

1. simpozij  
Računalstvo u graditeljstvu  
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
4.–6. prosinca 2003.

## O informatizaciji nastave geometrije na Građevinskom fakultetu u Zagrebu

Sonja Gorjanc

Zavod za matematiku, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10001 Zagreb,  
Hrvatska

e-mail: sgorjanc@grad.hr

Vladimir Benić

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10001 Zagreb, Hrvatska

e-mail: benic@grad.hr

**Sažetak.** U radu se prikazuje i obrazlaže način informatizacije nastave geometrijskih predmeta na Građevinskom fakultetu u Zagrebu i daje djelimičan pregled edukacijskog materijala izrađenog u okviru IT projekta *Odabrana poglavlja geometrije i matematike u obrazovanju inženjera graditeljskih struka pomoću Mathematice*

### 1 Uvod

Danas, kao uostalom oduvijek, na svakom studiju građevinarstva u svijetu studenti uče geometriju. I bez obzira na to što je u sociološko-kulturološki različitim sredinama (Europa, SAD, Rusija, Japan, Kina i dr.), danas kao i ranije sama nastava geometrije znala biti vrlo različita, njezine su osnovne zadaće vazda iste:

- razvoj spoznajno-perceptivnih sposobnosti u području geometrije trodimenzionalnog euklidskog prostora i
- savladavanje metoda i alata za grafičku komunikaciju budućih inženjera.

Razvoj informacijske tehnologije u prvoj je fazi produbio različitosti u pristupu nastavi. Naglasio je podjelu bogati-siromašni, u pojedinim sredinama doveo do prenatlaženosti uloge novog alata i pojave stavova da se njegova metodologija može razvijati bez teorijskog znanja geometrije [20], [1], dok se u drugima vrlo dugo (s obzirom na brzinu tehnološkog razvoja) ignoriralo i samo postojanje računala. Pojava i brzi razvoj internet tehnologije, kojoj je povezivanje bitna karakteristika, dovodi i ovdje do uočavanja potreba za približavanjem (s uvažavanjem različitosti) i omogućuje neposrednu razmjenu znanja i iskustava.

Na 7. međunarodnoj konferenciji o geometriji i grafici u govoru programskog karaktera [21] koji se prvenstveno odnosio na nastavu nacrtne geometrije na tehničkim fakultetima u srednjoj Europi, tadašnji predsjednik ISGG-a<sup>1</sup> i direktor Instituta za geometriju Tehničkog sveučilišta u Beču prof. *Hellmuth Stachel* kaže:

“... A što je obrazovanje? Grubo rečeno, obrazovanje je sve ono što studentu ostaje u sjećanju nakon što zaboravi veći dio informacija kojima smo mu punili glavu tijekom studija.

Što bi moglo ostati od naših grafičkih kolegija? Trebala bi ostati sposobnost vizualizacije, kao i vještine poput prostoručnog skiciranja i rukovanja medijem. Očekujem međutim da naša

---

<sup>1</sup>International Society for Geometry and Graphics

nastava usto daje:

- snažan dojam o moći vizualizacije
- sposobnost zamišljanja idealnog svijeta geometrije te poznavanje njene terminologije
- osjećaj za logičku strogost
- možda i osjećaj za ljepotu geometrijskog razmišljanja, te
- kreativnost i otvorenost prema novim idejama...”

Ova se orijentacija danas može prepoznati u novim geometrijskim curriculumima na europskim sveučilištima.

Na Građevinskom fakultetu u Zagrebu geometrijski se sadržaji predaju u okviru kolegija Nacrtna i Primijenjene geometrije. Nastava se izvodi klasično: predavanja, auditorne i konstruktivne vježbe. Najvećim se dijelom koristi metodologija konstruktivne geometrije, a studenti programe izrađuju u olovci i tušu. Na taj se način izvodi nastava geometrijskih predmeta na gotovo svim tehničkim fakultetima u Hrvatskoj. Izuzetak je nastava pojedinih dijelova geometrijskih kolegija na Građevinskom fakultetu u Rijeci [18] te pojava novih geometrijskih kolegija na Građevinskom fakultetu u Splitu. Ustrajanje na klasičnoj metodi nastave geometrije ima svoje pozitivne, ali i negativne posljedice:

