zakrivljenosti te primjeri moguće primjene konoida pri natkrivanju pravokutnoga tlocrta.

Ključne riječi: parabolički konoid, Mathematica

Roofing with a Parabolic Conoid

ABSTRACT

This article presents the construction and equations for one type of 3th degree conoid. We defined with *Mathematica* the functions for drawing and draw the pictures of the coniod, the graphics presentations of Gaussian and mean curvatures and the examples for roofing over the rectangular plan with a parabolic conoid.

Key words: parabolic conoid, Mathematica

MSC 2000: 68U05, 51N20

Studenti druge godine Građevinskog fakulteta u Zagrebu, Sanja Filipan i Hrvoje Kvasnička izradili su tijekom školske godine 2000/2001., pod mentorskim vodstvom nastavnice geometrijskih predmeta, rad *Natkrivanje paraboličkim konoidom*. Rad je nagrađen Rektorovom nagradom. Neznatno izmijenjeni dijelovi toga rada, uz dodatak prikaza Gaussove i srednje zakrivljenosti, sadržaj su ovoga članka.

1. Uvod

Postoji više načina konstruktivnog izvođenja pravčastih ploha. Na Građevinskom fakultetu u Zagrebu, u okviru kolegija Primijenjena geometrija pravčaste se plohe izvode kao sistemi pravaca koji sijeku tri prostorne krivulje k_1, k_2 i k_3. Prostorne krivulje k_1, k_2 i k_3 nazivamo *ravnalicama*, a pravce koji ih sijeku *izvodnicama* pravčaste plohe. Pravčaste plohe kojima je jedna ravnalica beskonačno daleki pravac nazivamo *konoidima*. Ravnine koje sadrže takvu beskonačno daleku ravnalicu nazivamo *direkcijskim ravninama* plohe.

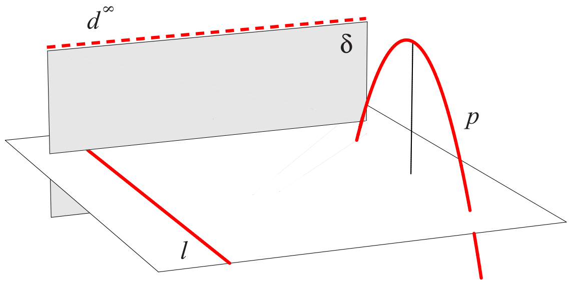
Ako se za ravnalice odaberu algebarske krivulje, koje su karakterizitrane redom i razredom, nastaje *algebarska* pravčasta ploha. Red i razred takve plohe uvijek se podudaraju, tj. algebarske pravčaste plohe imaju *stupanj*.

Čitatelja koji se želi podrobnije upoznati s općom teorijom takvog načina izvođenja pravčastih ploha upućujemo na literaturu [6], [7], [4], [2] i [1].

2. Parabolički konoid

2.1. Zadavanje paraboličkog konoida

Za konstruktivnu i analitičku obradu odabran je parabolički konoid koji će kasnije poslužiti za natkrivanje pravokutnoga tlocrta. Jedna njegova ravnalica je parabola p, druga je beskonačno daleki pravac d^∞ određen direkcijskom ravninom δ koja je paralelna s osi parabole, a treća je ravnalica pravac l okomit na direkcijsku ravninu i paralelan s ravninom parabole (slika 1).



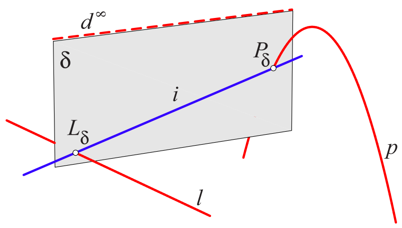
Slika 1. Ravnalice konoida.

Budući da se parabola p i pravac d^∞ sijeku u beskonačno dalekoj točki njezine osi, taj je konoid 3. stupnja (prema [7, str. 276]). Prema [1, str. 42] postoji samo jedna višestruka linija na njemu, a to je dvostruki pravac d^∞.

2.2. Konstrukcija paraboličkog konoida

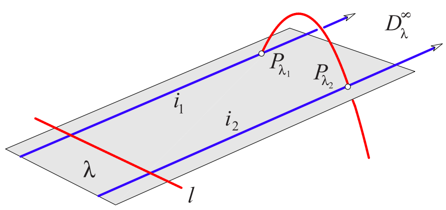
Izvodnice konoida konstruiraju se u ravninama pramena $[d^\infty]$ ili l.

1. Svaka ravnina $\delta \in [d^\infty]$ (pramen paralelnih ravnina) siječe pravac l u točki L_δ, a parabolu p u njezinoj beskonačno dalekoj točki te u konačnoj točki P_δ. Spojnica $L_\delta P_\delta$ je izvodnica konoida (slika 2).