- očuvan je visoki nivo geometrijske teorije, tako važan za kvalitetno obrazovanje budućih graditelja,
- pad interesa i motivacije za izradu studentskih programa bez novih alata, te
- nepovezanost geometrijskih sadržaja sa sadržajima drugih matematičkih kolegija (studenti gotovo uopće ne uočavaju da vrlo često upoznaju iste pojmove samo na različite načine - konstruktivno, analitički ili diferencijalno), a da nepovezanost s drugim općim sadržajima (npr. fizike) niti ne spominjemo.

## 2 Informatizacija nastave geometrije na GFZ-u

Programski alat primjeren metodologiji konstruktivne geometrije svakako je AutoCAD. U njegovom bi sučelju studenti trebali izrađivati gotovo sve geometrijske programe. Za izradu interaktivnog edukacijskog materijala bogatog vizualizacijama zakonitosti euklidskoga prostora, zbog svoje izvrsne grafike i relativno jednostavne izrade interaktivnog materijala, pogodni su *Mathematica* i *webMathematica*. *Mathematica* je također i idealan program (već desetak godina vrlo povoljno distribuiran na svim hrvatskim sveučilištima) za povezivanje geometrijskih sadržaja sa sadržajima drugih matematičkih kolegija (npr. Matematike I, Matematike II).

Za razumijevanje, a potom i prosuđivanje o primjerenosti informatičkih metoda u konkretnom nastavnom procesu, svakako je potrebno sagledati uvjete u kojima se taj proces odvija. Za početak je dobro prebrojiti računala koja nastavnik i studenti mogu koristiti. Na Građevinskom fakultetu u Zagrebu za studente prve godine, njih oko 250, nastava se (sve do ove, ak. god. 2003/04) održavala u Aveniji V. Holjevca. Na toj lokaciji studenti nisu imali na raspolaganju niti jedno (!) računalo. U takvim je uvjetima nemoguće organizirati konstruktivne vježbe na računalima za najbrojnije studentsko godište. Stoga se u informatizaciji nastave geometrijskih predmeta, koji se predaju isključivo u prvoj godini studija, moglo orijentirati jedino na:

- internet tehnologiju (čime se studentima omogućilo da pojedine geometrijske sadržaje uče pomoću računala s lokacije u Kačićevoj ili kod kuće),
- izradu edukacijskog materijala koji se pomoću jednog računala i projektora može koristiti prilikom predavanja ili auditornih vježbi, te
- individualni rad s vrlo malim brojem studenata koji su pokazivali poseban interes i sposobnost

za rad u nekom od spomenutih računalnih programa.

## 2.1 Web stranica [www.grad.hr/nastava/geometrija](http://www.grad.hr/nastava/geometrija)

Prije tri godine počeli smo uređivati geometrijsku web stranicu na kojoj, uz osnovne podatke o geometrijskim kolegijima i primjere ispitnih zadataka, studenti mogu naći tzv. *ilustracije* koje im pomažu pri učenju za obranu programa ili za ispit. Tu se nalaze datoteke u kojima se putem računalne grafike i animacije vizualiziraju geometrijski sadržaji, a neke od njih su cjelovite prezentacije koje se koriste na auditornim vježbama. Manji broj datoteka izrađen je u *Microsoft PowerPointu* (Geometrijske transformacije, Neke konstrukcije), dok je veći broj izrađen pomoću *Mathematice* i činio je znatan dio materijala na temelju kojeg je osmišljen sljedeći IT projekt.