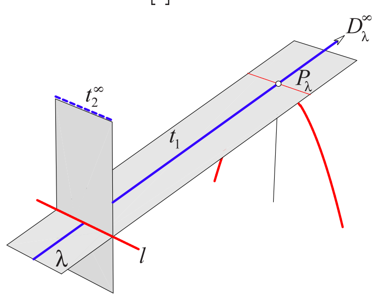


Slika 2. Izvodnica konoida u ravnini pramena $[d^\infty]$.

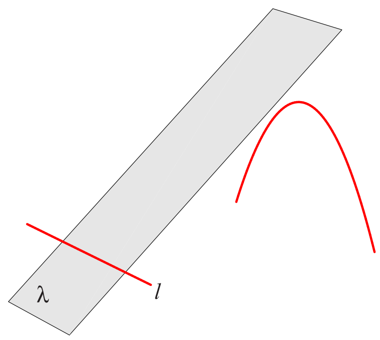
2. Svaka ravnina $\lambda \in [l]$ siječe parabolu p u točkama P_{λ_1} i P_{λ_2}, a pravac d^∞ u točki D^∞_λ. Spojnice $D^\infty_\lambda P_{\lambda_1}$ i $D^\infty_\lambda P_{\lambda_2}$ izvodnice su konoida koje mogu biti realne i različite (slika 3a), mogu se podudarati (slika 3b), a mogu biti i konjugirano imaginarne (slika 3c). Ravnine u kojima se točke P_{λ_1} i P_{λ_2} podudaraju nazivamo *torzalnim* ravninama, a izvodnice u tim ravninama *torzalnim* pravcima plohe (slika 3b).



Slika 3a. Par realnih i različitih izvodnica u ravnini pramena $[l]$.

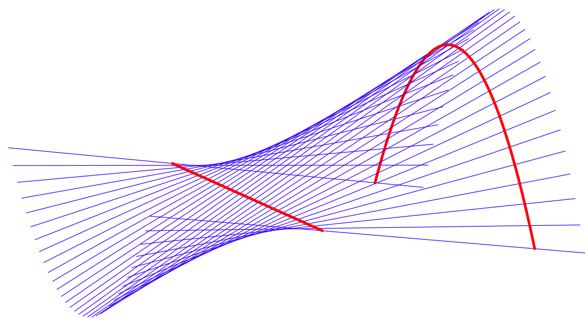


Slika 3b. Torzalne ravnine i torzalni pravci konoida.



Slika 3c. Ravnina pramena $[l]$ koja konoid siječe u paru konjugirano imaginarnih izvodnica.

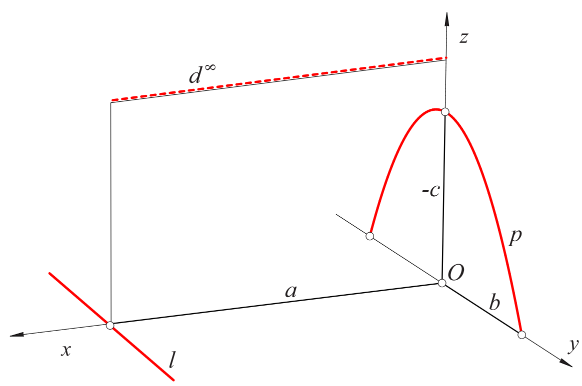
Na bilo koji od ova dva načina možemo konstruirati po volji mnogo izvodnica konoida (slika 4).



Slika 4: Izvodnice konoida.

2.3. Jednadžbe paraboličkog konoida

Ravnalice konoida smjestimo u Kartezijev koordinatni sustav $O(x,y,z)$ kao na slici 5.



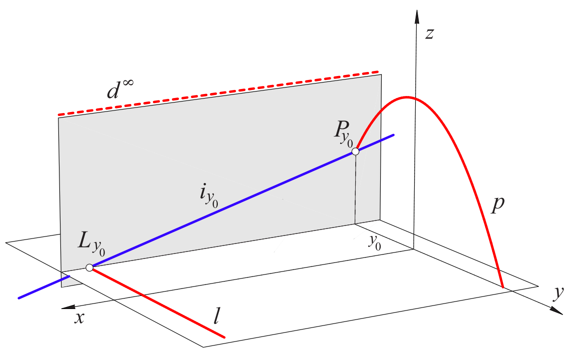
Slika 5. Položaj ravnalica u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Ravnalice konoida (parabola p, jednostruki pravac l i direkcijske ravnine δ pramena dvostrukog pravac d^∞) mogu se sada odrediti njihovim jednadžbama.[1]

$$p\ldots\begin{cases} x=0 \\ z=\frac{c}{b^2}(y^2-b^2), \quad b,c\in R,\ b,c\neq 0\end{cases}$$
$$l\ldots\ldots\begin{cases} x=a \\ z=0, \quad a\in R,\ a\neq 0.\end{cases}$$
$$\delta\ldots\ldots y=y_0, \quad y_0\in R. \tag{1}$$

($Napomena$: Bez smanjenja općenitosti mogli smo za bilo koji od parametara a, b ili c odabrati jedinicu. To bi nam, međutim, pri kasnijem natkrivanju umanjilo mogućnosti za slaganje različitih konoida.)

U svakoj ravnini $y=y_0$ pramena $[d^\infty]$ leži izvodnica i_{y_0}. Ona je spojnica točke $L_{y_0}(a,y_0,0)$ na pravcu l i točke $P_{y_0}(0,y_0,\frac{c}{b^2}(y_0^2-b^2))$ na paraboli p (slika 6).



Slika 6. Izvodnica u ravnini $y=y_0$.

Jednadžbe izvodnice su:

$$i_{y_0}\ldots\begin{cases} y=y_0 \\ z=\frac{c}{ab^2}(y_0^2-b^2)(a-x), \quad a,b,c\in R,\ a,b,c\neq 0\end{cases} \tag{2}$$

Prođe li parametar y_0 skupom realnih brojeva opisati će izvodnice i_{y_0} parabolički konoid. Stoga je

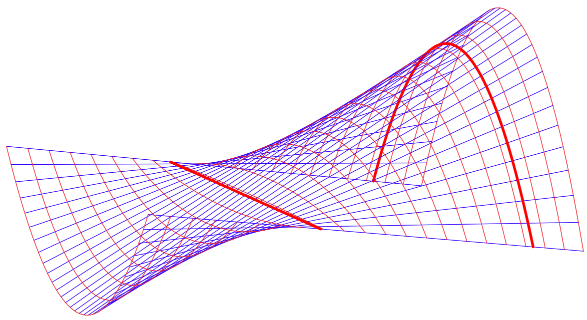
$$z=\frac{c}{ab^2}(y^2-b^2)(a-x), \quad a,b,c\in R,\ a,b,c\neq 0 \tag{3}$$

eksplicitni oblik jednadžbe konoida.

Za prikaze u programu *Mathematica* prikladnije su parametarske jednadžbe ploha [5, str. 229]. Za odabrani konoid, na temelju jednadžbe (3) prirodno se izvodi sljedeća parametrizacija.

$$\begin{aligned} x(u,v)&=u\\ y)u,v)&=v\\ z(u,v)&=\frac{c}{ab^2}(v^2-b^2)(a-u), \quad u,v\in R,\\ &\quad a,b,c\in R,\ a,b,c\neq 0\end{aligned} \tag{4}$$

Za tu parametrizaciju parametarske krivulje konoida su pravci i_{v_0} i parabole p_{u_0}. Naime, svaka ravnina $u=u_0$, $u_0\in R$ siječe konoid po paraboli $z=\frac{c}{ab^2}(v^2-b^2)(a-u_0)$ i beskonačno dalekom torzalnom pravcu. Za slučaj $u_0=a$ ravnina je torzalna pa se presječna krivulja raspada na pravac l i dvoznačni torzalni beskonačno daleki pravac plohe (slika 3b). Svaku od spomenutih parabola p_{u_0}, $u_0\neq a$ možemo odabrati za ravnalicu.



Slika 7. Parametarske krivulje konoida koje odgovaraju parametrizaciji (4).

3. Prikazi paraboličkog konoida u programu *Mathematica* 4.0

Mathematica je softverski paket koji se upotrebljava kao numarički i simbolički kalkulator, programski jezik, sistem za vizualizaciju funkcija i podataka, platforma na kojoj se grade paketi za specifične primjene, kreiraju interaktivni dokumenti u kojima se pojavljuju tekst, animacija i zvuk, itd. Ovdje ga prvenstveno koristimo za grafički prikaz funkcija u trenutno aktualnoj verziji 4.0.

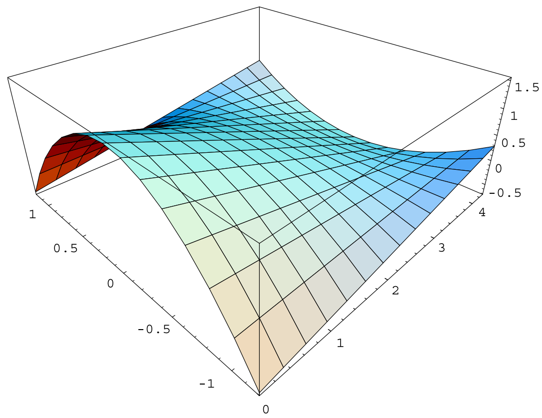
Na temelju jednadžbi (3) i (4) definiramo funkcije $Kon[a,b,c]:R^2\to R$ i $Konoid[a,b,c]:R^2\to R^3$. Za konkretne vrijednosti brojeva a, b i c graf funkcija $Kon[a,b,c]$ je parabolički konoid kojeg obrađujemo. Funkciju $Konoid[a,b,c]$ definiramo kao listu parametarskih jednadžbi konoida određenog realnim brojevima a, b i c. To je funkcija čije vrijednosti odgovaraju Kartezijevim koordinatama točaka konoida. U programu *Mathematica* definicije tih funkcija zapisujemo na sljedeći način.