## 2.2 IT projekt [www.grad.hr/itproject\\_math](http://www.grad.hr/itproject_math)

Akadske godine 2002/03. MZT RH podržlo je rad na IT projektu *Odabrana poglavlja geometrije i matematike u obrazovanju inženjera graditeljskih struka pomoću Mathematice*. Pokrenule su ga nastavnice geometrije (Sonja Gorjanc, koja je bila voditeljica) i matematike (Vera Čuljak) s GFZ-a, a u rad na projektu bili su uključeni i Vladimir Benić s istog fakulteta te Jelena Beban-Brkić (Geodetski fakultet u Zagrebu) i Lidija Pletenac (Građevinski fakultet u Rijeci). Osnovni ciljevi tog projekta su bili:

- povezivanje sadržaja geometrijskih i matematičkih predmeta na tehničkim fakultetima u Hrvatskoj,
- pomoć studentima u lakšem razumijevanju gradiva,
- poticanje studenata na korištenje interneta pri učenju i rješavanju zadataka,
- poticanje studenata na korištenje programskog sustava *Mathematica* pri učenju i rješavanju zadataka, te
- poticanje nastavnika na korištenje programskih sustava *Mathematica* i *webMathematica* u nastavi geometrije i matematike.

Nastavni materijali izrađeni u okviru projekta pokrivaju neke teme iz predmeta Nacrtna i Primijenjena geometrije, Matematike I, Matematike III (Građevinski fakulteti) i Matematike IV - Diferencijalne geometrije (Geodetski fakultet). To su glavni čvorovi čijim će se povezivanjem formirati mreža znanja koja je koncipirana tako da bude dinamična i otvorena za povezivanje sa sličnim sadržajima na internetu.

Sadržaj mape *Geometrija*, izrađene u okviru projekta, je sljedeći: Krivulje 2. stupnja (konike), Presjeci stožaca i valjaka 2. stupnja, Neki prodori, Pravčaste plohe, Gaussova i srednja zakrivljenost plohe, Crtanje krivulja i ploha pomoću *Mathematice*. Čini je skup od pedesetak .HTML, .MSP i .NB datoteka koje se mogu koristiti za poboljšanje standardnih sati predavanja ili auditornih vježbi, samostalno učenje pomoću interneta te za samostalno učenje rada u *Mathematici*.

### Pregled datoteka prema formatu

#### 1. HTML (potreban internet)

Te su datoteke nastale kao HTML verzije *Mathematica* NB<sup>2</sup> datoteka (primjeri: klasifikacija,

---

<sup>2</sup>.NB je format standardne *Mathematica* datoteke tzv. *Mathematica* bilježnice (notebooka)

raspadi i jednadžbe konika, prodori kugle i valjka, prodori dvaju valjaka) ili su direktno pisane kao HTML datoteke koje pozivaju grafike i animacije eksportirane iz *Mathematice* (primjeri: presjeci, pravčaste plohe, zakrivljenost plohe)

## 2. MSP (potreban internet)

To su datoteke koje pored toga što prihvaćaju sve naredbe HTML-a prihvaćaju i naredbe *webMathematice* te koriste rad tog programa na računalu na kojem se nalaze.

(primjeri: Plot, ParametricPlot, ImplicitPlot, PolarPlot, Plot3D, ParametricPlot3D(krivulje), ParametricPlot3D(plohe), ImplicitPlot3D, elipsa, hiperbola, parabola, vizualizacije Gaussove i srednje zakrivljenosti)

## 3. NB (potrebna instalacija Mathematice)

To su *Mathematica* datoteke koje sadrže gotovo isključivo *Mathematica* inpute, a namijenjene su samostalnom učenju naredbi i opcija za crtanje u tom programu.

(primjeri: crtanje krivulja i ploha, crtanje konika)

## 2.3 Primjeri predavanja

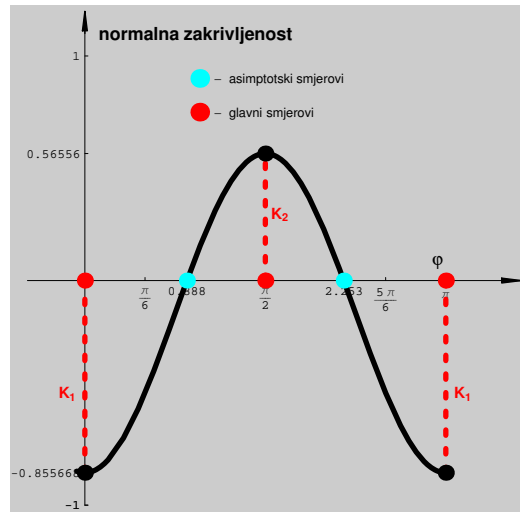
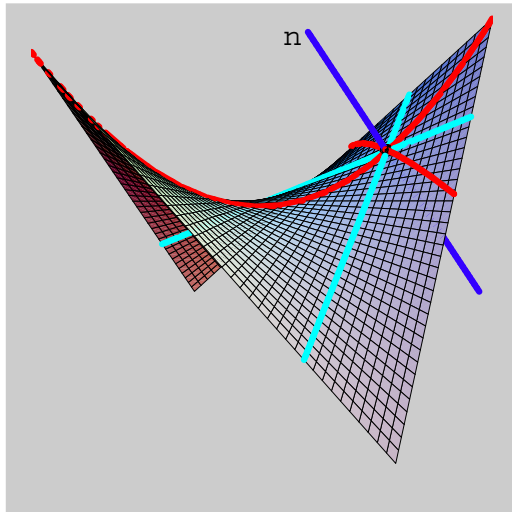
Najopsežniji i najdoradeniji geometrijski edukacijski materijal izrađen na projektu svakako je onaj u mapi *Pravčaste plohe*. Ta je mapa nastala kao pokušaj da se vizualno poboljšaju dijelovi predavanja i auditornih vježbi iz Primijenjene geometrije koji su teorijski zasnovani na [16], [17], [15]. Sadržaj mape je:

1. Općenito o pravčastim plohama
2. Pravčaste plohe 2. stupnja
  - 2.1. Jednokrilni hiperboloid
  - 2.2. Hiperbolički paraboloid
3. Pravčaste plohe 3. stupnja
  - 3.1. Općenito o pravčastim plohama 3. stupnja
  - 3.2. Primjer 1
  - 3.3. Primjer 2
  - 3.4. Natkrivanje paraboloidom 3. reda
4. Pravčaste plohe 4. stupnja
  - 4.1. Općenito o pravčastim plohama 4. stupnja
  - 4.2. Primjer 1
  - 4.3. Primjer 2
5. Gaussova i srednja zakrivljenost na pravčastoj plohi
  - 5.1. Gaussova i srednja zakrivljenost u regularnoj točki plohe
  - 5.2. Eliptičke, hiperboličke, paraboloidne i planarne točke plohe
  - 5.3. Gaussova i srednja zakrivljenost u regularnoj točki vitopere pravčaste plohe
  - 5.4. Gaussova i srednja zakrivljenost hiperboličkog paraboloida
  - 5.5. Gaussova i srednja zakrivljenost kružnog konoida 4. stupnja
  - 5.6. *webMathematica* datoteka za vježbu

Upotreba *Mathematice* zahtijevala je i diferencijalni pristup u kojem se oslanjalo na [14] što je dovelo i do novih načina vizualizacije, nemogućih u klasičnom mediju. Mapa *Pravčaste plohe* čini skup povezanih .HTML, .GIF, .NB i .MSP datoteka koje dobro vizualiziraju relativno teške geometrijske pojmove, te tako znatno olakšavaju njihovo razumijevanje. Pojedini dijelovi mape prezentirani su na internacionalnim strukovnim konferencijama [9], [10], [13] i su bili vrlo dobro komentirani.

Ovu je mapu, zbog animacija, interaktivnih datoteka, dijelova koji sadrže *Mathematica* in-pute ili imaju linkove na internet stranice gotovo nemoguće prikazati u tiskanom mediju. Najbolje ju je pregledati na adresi:

[http://www.grad.hr/itproject\\_math/Links/sonja/pravcaste/pravcaste.html](http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/pravcaste/pravcaste.html)



## 2.4 Primjeri *webMathematica* datoteka

*webMathematica* je skup datoteka, nastao prije manje od dvije godine, koji omogućuje da se u HTML datotekama nalaze naredbe programa *Mathematica*. Čitatelj HTML datoteka može pokrenuti te naredbe i vidjeti rezultate bez instalacije *Mathematice* na svom računalu.