[1] Da bismo i pravac d^∞ odredili jednadžbama morali bismo koristiti homogene Kartezijeve koordinate (x:y:z:w). Njegove bi jednadžbe tada bile $y=y_0, w=0$.

```
Kon[a_,b_,c_][x_,y_]:=c/(a*b^2)(y^2-b^2)(a-x)
Kon[a_,b_,c_][u_,v_]:={u,v,c/(a*b^2)(v^2-b^2)(a-u)}
```

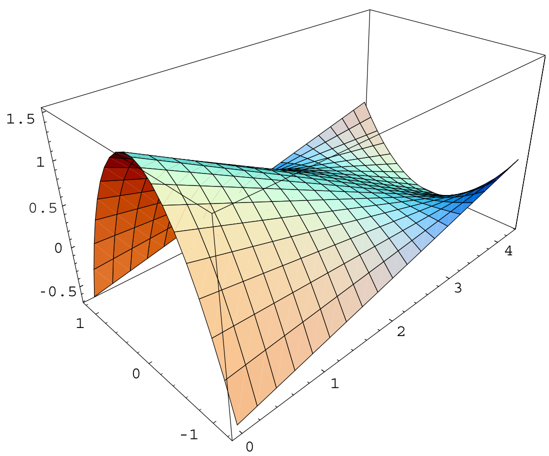
Sada za konkretni parabolički konoid ($a = 3$, $b = 1$, $c = -1.5$) možemo, korištenjem naredbi *Plot3D* i *ParametricPlot3D*, dobiti sljedeće prikaze.

```
Plot3D[Kon[3,1,-1.5][x,y],{x,0,4.3},{y,1.2,1.2},
       ViewPoint->{-1,-1,0.8}]
```



Slika 8.

```
ParametricPlot3D[Evaluate[Konoid[3,1,-1.5][u,v]],
          {u,0,4.3},{v,1.2,1.2},ViewPoint->{-1,-1,0.8}]
```

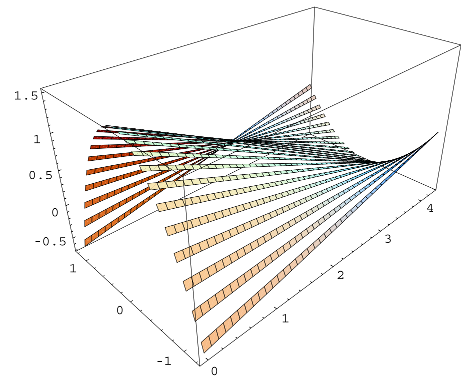


Slika 9.

Pored tih standardnih prikaza možemo izraditi i nešto zanimljivije. Tako, primjerice, korištenjem naredbi *Show* i *Table* možemo dobiti niz dijelova plohe koji kad se prikažu na istoj slici daju *prugastu* ili *rešetkastu* sliku konoida. Kontrolu koraka parametara u i v omogućuje nam učitavanje standardnog *Mathematica* paketa *ParametricPlot3D*.

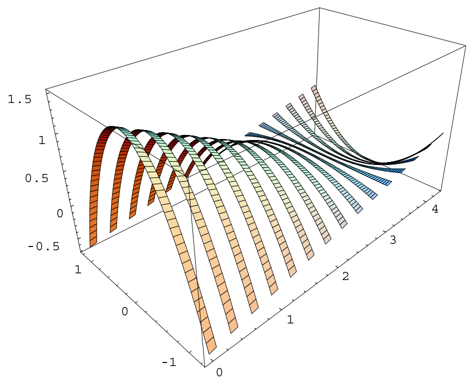
```
<<Graphics‘ParametricPlot3D‘

Show[Table[
        ParametricPlot3D[Evaluate[Konoid[3,1,-1.5][u,v]],
        {u,0,4.3,0.1},{v,i,i+2.4/67,2.4/67},
        DisplayFunction->Identity],
           {i,-1.2,1.2-2.4/67,7.2/67}],
              DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



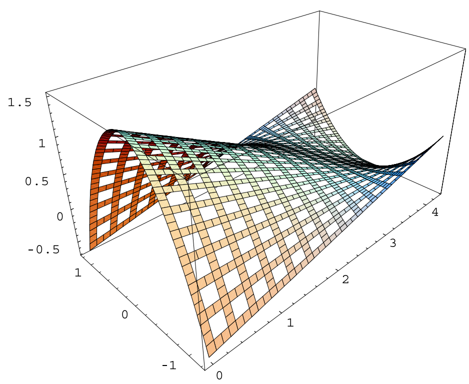
Slika 10.

```
Show[Table[
        ParametricPlot3D[Evaluate[Konoid[3,1,-1.5][u,v]],
        {u,i,i+0.1,0.1},{v,-1.2,1.2,2.4/67},
        DisplayFunction->Identity],
           {i,0,4.2,0.3}],
              DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Slika 11.

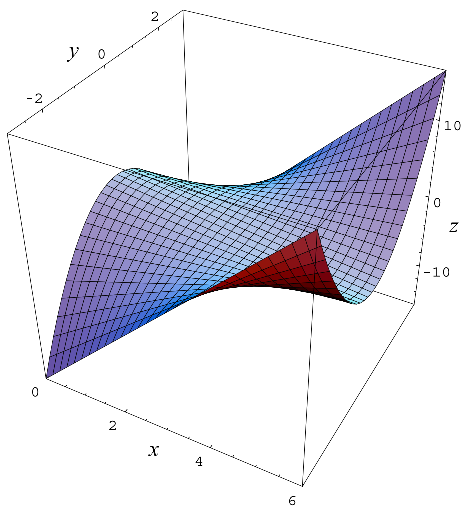
```
Show[%,%%]
```



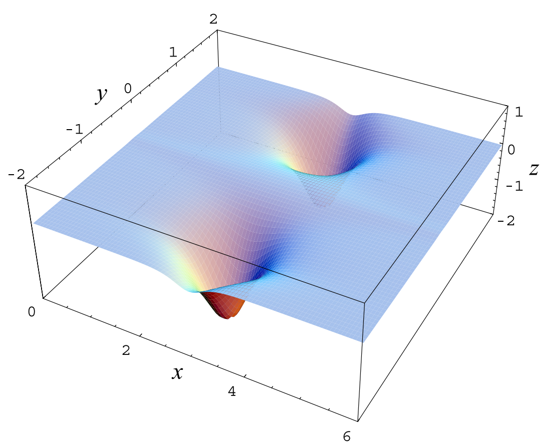
Slika 12.

4. Prikazi Gaussove i srednje zakrivljenosti paraboličkog konoida

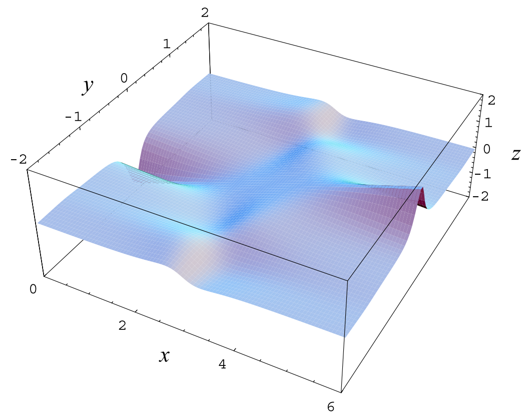
Gaussova i *srednja* zakrivljenost u regularnoj točki plohe važni su pojmovi diferencijalne geometrije ploha. *Glavne* zakrivljenosti u nekoj regularnoj točki plohe su ekstremne zakrivljenosti onih krivulja na plohi koje prolaze tom točkom, a leže u ravninama koje sadrže normalu plohe. U točki plohe Gaussova je zakrivljenost jednaka *produktu*, a srednja *polovini zbroja* glavnih zakrivljenosti. Za njihovo izračunavanje koriste se I. i II. diferencijalna forma [5, str. 252], [3, str. 373-380]. U knjizi [3, str. 394] definirane su, u jeziku *Mathematica*, funkcije `gcurvature` i `mcurvature` koje za bilo koju plohu zadanu parametarskim jednadžbama računaju vrijednosti Gaussove i srednje zakrivljenosti u svakoj njezinoj regularnoj točki. Te su definicije upotrebljene pri izradi sljedećih crteža.



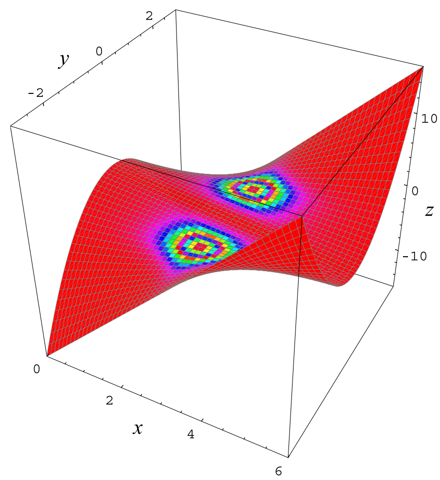
Slika 13. Graf funkcije `Kon[3,1,-2]` u području $[0,6]\times[-1,1]$.