U okviru rada na opisanom projektu instalirana je na računalu [webmath.grad.hr](http://webmath.grad.hr) *webMathematica*. Pristup mu je moguć preko porta 8180 pa je URL adresa na kojoj se nalaze primjeri

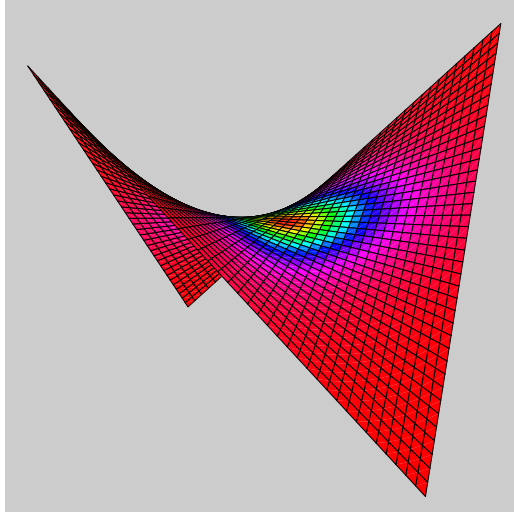
<http://webmath.grad.hr:8180/webMathematica/MSP/IT/>

Instalacija je protekla uz prevladavanje izvjesnih poteškoća, a do sada stečeno iskustvo pokazuje da se neki dijelovi koda iz *Mathematice* ne mogu direktno preslikati u *webMathematicu*, već je potrebno napraviti neke izmjene, što, pak, znači da je pisanje primjera nešto složenije nego što bi se moglo očekivati.

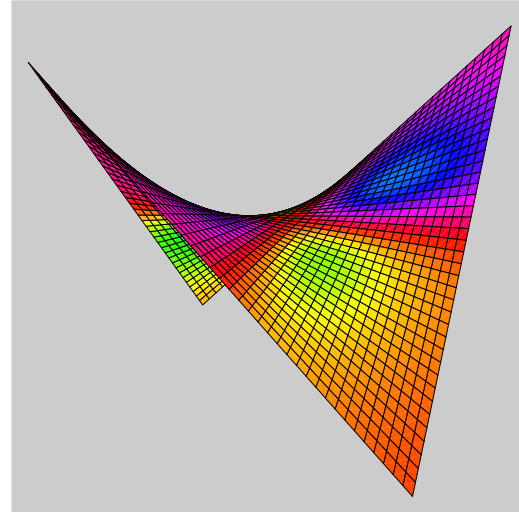
*WebMathematica* nam je omogućila izradu interaktivnih datoteka koje koriste programski jezik *Mathematica* te *Mathematica* naredbe za 2D i 3D grafiku. Za 3D grafiku *WebMathematica* prihvaća i naredbu Live3D što korisniku omogućuje i gibanje nastale slike pomoću miša. Ako je suditi prema sadržaju radova na PrimMathu[2003]<sup>3</sup>, ti su radovi prvi značajniji primjeri edukacijskog materijala na hrvatskom jeziku koji koristi tehnologiju *webMathematice*. Ove su datoteke zbog svoje interaktivnosti još neprikladnije tiskanom mediju nego one opisane u prethodnom odjeljku. Treba se jednostavno poigrati s njima na adresi:

[http://www.grad.hr/itproject\\_math/Links/webmath/index.html](http://www.grad.hr/itproject_math/Links/webmath/index.html)

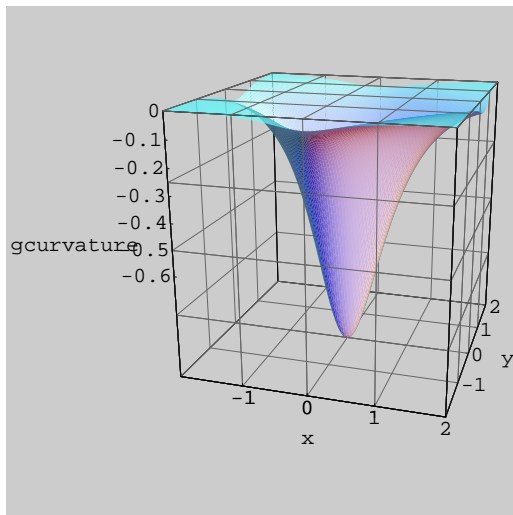
<sup>3</sup>2. znanstveno-stručni skup Programski sustav *Mathematica* u znanosti, tehnologiji i obrazovanju PrimMath[2003], Zagreb, rujan 2003.