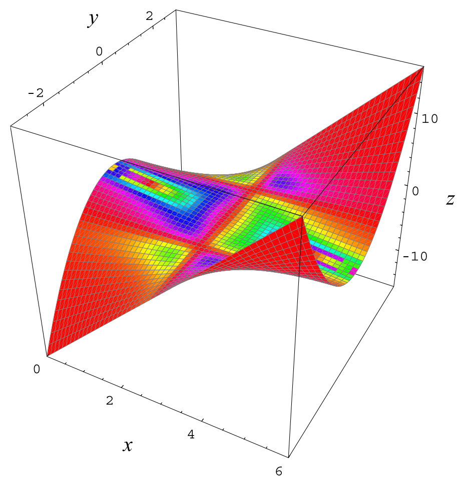
Slika 14. Graf funkcije `gcurvature[Konoid[3,1,-2]]` u području $[0,6]\times[-1,1]$.



Slika 15. Graf funkcije `mcurvature[Konoid[3,1,-2]]` u području $[0,6]\times[-1,1]$.



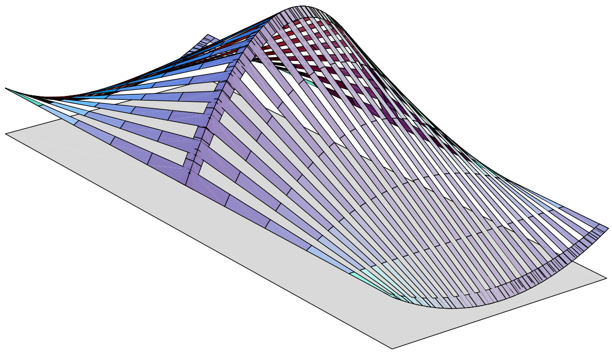
Slika 16. Graf sa slike 13 obojan bojom koja je funkcija Gaussove zakrivljenosti.

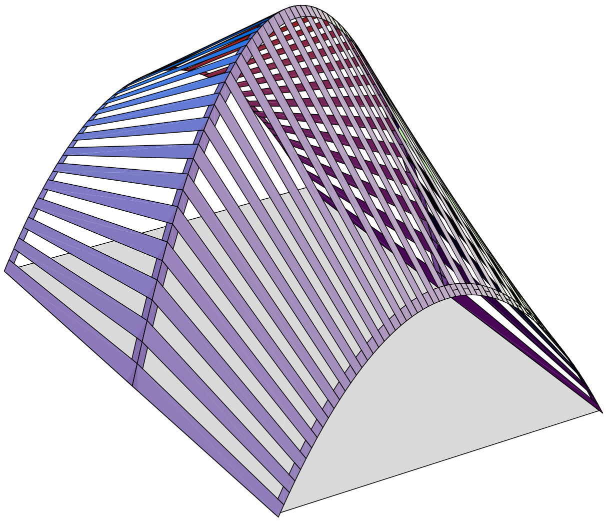


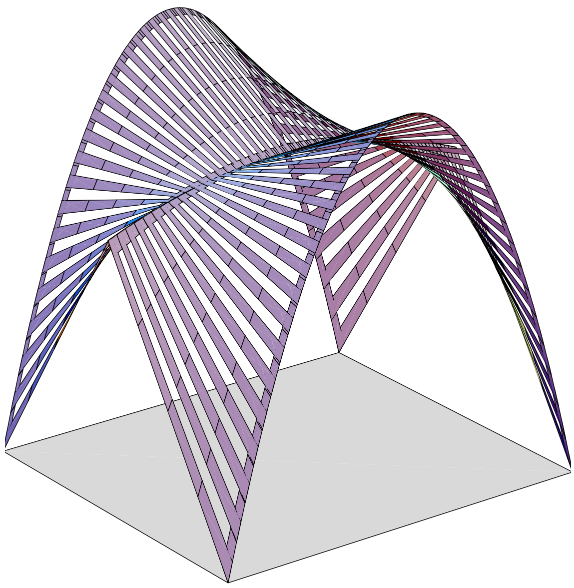
Slika 17. Graf sa slike 13 obojan bojom koja je funkcija srednje zakrivljenosti.