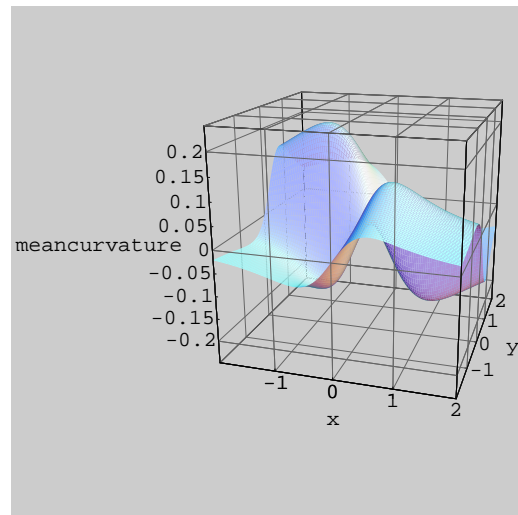
Hipar obojan bojom koja je funkcija njegove Gaussove zakrivljenosti.



Hipar obojan bojom koja je funkcija njegove srednje zakrivljenosti.



Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti hipara.



Graf funkcije srednje zakrivljenosti hipara.

## 2.5 Studentski radovi

Posljednjih je godina sve više studenata 1. godine koji su kroz srednjoškolsko obrazovanje usvojili dosta vještina potrebnih za rad u nekom odgovarajućem programu, uglavnom u AutoCADu. Kako na lokaciji u Holjevčevoj nismo imali niti jedno računalo na kojem bi ti studenti mogli raditi, omogućili smo im da pojedine dijelove programa izrade na kućnom računalu. Tako je nastao prilično velik broj studentskih radova, od kojih bi neki mogli poslužiti i kao primjeri za buduće programe koji će se raditi na računalima. No kako ovdje nema prostora za prezentaciju takvih radova, ističemo samo one koji koriste informatičku tehnologiju, a sadržajno bitno nadilaze okvire obavezne nastave.

- Rad Nine Burića [3] koji koristi AutoCAD. Mentorica je bila Vlasta Szirovicza.
- Rad Borisa Uremovića [22] koji koristi AutoCad. Mentorica je bila Vlasta Szirovicza.
- Rad Sanje Filipan i Hrvoja Kvasničke [5] koji koristi *Mathematicu*. Mentorica je bila Sonja Gorjanc. Pojedini dijelovi toga rada, prošireni vizualizacijama Gaussove i srednje zakrivljenosti, sadržaj su članka [6].
- Rad Željka Đuranića [4] pri čijoj je izradi pomogla Sonja Gorjanc.

### 3 Zaključak

Kako se od ove godine informatičko okruženje za studente 1. godine GFZ-a bitno poboljšalo (preseljenjem u Kačićevu), počele su se i za njih otvarati mogućnosti da barem poneke konstruktivne vježbe izrade na računalima.

Bilo bi dobro, kad se već tako dugo u našoj sredini održao klasični pristup nastavi geometrije, iskoristiti pozitivna, ali i negativna iskustva razvijenijih zemalja, prvenstveno vezana uz informatizaciju nastave geometrije te ih ugraditi u svoje planove za budućnost. Ta iskustva pokazuju da teorijski nivo ne treba smanjivati [20], [21].

Nastavne materijale izrađene u okviru IT projekta i dalje dorađujemo. Oni će možda biti temelj na kojem će se moći graditi neki novi, širi projekt, a posebno bi bilo korisno kad bismo se mogli uklopiti u neki europski.

### Literatura

- [1] Bertoline G. R., 1998, "Visual Science: the Emerging Discipline", 8th International Conference on Engineering Graphics and Descriptive Geometry, Proceedings Vol. I, Austin, Texas, USA, pp. 25-26.
- [2] Brauner H., Kicking W., 1980, *Geometrija u graditeljstvu*, Školska knjiga, Zagreb
- [3] Burić N., 1998, "Primjena hiperboličkog konoida na krovnim plohama", studentski rad nagrađen Rektorovom nagradom
- [4] Đuranić Ž., 2000, "Crtanje prodornih krivulja pomoću AutoCAD-a", KoG, No. 5, pp. 47-49
- [5] Filipan S., Kvasnička H., 2000, "Natkrivanje paraboličkim konoidom", studentski rad nagrađen Rektorovom nagradom
- [6] Filipan S., Gorjanc S., Kvasnička H., 2000, "Natkrivanje paraboličkim konoidom", KoG, No. 5, pp. 57-64.
- [7] Gorjanc S., 1996, "Detalj primjene *Mathematice* u konstruktivnoj geometriji", KoG, No. 1, pp. 43-46.
- [8] Gorjanc S., 1997, "Izvođenje pet tipova pravčastih ploha 4. stupnja", KoG, No. 2, pp. 57-67.
- [9] Gorjanc S., 1997, "The Generation of Ruled Quartics in *Mathematica*", Proceedings of Special SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education, Bratislava-Smolenice, Slovakia, pp. 16-31.
- [10] Gorjanc S., 1998, "The Generation of Ruled Cubics by using *Mathematica*", 8th International Conference on Engineering Graphics and Descriptive Geometry, Proceedings Vol. I, Austin, Texas, USA, pp. 41-48.
- [11] Gorjanc S., 1999, "Prikazi Plückerova konoida u programu *Mathematica 4.0*", KoG, No. 4, pp. 57-59.

- [12] Gorjanc S., 2001, "Vizualizacija svojstava algebarskih pravčastih ploha pomoću sustava *Mathematica*", 1. znanstveno-stručni skup Programski sustav *Mathematica* u znanosti, tehnologiji i obrazovanju PrimMath[2001], Zbornik radova, Zagreb, Hrvatska, pp. 155-169.
- [13] Gorjanc S., 2002, "Some Examples of Using *Mathematica* in Teaching Geometry", 10th International Conference on Geometry and Graphics, Proceedings Vol. II, Kiew, Ukraine, pp. 89-93.
- [14] Gray A., 1998, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, Boca Raton
- [15] Kučinić B., Kristoforović O., Saler I., 1992, *Oble forme u graditeljstvu*, Građevinar, Zagreb
- [16] Müller E., Krames J. L., 1931, *Konstruktive Behandlung der Regelflächen*. Franck Deuticke, Leipzig und Wien
- [17] Niče V., 1980, *Deskriptivna geometrija II*, Školska knjiga, Zagreb
- [18] Pletenac L., 1996, "Novi aspekti nastave u nacrtnoj i primijenjenoj geometriji", KoG, No. 1, pp. 31-34.
- [19] Petric D., 1995, *Naučite HTML i oblikujte sami efektne World Wide Web stranice*, Znak, Zagreb
- [20] Slaby S. M., 1996, "The Future of Engineering Graphics - Descriptive Geometry - Computer Graphics and Theoretical Graphics and their Impact of the World Society", 7th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, Proceedings Vol. I, Cracow, Poland, pp. 3-5.
- [21] Stachel H., 1996, "Why shall we also Teach the Theory Behind Engineering Graphics", 7th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, Proceedings Vol. I, Cracow, Poland, pp. 7-9.
- [22] Uremović B., 1999, "Raskrižje u dvije razine - metoda slojnica", studentski rad nagrađen Dekanovom nagradom
- [23] Wickham-Jones T., 2001, *webMathematica: UserGuide*, Wolfram Research Inc., u obliku pdf filea
- [24] Wolfram S., 1993, *Mathematica Second Edition*, Addison-Wesley