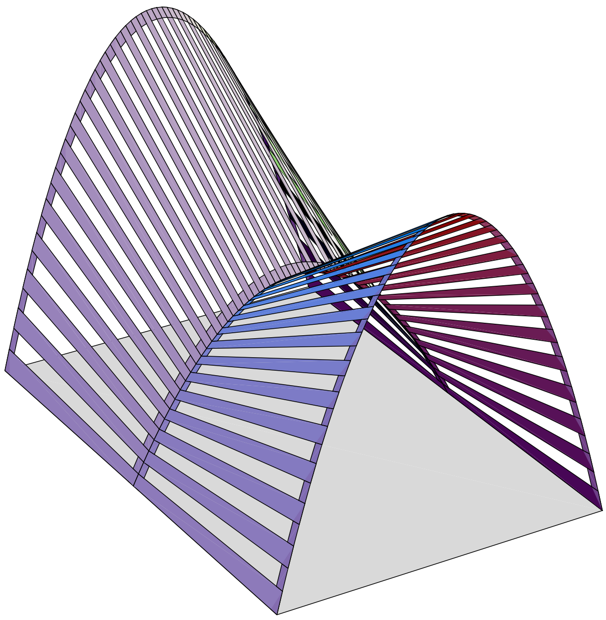
5. Natkrivanje pravokutnoga tlocrta

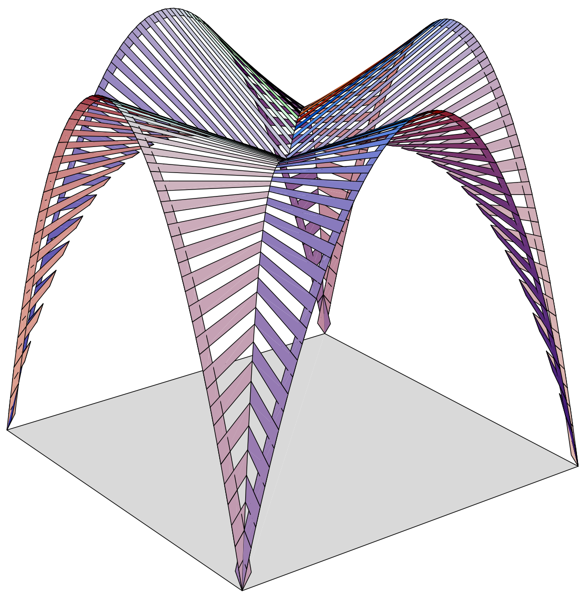
Parabolički konoid može se za natkrivanje koristiti na nebrojeno mnogo načina. Elementi su razni izrezi plohe koji se jednostavno slažu u nizove. Na sljedećim je crtežima prikazano nekoliko ideja za natkrivanje pravokutnoga tlocrta.

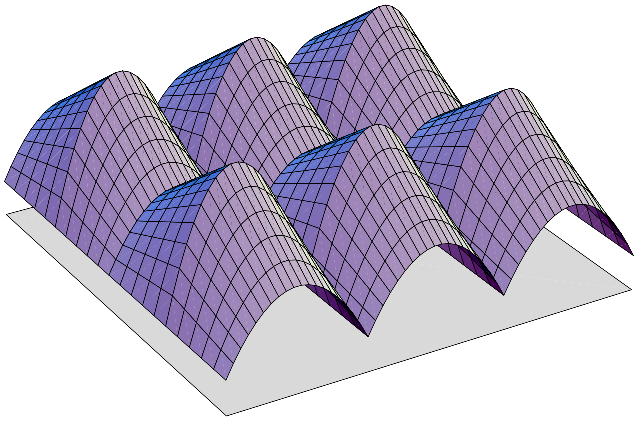


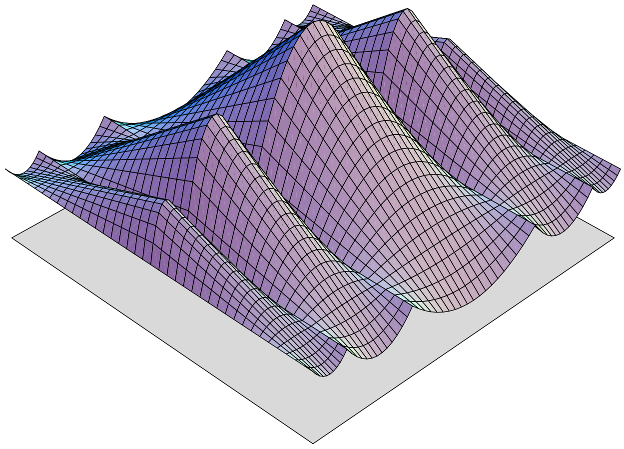


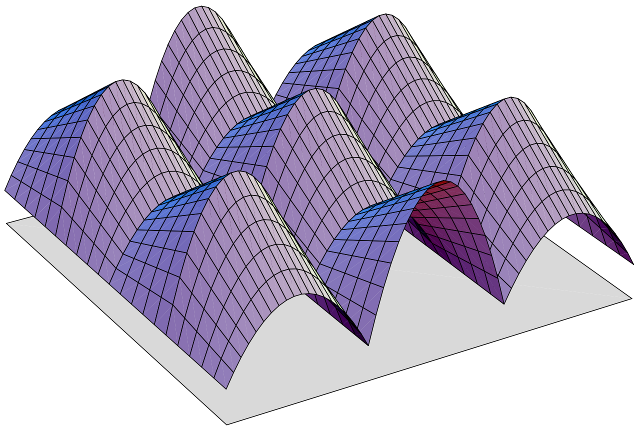


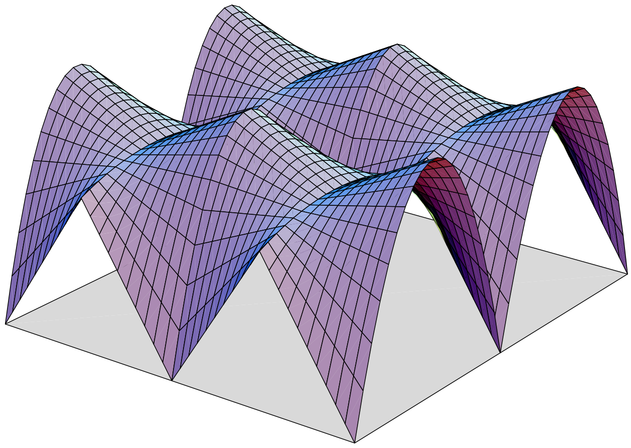


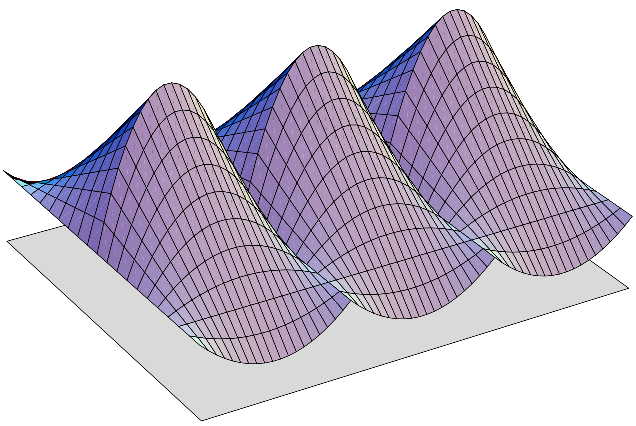


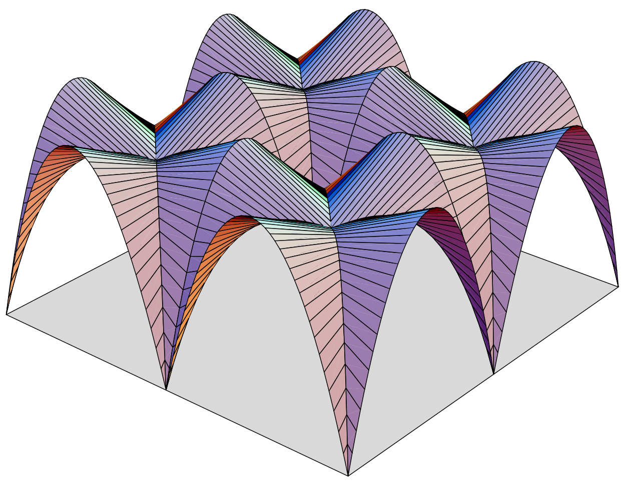


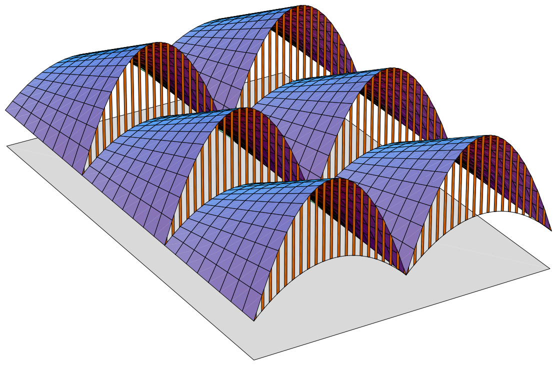












Literatura

[1] S. GORJANC: *The Generation of Ruled Cubics by Using Mathematica 3.0.* Proceedings of 8th ICECGDG, Austin, Texas, USA, 1998.

[2] S. GORJANC: *Izvođenje pet tipova pravčastih ploha 4. stupnja* KoG No. 2, 57-67, 1997.

[3] A. GRAY: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.* CRC Press, Boca Raton, 1998.

[4] B. KUČINIĆ, O. KRISTOFOROVIĆ, I. SALER: *Oble forme u graditeljstvu.* Građevinar, Zagreb, 1992.

[5] Ž. MARKOVIĆ: *Uvod u višu analizu, II. dio.* Školska knjiga, Zagreb, 1952.

[6] E. MÜLLER, J. L. KRAMES: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen.* Franc Deuticke, Leipzig und Wien, 1931.

[7] V. NIČE: *Deskriptivna geometrija II.* Školska knjiga, Zagreb, 1980.

[8] S. WOLFRAM: *Mathematica 4.0.*

Sanja Filipan, studentica
e-mail: sfilipan@grad.hr
Dr. sc. Sonja Gorjanc
e-mail: sgorjanc@grad.hr
Hrvoje Kvasnička, student
e-mail: hrvoje.kvasnicka@inet.hr
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet