

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

Sanja Hak i Mario Uroš

Gaussova i srednja zakrivljenost ploha
vizualizacije u programu *Mathematica*

Voditeljica: Dr. sc. Sonja Gorjanc

Zagreb, svibanj 2004.

Sadržaj

Predgovor	1
Uvod	2
1 O visećim konstrukcijama	3
1.1 Prednapete vlačne konstrukcije	5
1.2 Specifični problemi	7
1.3 Nalaženje oblika	8
2 O plohama euklidskoga prostora	10
2.1 O prostornim i ravninskim krivuljama	10
2.2 Parametrizacija plohe - parametarske jednačbe plohe	12
2.3 Regularne i singularne točke plohe	13
2.4 Krivolinijski ili Gaussov koordinatni sustav na plohi	14
2.5 Eksplicitna jednačba plohe	15
2.6 Implicitna jednačba plohe	16
2.7 Grafički prikazi ploha pomoću programskog paketa <i>Mathematica</i>	16
2.8 Tangencijalna ravnina i normala plohe	22
2.9 Prva diferencijalna forma plohe	24
2.10 Kut između krivulja na plohi	25
2.11 Druga diferencijalna forma plohe	26
2.12 Vrste točaka na plohi	27
3 Zakrivljenosti ploha	28
3.1 Zakrivljenost krivulje	28
3.2 Normalna zakrivljenost	29
3.3 Glavni i asimptotski smjerovi	30
3.4 Glavni i asimptotski smjerovi na pravčastim plohama	32
3.5 Gaussova i srednja zakrivljenost regularne plohe	35
3.6 Plohe konstantne Gaussove zakrivljenosti	37
4 <i>Mathematica</i> vizualizacije Gaussove i srednje zakrivljenosti	39

4.1	Prikaz <i>Mathematica</i> bilježnice i <i>webMathematica</i> datoteke s vizualizacijama Gaussove i srednje zakrivljenosti ploha	39
4.2	Primjeri	43
5	Minimalne plohe	51
5.1	Definicije, Lagrangeova i Laplaceova jednadžba	51
5.2	Primjeri minimalnih ploha s prikazima u <i>Mathematici</i>	51
6	Određivanje oblika minimalnih mreža	62
6.1	Numeričko određivanje oblika minimalnih mreža	62
6.2	Eksperimentalno određivanje oblika minimalnih mreža	63
	Zaključak	65
	Literatura	66
	Sažetak	68
	Summary	69

Predgovor

Želja za izradom ovog rada nastala je prvenstveno kao rezultat našeg zanimanja za predavanja iz *Primijenjene geometrije* i *Matematike* na prvoj i drugoj godini studija na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Daljnji tijek studija ukazao nam je na veliku povezanost pojedinih općih kolegija, te njihovu primjenu u građevinarstvu. Stoga smo odlučili u našem radu naznačiti i praktičnu primjenu.

Želimo naglasiti da nam je veliku pomoć pružala profesorica Dr. Sonja Gorjanc, bez čije suradnje ovaj rad ne bi mogao nastati. Sugerirajući nam koncept rada, ukazujući na pogreške, te uvelike sudjelujući oko preloma u *LaTeXu* i izradi slika u programima *Mathematica* i *Adobe Illustrator*, postavila nam je potrebnu osnovu za njegovu izradu. Zahvaljujemo joj na stručnom usmjeravanju i srdačnoj podršci. Nadalje želimo zahvaliti inženjeru Vladimiru Beniću, koji nam je pružio softversku podršku, te pomoć pri rješavanju problema vezanih uz rad na računalu. Također su nam veliku pomoć kroz odabir literature i davanje stručnog mišljenja dali prof. Dr. Josip Dvornik i doc. Dr. Krešimir Fresl s Odjela za tehničku mehaniku, na čemu im posebno zahvaljujemo. Nadamo se da će za nas ovaj rad biti tek početak proučavanja slične tematike u građevinarstvu, budući da se u novije vrijeme, naročito razvojem tehnike i materijala, javlja potreba i mogućnost njezinog daljnjeg razvoja.

Uvod

Promatramo li prirodu oko sebe, primjetit ćemo raznolikost i bogatstvo njezinih oblika. Galaksije, kristali, oblaci i valovi svoj oblik duguju zajedničkim zakonima prirode. Oni nastaju u procesu samooblikovanja, bez ljudskog djelovanja, pri čemu i najsitnija promjena uvjeta može značiti potpuno različit oblik.

Ukoliko zakone prirode prihvatimo kao univerzalne i nepromjenjive, oblik prirodne strukture nastale samooblikovanjem zadan je njezinom okolinom, odnosno tzv. rubnim uvjetima. Promatranje te prirodne pojave dovodi do uspostavljanja veze između prirode i tehnike, te razvoja konstrukcija koje odlikuje proces samooblikovanja. [11, str. 84]

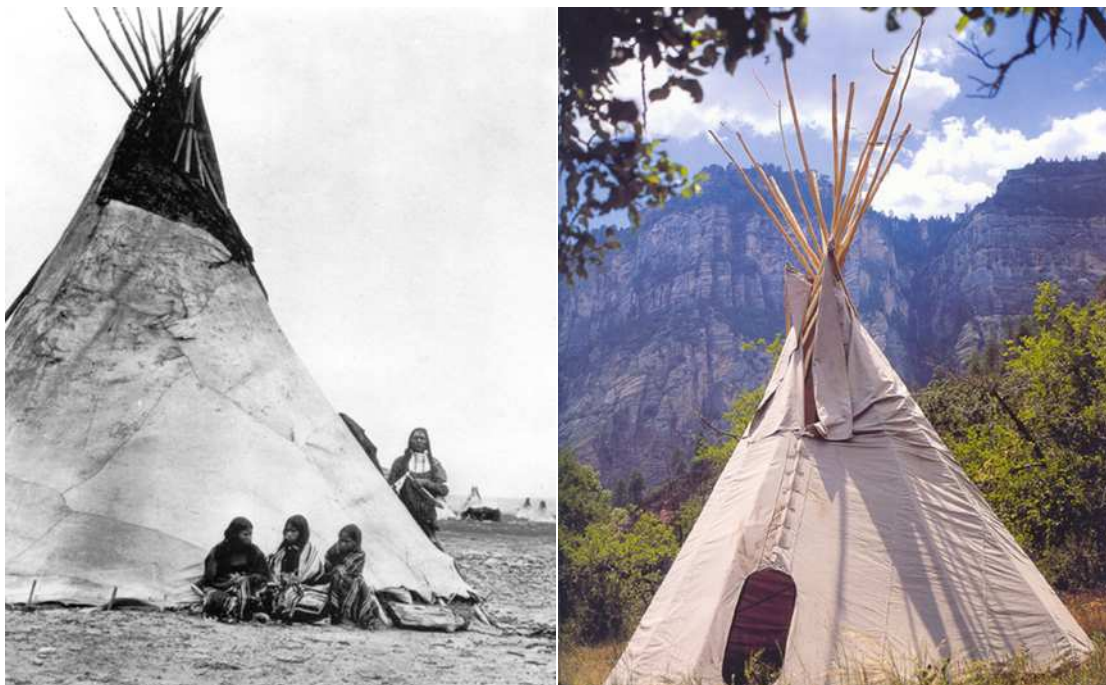
U početku našeg rada želja nam je bila obraditi *Gaussovu i srednju zakrivljenost ploha* što je zahtijevalo metodologiju analitičke i diferencijalne geometrije. Bilo je potrebno objasniti mogućnosti zadavanja ploha u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru, te prvu i drugu osnovnu diferencijalnu formu plohe. Završno smo se namjeravali osvrnuti na plohe kojima je srednja zakrivljenost nula, tzv. *minimalne plohe*. Također smo se željeli upoznati s programskim paketom *Mathematica*, njegovim mogućnostima za simboličko računanje, programiranje i grafičku prezentaciju rezultata. Izradili smo čitav niz primjera vizualizacija Gaussove i srednje zakrivljenosti te minimalnih ploha. Želja za uspostavom veze između obrađene teme i naše buduće struke - građevinarstva, potaknula nas je da učinimo korak dalje. Osvrnuli smo se na konstrukcije kojima teorijski optimalno odgovara upravo oblik minimalne plohe. Naveli smo osnovna svojstva *visećih konstrukcija*, neke specifične probleme prilikom njihovog projektiranja, te najjednostavnije načine numeričkog i eksperimentalnog određivanja oblika minimalnih mreža.

Ovom smo radu priložili CD sa sadržajima koji bi čitatelju trebali omogućiti lakše i kvalitetnije praćenje teksta, samostalnu intervenciju na inpute, te ako ga zanima, detaljnije upoznavanje našeg načina rada u programu *Mathematica*. Na CD-u se nalaze *Mathematica* bilježnice, s ulaznim podacima za sve primjere u radu koji su vezani uz vizualizacije Gaussove i srednje zakrivljenosti, te minimalnih ploha. Također nam se činilo prikladnim na CD-u priložiti sav navedeni materijal u HTML formatu, što čitatelju omogućuje jednostavno i ilustrativno pregledavanje evaluiranih primjera i na računalu koje nema instaliran programski paket *Mathematica*.

Budući da sve reprezentativne primjere visećih konstrukcija, koji su nam bili zanimljivi i poučni, nismo mogli prezentirati u radu, na CD-u se nalazi i datoteka s većim brojem slika i linkova.

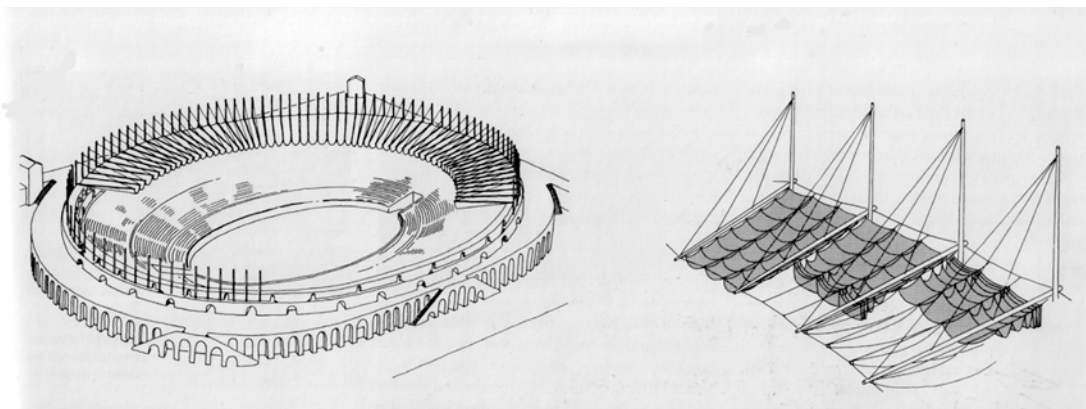
1 O visećim konstrukcijama

U prošlosti su konstrukcije od užadi i tkanina imale veliku važnost u građenju. Poznato je da su ljudi, još u davna vremena, koristili kožu životinja kao pokrove. Neki su narodi živjeli u šatorima, a neki i danas žive u takvim nastambama. Poznato je, također, da su šatori imali veliku primjenu u vojsci.



Slika 1: Na lijevoj fotografiji je originalni wigvam američkih Indijanaca prekriven kožom, a na desnoj današnja rekonstrukcija takvog šatora. [5]

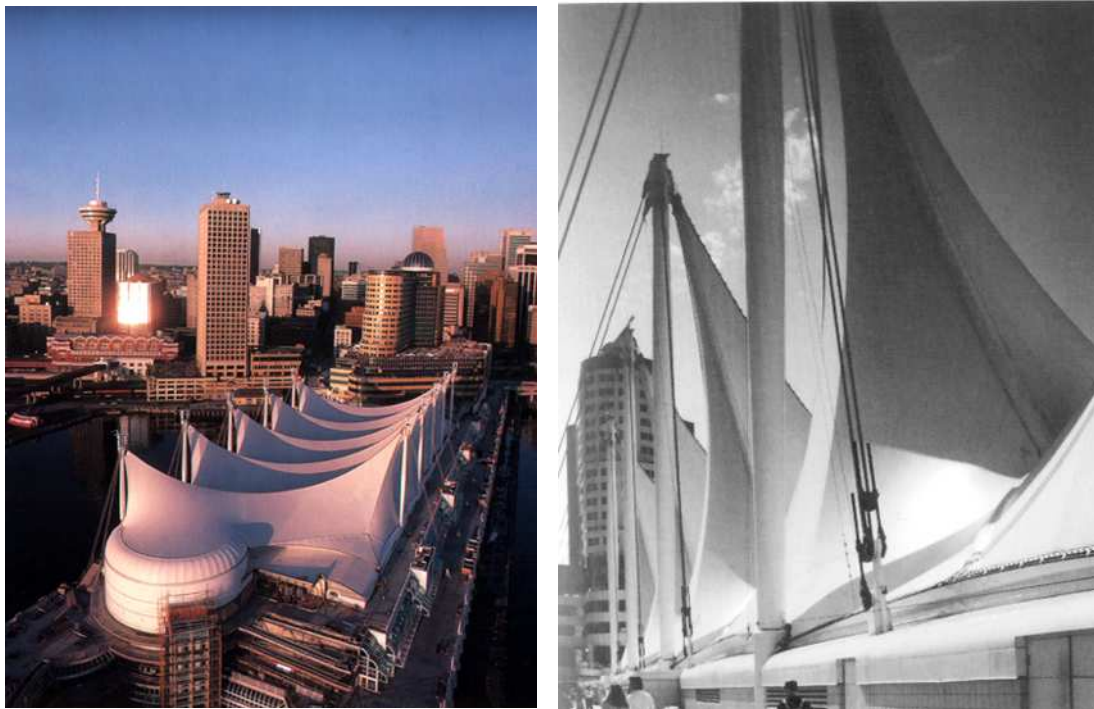
Konstrukcije od užadi i tkanina od davnina se koriste za natkrivanja velikih javnih objekata.



Slika 2: Lijevi crtež prikazuje amfiteatar u Pompejima koji koristi rimski sistem "vela" čija je svrha prekrivanje gledališta, tj. zaštita od sunca. Desni crtež prikazuje detalj sistema "vela".

U novije se vrijeme intenzivno razvijaju lagane, gipke konstrukcije od užadi i tkanina. To su uglavnom krovne konstrukcije, ali i mostovi, fasadne konstrukcije itd.

Nagli razvoj omogućen je, prije svega, primjenom računala, bez kojih je gotovo nemoguće zamisliti opsežan i precizan proračun, te točan grafički prikaz. Pored toga, u današnje je vrijeme uveliko napredovala znanost o raznim sintetičkim materijalima koji su se pokazali kao jako dobra zamjena raznim platnima i životinjskoj koži, ne samo po kvaliteti već i po cijeni.



Slika 3: Canada Place, Vancouver, B.C. Canada, 1985. god. Snimka iz zraka (lijevo) i detalj konstrukcije (desno).

Proračun gipkih konstrukcija je složen posao koji pretpostavlja veliko znanje i iskustvo konstruktora, jer ponašanje same konstrukcije ovisi o velikom broju parametara koje nije moguće sve uzeti u obzir. Tu su još i razne pretpostavke koje umanjuju točnost pa je zadatak konstruktora naći neko optimalno rješenje. Pri proračunu gipkih konstrukcija potrebno je uvažiti *teoriju velikih pomaka*, tj. *geometrijsku nelinearnost*, a vrlo često i *materijalnu nelinearnost*, koja je izražena kod sintetičkih materijala.

Određivanje oblika formalno se provodi metodom pomaka koja se upotrebljava i u analizi konstrukcija. Interpretacija je ipak nešto drukčija nego kod standardne metode pomaka, jer promjene koordinata čvorova ne nastaju deformiranjem unaprijed zadanih elemenata, nego promjenom nedeformabilnih oblika elemenata, ponekad i bez promjene naprežanja. Stoga bi bilo točnije reći da postoji analogija između problema određivanja oblika i metode pomaka, te se može primijeniti isti numerički postupak. [6, str. 84]

1.1 Prednapete vlačne konstrukcije

Općenito je poznata činjenica da su *vlačni elementi* najzahvalniji što se tiče konstruktorskih zahtjeva. U prirodi postoji mnogo materijala koji se uz pravilno oblikovanje i poboljšanje, ukoliko je to potrebno, mogu koristiti kao vlačni elementi visoke *vlačne krutosti* i *nosivosti*, a da ne pružaju gotovo nikakav otpor na savijanje i torziju. Potrebno je naglasiti da se pod pojmom krutosti podrazumijeva otpor nekog tijela promjeni oblika i dimenzija, tako da za tijela koja imaju malu krutost možemo reći da imaju velike deformacije. U prirodi je ipak nemoguće proizvesti materijal koji nema krutost na savijanje i torziju, pa tako kažemo da svi materijali imaju *parazitna naprezanja* uslijed savijanja i torzije. Ta neprezanja su veća što je i krutost elementa veća.

Postoji čitav niz vlačnih elemenata.

Jednodimenzionalni vlačni elementi, kao što su: nit, žica, uža i lanac prenose samo centrične vlačne sile. Takve konstrukcije imaju malu vlastitu masu prema nosivosti koja zna biti jako velika. U jednodimenzionalnim vlačnim elementima naprezanje je duž osi i po poprečnom presjeku konstantno. To ih čini vrlo pogodnima za natkrivanje velikih raspona kao što su stadioni, sportske dvorane ili izložbeni paviljoni.



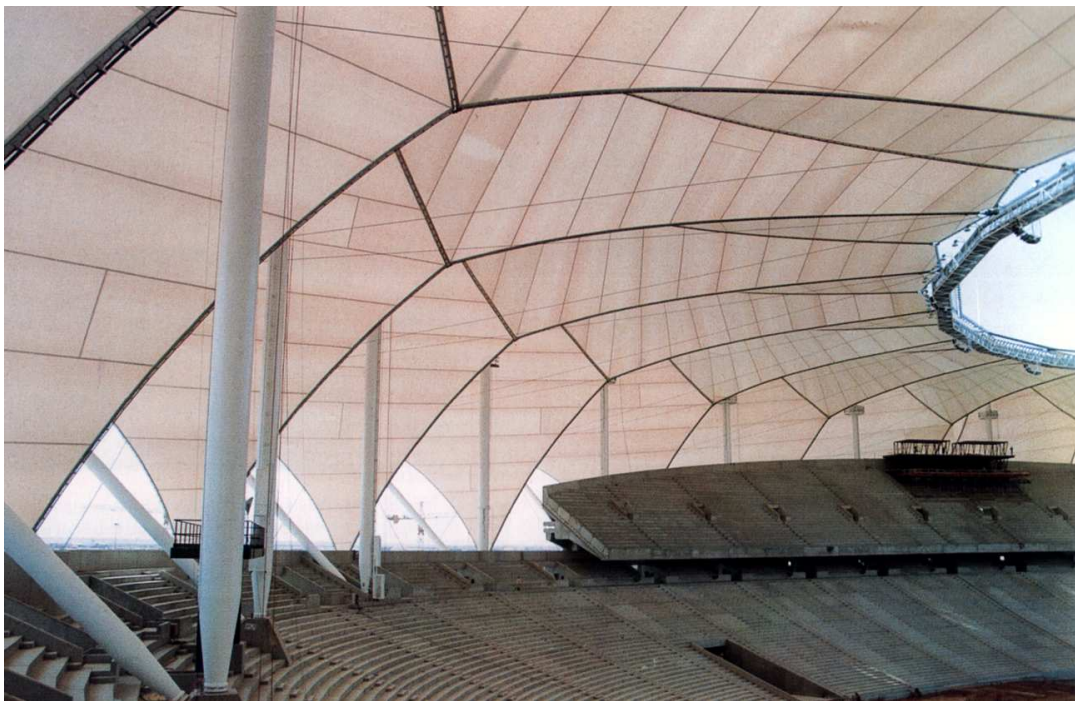
Slika 4: Haj Terminal u međunarodnoj zračnoj luci Jeddah. Saudijska Arabija, 1981. god. U tehnološkom smislu izvedba je brza i svodi se na montažu tvorničkih prefabrici-

ranih elemenata što, uz malu težinu, te konstrukcije čini uvelike mobilnima. Zato su i česti primjeri uporabe tih konstrukcija za privremene namjene, npr. za nadstrešnice nad pozornicama u prirodi.

Dvodimenzionalni vlačni elementi su različiti plošni gipki nosači, opne i tkanine. Oni nemaju toliki omjer nosivosti i mase kao užadi i žice i ne koriste se za toliko velike raspone, ali imaju značajnu ulogu kao krovne konstrukcije. Razvojem sintetičkih materijala njihova je primjena postala značajnija.

Danas su česte kombinacije jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih elemenata. Tu se glavna konstrukcija sastoji od užadi i žica, dok se sekundarna sastoji od sintetičkih tkanina.

Važnu ulogu kod građevina natkrivenih prednapetim konstrukcijama imaju, tzv. *komplementarne konstrukcije*. To su one konstrukcije koje preuzimaju ležajne sile od membrane ili užadi od kojih se sastoji sam pokrov. Poznato je da svaka razapeta membrana mora imati nekakav okvir, tj. geometrijske rubne uvjete. To mogu biti *linijski* rubni uvjeti gdje nam je poznat rub duž cijele stranice, ili mogu biti *točkasti* rubni uvjeti gdje znamo položaj u određenim točkama, a između njih opna poprima oblik prema već projektiranoj minimalnoj plohi. Komplementarne konstrukcije kao takve uvelike poskupljuju i otežavaju samu izvedbu, ali je povoljno što su za funkciju objekata natkrivenih prednapetim konstrukcijama gotovo uvijek potrebne i krute konstrukcije koje mogu preuzeti i ulogu komplementarne konstrukcije. Takav primjer su tribine na stadionima.



Slika 5: King Fadh stadion, Riyadh, Saudijska Arabija, 1985. god.

Kod građevina natkrivenih prednapetim konstrukcijama od velikog je značaja odabir sila prednapona, koje uvijek trebaju zadovoljiti dva granična uvjeta.

Prvi uvjet je da sila prednapona bude što manja. Tako elementi ne bi bili jako opterećeni, te bi teže dolazilo do njihova kidanja i popuštanja. Također bi se smanjio utjecaj puzanja i linearne deformacije elemenata koja se u proračun uzima uz niz pretpostavki. Još jedan važan razlog je i manje opterećenje komplementarne konstrukcije.

Drugi uvjet je da sile prednapona moraju biti dovoljno velike da se konstrukcija pod djelovanjem vanjskog opterećenja ne bi olabavila. Pod izvanrednim opterećenjem dopušten je lokalni gubitak sila prednapona, ako to ne smeta određenoj vrsti pokrova, ali samo na malom dijelu krovne plohe. Mlohavost većeg dijela plohe uzrokuje jako treperenje pod djelovanjem vjetra. [6, str. 244-245]



Slika 6: Tennessee Amphitheater, Knoxville, Tennessee, USA, 1982. god.

1.2 Specifični problemi

Projektiranje gipkih prednapetih konstrukcija sa sobom nosi neke probleme koji mogu biti standardni, a mogu biti specifični za ovaj tip konstrukcije. Takve probleme projektant mora uspješno riješiti. Osnovni problemi su oni koji se pojavljuju pri modeliranju i proračunu svih ostalih konstrukcija. To su: određivanje pomaka, deformacija i naprezanja pod vanjskim opterećenjem, dinamički proračuni itd. Već je spomenuto da je kod gipkih prednapetih konstrukcija potrebno uzeti u obzir geometrijsku nelinearnost, a u dosta slučajeva i materijalnu nelinearnost, pa stoga i takvi naoko jednostavni problemi postaju zahtjevni.

Problemi karakteristični za gipke konstrukcije su prije svega *nalaženje oblika* (form finding) i *određivanje kroja* (cutting pattern). Oblik prednapetih konstrukcija ne može se

unaprijed odabrati po volji, nego se mora izračunati iz uvjeta ravnoteže, uvažavajući ranije spomenute rubne uvjete. Dodatni problem postoji kod konstrukcija od tkanine, a on je posljedica činjenice da se dvostuko zakrivljene krovne plohe ne mogu, bez uzdužnih deformacija, razmotati u ravninu. Naprezanjima same membrane nužno se dodaju i parazitna naprezanja, koja su posljedica deformacije ravnih komada membrane, jer ona postoje i kad je tkanina optimalno skrojena, a povećavaju se kada kroj znatno odstupa od idealnog. Naprezanja zbog vitoperenja rastu kada se komadi tkanine povećavaju. To je jasno, jer što veći dio plohe pokrivamo s jednim komadom tkanine, potrebne su veće deformacije da ta tkanina poprimi oblik tzv. *minimalne plohe*. Nasuprot tome, nije pogodno koristiti ni male komade tkanine, jer time uzrokuje preveliki broj spojeva koji djeluju kao ukrute na kojima je tkanina preklapljena. Te ukrute su uzrok smetnji u razdiobi krutosti i, što je posebno negativno, povećavaju nehomogenost i anizotropiju materijala, što za posljedicu ima dodatna parazitna naprezanja. Važnu ulogu ima i debljina same membrane, koja određuje njezinu krutost. Pri povećavanju debljine membrane smanjit će se pomaci uzrokovani vanjskim djelovanjem, jer će i *aksijalna krutost* (produkt modula elastičnosti i debljine) biti veća, ali to će uzrokovati velika dodatna parazitna naprezanja. Ako smanjimo debljinu, a time i aksijalnu krutost, izbjeći ćemo dodatna parazitna naprezanja, ali će pomaci biti veliki i nepraktični.

Prilikom promatranja gipkih prednapetih konstrukcija, kao i kod svih onih konstrukcija gdje je uvjeta ravnoteže potrebni postavljati na deformiranom sustavu, osim pojma materijalne krutosti uvodi se i geometrijska krutost. Geometrijska krutost se može prikazati na napetoj žici koja će oscilirati frekvencijom koja je proporcionalna sili napetosti. Jače nategnuta žica ima veću geometrijsku krutost.

Navedeni problemi imaju za posljedicu odstupanje oblika plohe od idealnog oblika minimalne plohe, a na konstruktoru je zadatak da njihov utjecaj svede na minimum, a da konstrukcija i dalje bude financijski opravdana. [6, str. 246-247]

1.3 Nalaženje oblika

Određivanje oblika prednapete membrane u prošlosti se isključivo radilo prema iskustvu i tradiciji. Zbog toga je bilo dosta pogrešaka, od nejednoliko napregnute užadi do nabiranja uslijed netočnosti u kroju i izvedbi. Nabori su negativna pojava, jer povećavaju treperenje na vjetru. Uz to ih se smatra konstrukcijskim i estetskim nedostatkom. S razvojem tehnike i matematike počele su se primjenjivati neke nove tehnologije, ali sve do primjene računala u graditeljstvu to se svodilo na eksperimentiranje i pogađanje. Razvojem računala proračuni u graditeljstvu su dobili novu dimenziju. Proračuni pogodni za obradu na računalu potisnuli su zastarjele analitičke metode. Tako se danas oblik prednapete membrane određuje prvenstveno numeričkim metodama koje su pogodnije za računalnu obradu. Važno je napomenuti da se numerički određen oblik plohe, za veće i važnije objekte, eksperimentalno provjerava u laboratorijskom tunelu.

Krov od tkanine opterećen samo jednolikim silama prednapona poprima oblik *minimalne plohe*. Na takvoj su plohi naprezanja jednaka u svakoj točki i u svim smjerovima tangencijalne ravnine. Takva ploha ima najmanju površinu od svih onih koje zado-

voljavaju iste rubne uvjete. Detaljan matematički opis ovakvih ploha dati ćemo u 5. poglavlju ovoga rada.

Pogodnosti minimalnih ploha kao oblika za prednapete membrane su velike. Osnovne su prednosti to što je naprezanje u svim točkama i smjerovima jednako i što nigdje na plohi nema ekstremnih naprezanja, tako da nema kritičnih mjesta gdje može doći do popuštanja membrane. To nam govori da je nosivost tkanine svuda jednako iskorištena. Druga pogodnost je ta da minimalna ploha po svojoj definiciji zauzima minimum prostora, tj. potrebno je manje materijala, ali to nije toliko bitno jer su uštede minimalne. Važna karakteristika minimalnih ploha je ta da oblik deformirane plohe opterećene samo prednaponskim silama ne ovisi o svojstvima materijala, niti o apsolutnom iznosu prednaponskih sila, nego samo o omjeru i razdiobi tih sila. Kao zaključak proizlazi uvjet da sile ne smiju biti negativne.

Ponekad postoje razna ograničenja i prepreke pa nije moguće izvesti krovnu konstrukciju u obliku minimalne plohe, stoga projektant može mijenjati oblik krova varirajući prednaprezanje u membrani po iznosu i po smjeru. Teoretski je to nemoguće kod minimalnih ploha. Primjer je opna od sapunice koja ne može preuzeti posmična naprezanja, pa se može zaključiti da su oba glavna naprezanja u tangencijalnoj ravnini jednaka. Dakle, idealna membrana u ravnotežnom stanju može tvoriti samo minimalnu plohu.

2 O plohama euklidskoga prostora

U ovom poglavlju metodama diferencijalne geometrije obrađuju se svojstva ploha trodimenzionalnog euklidskog prostora \mathbb{R}^3 [10, str. 2]. Razmatranja se vrše u pravokutnom Kartezijevom koordinarnom sustavu $(Oxyz)$. Uređene trojke realnih brojeva $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nazivaju se točkama euklidskoga prostora i identificiraju s njihovim radij-vektorima $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Izloženi sadržaj može se naći u literaturi navedenoj pod [1], [9], [10], [13] i [14].

2.1 O prostornim i ravninskim krivuljama

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval realnih brojeva, tj. $I = (a, b)$, uključujući i slučajeve kada je $a = -\infty$ ili $b = +\infty$.

Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija dana formulom

$$\alpha(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (1)$$

gdje su $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije klase $C^1(I)$ tj. imaju neprekidne prve parcijalne derivacije na I .

Skup točaka euklidskoga prostora

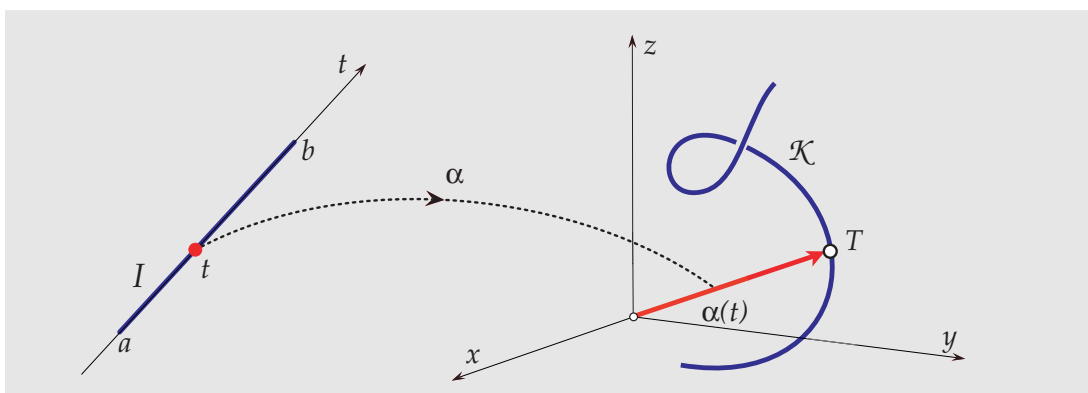
$$\mathcal{K} = \{T \in \mathbb{R}^3 \mid T = (x(t), y(t), z(t)), t \in I\} \quad (2)$$

nazivamo *prostornom krivuljom*, a uređeni par (I, α) *parametrizacijom krivulje* \mathcal{K} . Za svaku krivulju \mathcal{K} postoji beskonačno mnogo parametrizacija.

Prostorna krivulja \mathcal{K} može se zadati i s tri *parametarske jednadžbe*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (3)$$

gdje su $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne skalarne funkcije iz jednakosti (1).

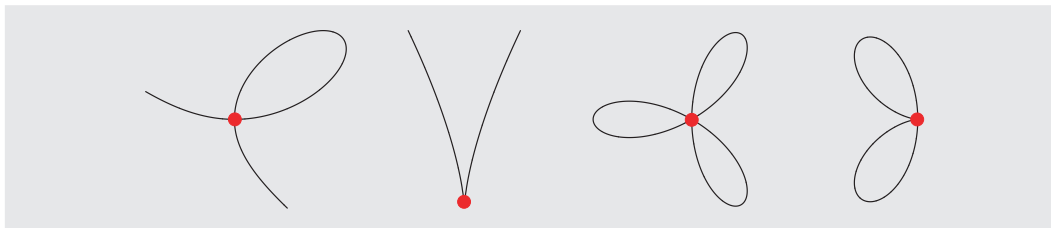


Slika 7: Vektorska funkcija α preslikava točku intervala I u radij-vektor točke T krivulje \mathcal{K} . Za točku $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, $t_0 \in I$, krivulje \mathcal{K} s parametrizacijom (I, α) kažemo da je *regularna* ako je $x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 + z'(t_0)^2 \neq 0$, tj. ako za nju postoje prve derivacije skalarne funkcije i ako je barem jedna od njih različita od 0.

Za točku $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, $t_0 \in I$, krivulje \mathcal{K} kažemo da je *singularna točka parametrizacije* (I, α) ako je $x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 + z'(t_0)^2 = 0$.

Krivulja \mathcal{K} je *regularna* ako postoji barem jedna parametrizacija za koju je svaka njezina točka regularna.

Za točku $T \in \mathcal{K}$ kažemo da je *singularna točka krivulje*, ako je ona singularna točka svake njezine parametrizacije.



Slika 8: U singularnoj točki krivulja samu sebe siječe (jednom ili više puta), dodiruje, i dodiruje i siječe i sl.

U svakoj regularnoj točki $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ krivulje \mathcal{K} , s parametrizacijom (I, α) , postoji jedinstvena tangenta. Njezina je vektorska jednadžba

$$\mathbf{t} = \alpha'(t_0) + \rho \alpha'(t_0) \quad (4)$$

gdje je $\rho \in \mathbb{R}$, a $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija dana jednadžbom

$$\alpha'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}. \quad (5)$$

Funkciju $v(t) = |\alpha'(t)|$ nazivamo *brzinom* parametrizacije.

Svaka se regularna krivulja \mathcal{K} može parametrizirati tako da krivulja u svakoj točki ima jediničnu brzinu [10, str. 11].

Za danu parametrizaciju (1), gdje ćemo odabrati $a \neq -\infty$, promatramo preslikavanje $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dano formulom

$$s(t) = \int_a^t |\alpha'(t)| dt. \quad (6)$$

Funkcija (6) je neprekidna i monotono rastuća, pa bijektivno preslikava interval I na neki interval $J \subset \mathbb{R}$. Svaka takva funkcija ima inverznu funkciju. Označimo inverz $s^{-1}(t)$ sa

$$t = t(s) : J \rightarrow I. \quad (7)$$

Neka je preslikavanje $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ kompozicija

$$\alpha \circ t = \beta. \quad (8)$$

Parametrizacija (J, β) krivulje \mathcal{K} je *parametrizacija prirodnim parametrom* ili *duljinom luka* s i ima svojstvo da je za nju tangencijalni vektor u svakoj točki krivulje \mathcal{K} jedinični.

Svaka se krivulja \mathcal{K} može parametrizirati prirodnim parametrom. Singularne točke te parametrizacije ujedno su i singularne točke krivulje.

Ista smo razmatranja mogli provesti i za slučaj $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, kada je područje vrijednosti euklidska ravnina, a krivulja \mathcal{K} ravninska krivulja.

Vektorska jednadžba ravninske krivulje je

$$\alpha(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad (9)$$

a parametarske jednadžbe glase

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (10)$$

2.2 Parametrizacija plohe - parametarske jednadžbe plohe

Neka je $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ otvoren i povezan skup (područje) i neka je $\mathbf{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija dana formulom

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (11)$$

gdje su $x, y, z : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije klase $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ tj. imaju neprekidne prve parcijalne derivacije na \mathcal{U} .

Skup točaka euklidskoga prostora

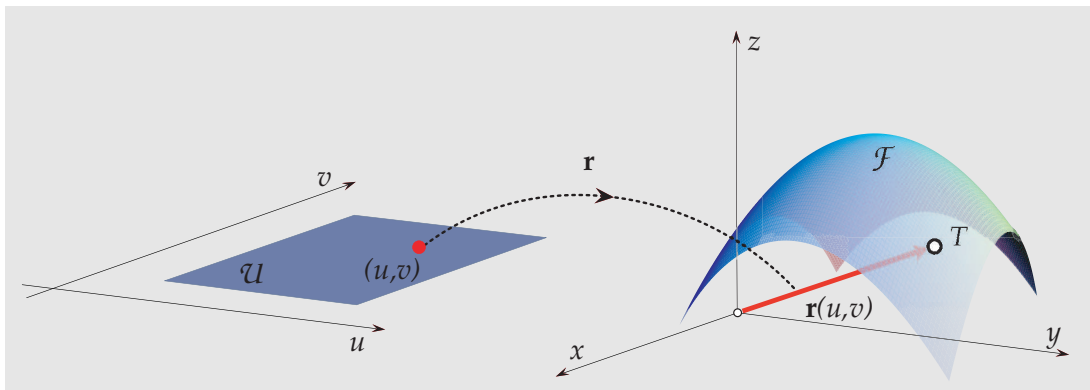
$$\mathcal{F} = \{T \in \mathbb{R}^3 \mid T = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \mathcal{U}\} \quad (12)$$

nazivamo *plohom*, a uređeni par $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ *parametrizacijom plohe* \mathcal{F} .

Ploha \mathcal{F} može se zadati i s tri *parametarske jednadžbe*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (13)$$

gdje su $x, y, z : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne skalarne funkcije iz jednakosti (11).



Slika 9: \mathcal{U} je najčešće pravokutno područje u \mathbb{R}^2 . Vektorska funkcija \mathbf{r} preslikava točku područja \mathcal{U} u radij-vektor točke T plohe \mathcal{F} .

2.3 Regularne i singularne točke plohe

Parcijalne derivacije vektorske funkcije (11) su, prema pretpostavci, neprekidne vektorske funkcije $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane formulama:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u(u, v) &= x_u(u, v)\mathbf{i} + y_u(u, v)\mathbf{j} + z_u(u, v)\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= x_v(u, v)\mathbf{i} + y_v(u, v)\mathbf{j} + z_v(u, v)\mathbf{k}.\end{aligned}\tag{14}$$

Jacobijeva matrica parametrizacije $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ je matrica oblika:

$$\mathcal{J}(\mathbf{r})(u, v) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u(u, v) \\ \mathbf{r}_v(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{bmatrix}\tag{15}$$

Sljedeće četiri tvrdnje su ekvivalentne:

- (i) Vektori $\mathbf{r}_u(u, v)$ i $\mathbf{r}_v(u, v)$ linearno su nezavisni.
- (ii) $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq 0$
- (iii) Matrica $\mathcal{J}(\mathbf{r})(u, v)$ je ranga 2.
- (iv) Barem jedna od funkcijskih determinanti

$$\begin{vmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix},$$

je različita od nule.

Za točku T plohe \mathcal{F} koja odgovara uređenom paru (u_0, v_0) kažemo da je *regularna točka parametrizacije* $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ ako je

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq 0.\tag{16}$$

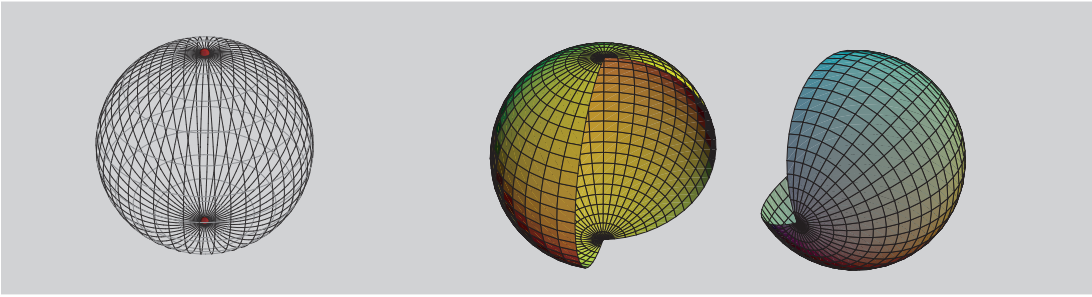
Za točku T plohe \mathcal{F} koja odgovara uređenom paru (u_0, v_0) kažemo da je *singularna točka parametrizacije* $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ ako je

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = 0.\tag{17}$$

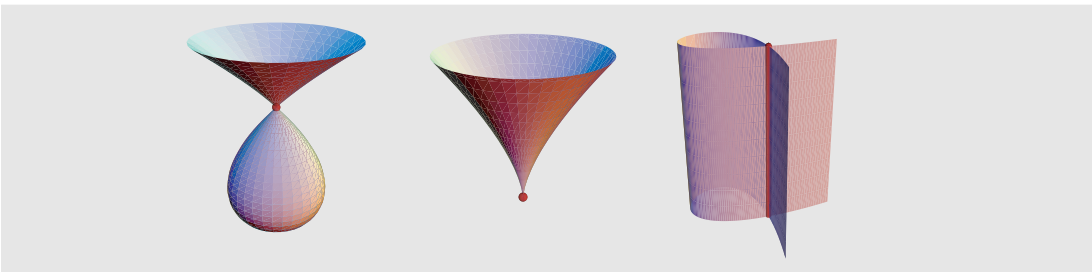
Neka ploha \mathcal{F} može imati više različitih parametrizacija. Točka plohe koja je singularna za jednu parametrizaciju ne mora biti singularna i za ostale njezine parametrizacije.

Za plohu \mathcal{F} kažemo da je *regularna* ako svaka njezina točka ima u \mathcal{F} okolinu s regularnom parametrizacijom.

Za točku $S \in \mathcal{F}$ kažemo da je *singularna točka plohe* ako je ona singularna točka svake njezine parametrizacije.



Slika 10: Sfera je primjer regularne plohe koja se ne može “pokriti” jednom regularnom parametrizacijom. Standardna parametrizacija sfere polumjera r je $(u, v) \mapsto r(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$, gdje je $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Pri toj parametrizaciji u -krivulje (v je konstanta) nazivamo *paralelama*, a v -krivulje (u je konstanta) *meridijanima*. *Polovi*, tj. točke $(0, 0, \pm r)$, singularne su točke te parametrizacije. Međutim, svaka se sfera može pokriti već s dvije regularne parametrizacije.



Slika 11: U sigularnoj točki ploha samu sebe siječe, dodiruje i sl. Ako su sve točke neke krivulje na plohi singularne, onda takvu liniju nazivamo singularnom linijom plohe.

2.4 Krivolinijski ili Gaussov koordinatni sustav na plohi

Ako se u jednadžbama (13) za jedan parametar uzme konstanta, dok drugi mijenja vrijednosti unutar područja \mathcal{U} , parametarski je zadana prostorna krivulja koja leži na zadanoj plohi. Tako je za $v = v_0$ jednadžbama

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad z = z(u, v_0) \quad (18)$$

parametarski zadana tzv. u -krivulja plohe, a za $u = u_0$ jednadžbama

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \quad z = z(u_0, v) \quad (19)$$

parametarski je zadana tzv. v -krivulja plohe.

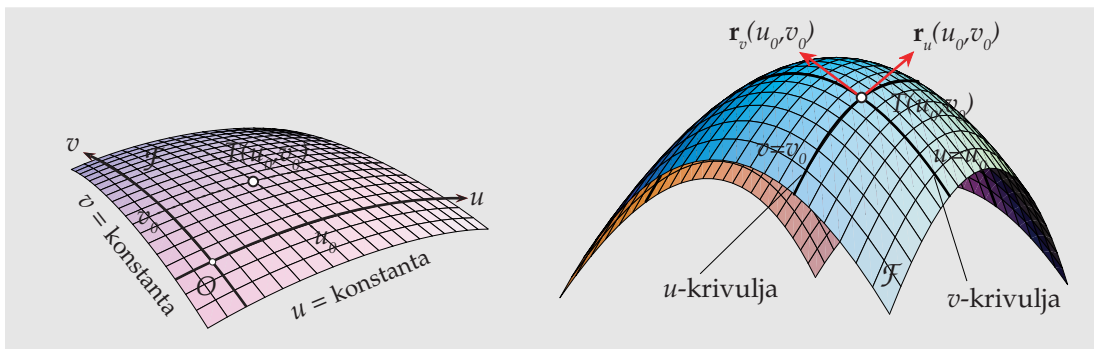
Na taj način će za različite konstante $u = u_i, v = v_k, (i, k \in \mathbb{R})$ na zadanoj plohi nastati dva sustava prostornih krivulja, pri čemu svaka krivulja jednog sustava siječe svaku krivulju drugog sustava u jednoj i samo jednoj točki.

Svaka točka na plohi bit će određena sjecištem dviju prostornih krivulja iz različitih sustava. Takve krivulje nazivamo *koordinatnim* ili *parametarskim* krivuljama plohe. Odabirom po jedne krivulje iz svakog sustava za koordinatne osi, a njihovog sjecišta za

ishodište, uspostavlja se *krivolinijski* ili *Gaussov* koordinatni sustav na plohi. Svakoj točki plohe pridružena su dva realna broja u_0 i v_0 , tzv. krivolinijske ili Gaussove koordinate točke, koje određuju krivulje prvog i drugog sustava koje se sijeku u toj točki.

Budući da, prema pretpostavci, funkcije iz jednadžbi (13) imaju neprekidne prve parcijalne derivacije po u i po v , koordinatne krivulje u svakoj svojoj točki imaju tangentu. Vektori (14) vektori su tangenata koordinatnih krivulja. Njihove su duljine:

$$|\mathbf{r}_u| = \sqrt{(x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2}, \quad |\mathbf{r}_v| = \sqrt{(x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2}. \quad (20)$$



Slika 12: Gaussov krivolinijski koordinatni sustav na plohi.

2.5 Eksplicitna jednadžba plohe

Neka je \mathcal{U} područje (otvoren i povezan skup) u \mathbb{R}^2 i neka $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ima na \mathcal{U} neprekidne prve parcijalne derivacije po x i y . Graf funkcije f nazivamo *regularnom* (*glatkom*) *plohom*. Jednadžbu takve plohe nazivamo *eksplicitnom* i ona glasi

$$z = f(x, y). \quad (21)$$

Da bi se s parametarskog oblika zadavanja plohe moglo prijeći na *eksplicitan* oblik barem jedna od funkcijskih determinanti (iv) mora biti različita od nule. Neka je $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ i neka za prvu funkcijsku determinatu vrijedi

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (22)$$

Tada se prema [13, str. 158] može izvršiti inverzija prvih dviju jednadžbi (13) i postaviti dvije nove, jednoznačne, neprekidne funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ koje imaju neprekidne prve parcijalne derivacije u okolini točke (x_0, y_0) koja odgovara točki (u_0, v_0) . Pri tome vrijedi $u(x_0, y_0) = u_0$ i $v(x_0, y_0) = v_0$.

Nakon uvrštavanja tih dviju funkcija u treću jednadžbu (13) nastaje jednoznačna, složena i neprekidna funkcija z_1 od x i y , a jednadžba

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = z_1(x, y) \quad (23)$$

predstavlja eksplicitan oblik zadavanja plohe. Ako su uvažene sve pretpostavke, funkcija z_1 mora imati neprekidne prve parcijalne derivacije po x i po y .

2.6 Implicitna jednađba plohe

Neka je \mathcal{U} područje u \mathbb{R}^3 i neka je funkcija $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ klase $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ tj. prve parcijalne derivacije $F_x, F_y, F_z : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije na \mathcal{U} . Jednađbu

$$F(x, y, z) = 0 \quad (24)$$

nazivamo *implicitnom* jednađbom plohe, ako postoji barem jedna točka (x_0, y_0, z_0) takva da zadovoljava jednađbu (24) i da je u njoj barem jedna od parcijalnih derivacija F_x, F_y, F_z različita od 0. Ovaj uvjet osigurava egzistenciju regularnog dijela plohe. Naime, ako je npr. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ tada, prema [13, str. 153], postoji jednoznačna, neprekidna funkcija $z = z(x, y)$ koja u okolini točke (x_0, y_0) identički zadovoljava vezu $F(x, y, z(x, y)) = 0$ i u toj točki funkcija z ima neprekidne prve parcijalne derivacije po x i po y . Točku (x_0, y_0, z_0) u kojoj su ispunjeni navedeni uvjeti zovemo *običnom* ili *regularnom* točkom plohe.

Kako bi barem jedna od parcijalnih derivacija funkcije F bila različita od nule, za regularnu točku plohe mora biti zadovoljen uvjet:

$$F_x^2(x_0, y_0, z_0) + F_y^2(x_0, y_0, z_0) + F_z^2(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \quad (25)$$

Nasuprot tome, (x_0, y_0, z_0) je singularna točka implicitno zadane plohe ako ona zadovoljava jednađbu (24) i ako vrijedi

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (26)$$

Iz dosadašnjih razmatranja može se zaključiti da polazeći od parametarskih jednađbi plohe do eksplisitnog i implicitnog oblika dolazimo eliminacijom parametara u i v .

2.7 Grafički prikazi ploha pomoću programskog paketa *Mathematica*

Mathematica je svestran programski sustav i programski jezik za izradu matematičkih i drugih aplikacija. Može se primijenjivati kao numerički i simbolički kalkulator, sustav za vizualizaciju funkcija i podataka, visoko razvijeni programski jezik, okolina za modeliranje i analizu podataka, sustav za reprezentaciju znanja, softverska platforma za pokretanje drugih aplikacija itd.

Mathematica se sastoji od dva osnovna dijela: u jezgri (*kernel*) odvija se samo računanje, dok se u grafičkom sučelju (*front end*) vrše ulazno/izlazne operacije, odnosno pripremanje ulaznih podataka i prikazivanje rezultata dobivenih od jezgre.

Osnovni format datoteka koje se koriste u *Mathematici* naziva se bilježnicom (*notebook*). Bilježnice imaju razgranatu hijerarhijsku strukturu, te osim inputa i outputa mogu sadržavati izraze, tekst, slike, animacije, zvuk i linkove na druge sadržaje.

Naredba `ParametricPlot3D`

Naredbom `ParametricPlot3D` može se grafički prikazati ploha zadana parametarskim jednađbama:

$$f_x = x(u, v), \quad f_y = y(u, v), \quad f_z = z(u, v), \quad (u, v) \in [u_{min}, u_{max}] \times [v_{min}, v_{max}].$$

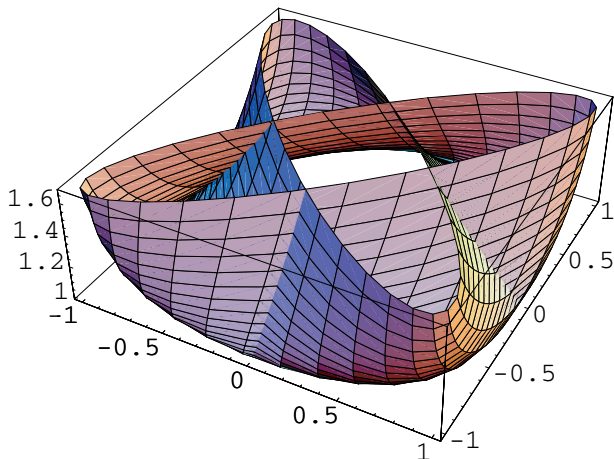
Mathematica zapis naredbe za crtanje je sljedeći:

```
ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {u, umin, umax}, {v, vmin, vmax}].
```

Na sljedećim su slikama prikazani *Mathematica* inputi i outputi za crtanje plohe zadane parametarskim jendadžbama:

$$x(u, v) = \cos u, \quad y(u, v) = \sin(u + v), \quad z(u, v) = \cosh v, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-1.1, 1.1].$$

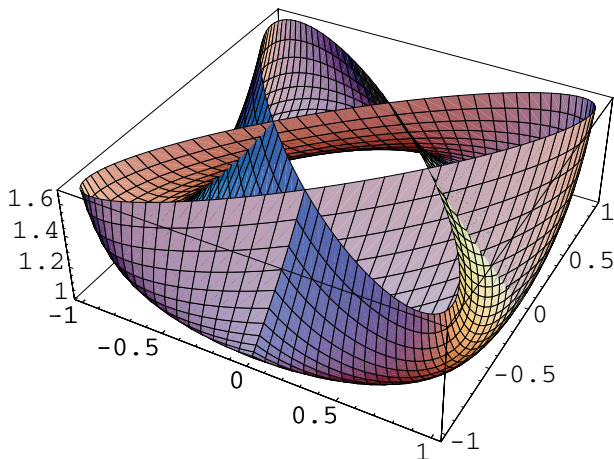
```
In[1]:=ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u+v], Cosh[v]}, {u, -Pi, Pi}, {v, -1.1, 1.1}]
```



```
Out[1]= -Graphics3D-
```

Nakon učitavanja standardnog paketa *Graphics`ParametricPlot3D`* može se odrediti i korak varijabli *u* i *v*

```
In[2]:= <<Graphics`ParametricPlot3D`  
In[3]:= ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u+v], Cosh[v]},  
                        {u, -Pi, Pi, Pi/42}, {v, -1.1, 1.1, 0.1}]
```



```
Out[3]= -Graphics3D-
```

Naredba *ParametricPlot3D* može se koristiti i za prikaz prostornih krivulja. Tada su f_x , f_y i f_z jednoparametarske funkcije.

Naredba Plot3D

Naredbom *Plot3D* može se grafički prikazati ploha zadana eksplicitnom jednačbom:

$$f = z = f(x, y), \quad (x, y) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}].$$

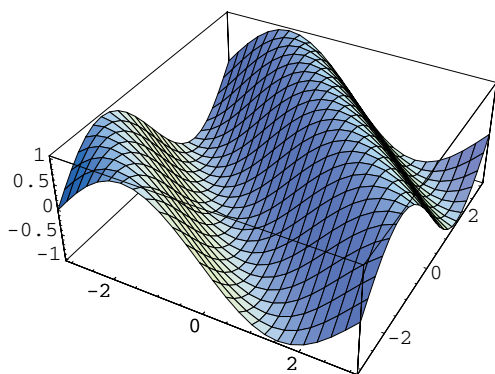
Mathematica zapis naredbe za crtanje je sljedeći:

$$\text{Plot3D}[f, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}].$$

Na sljedećim su slikama prikazani *Mathematica* inputi i outputi za crtanje plohe koja je zadana eksplicitnom jednačbom:

$$z = \sin(x + y), \quad (x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi].$$

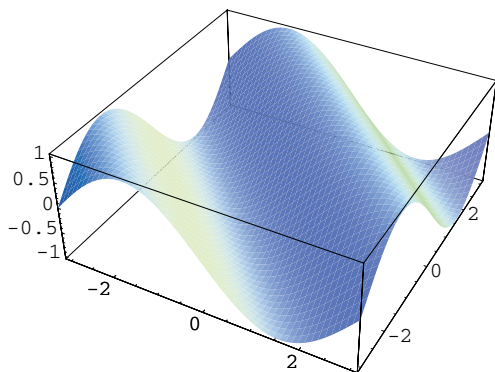
```
In[4]:=Plot3D[Sin[x+y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```



```
Out[4]= -Graphics3D-
```

Za razliku od ostalih 3D plotova, naredba *Plot3D* prihvaća opciju *Mesh->False* pa se može dobiti sljedeći prikaz plohe. Gustoća linija postiže se opcijom *PlotPoints*, koju prihvaćaju i ostale naredbe 3D plotova.

```
In[5]:=Plot3D[Sin[x+y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi},PlotPoints->50,Mesh->False]
```



```
Out[5]= -Graphics3D-
```

Naredba ContourPlot3D

Za razliku od 2D plotova za koje postoji paket i naredba *ImplicitPlot*, za 3D plotove nema ekvivalentne naredbe. Može se, međutim, upotrijebiti standardni grafički paket *ContourPlot3D*, namijenjen crtanju nivo-ploha funkcija triju varijabli.

Ako je ploha zadana implicitnom jednačbom

$$f = F(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}],$$

Mathematica zapis naredbe za crtanje je

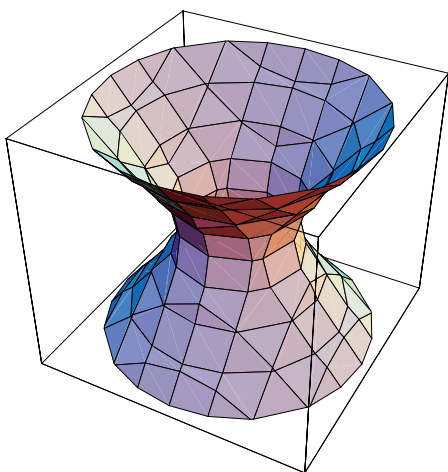
$$\text{ContourPlot3D}[f, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, \{z, z_{min}, z_{max}\}].$$

Na sljedećim su slikama prikazani *Mathematica* inputi i outputi za crtanje jednokrlnog hiperboloida koji je zadan implicitnom jednačbom $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Zadovoljavajući prikaz dobiva se pomoću opcije *PlotPoints*.

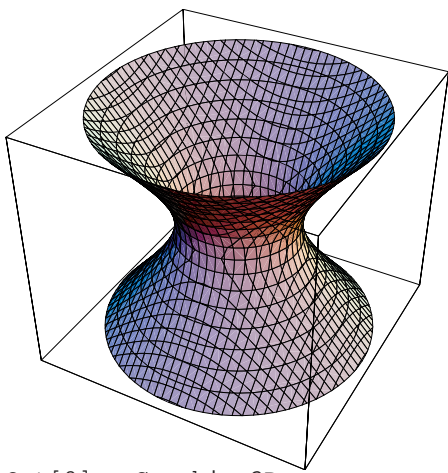
```
In[6]:= <<Graphics`ContourPlot3D`
```

```
In[7]:= ContourPlot3D[x^2+y^2-z^2-1, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5}, {z, -2, 2}]
```



```
Out[7]= -Graphics3D-
```

```
In[8]:= ContourPlot3D[x^2+y^2-z^2-1, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5}, {z, -2, 2},  
PlotPoints->{7, 7, 5}]
```



```
Out[8]= -Graphics3D-
```

Naredba SurfaceOfRevolution

Najopćenitiji slučaj za primjenu naredbe *SurfaceOfRevolution* je onaj za prikaz plohe koja nastaje rotacijom parametarski zadane krivulje

$$f_x = x(t), \quad f_y = y(t), \quad f_z = z(t), \quad t \in [t_{min}, t_{max}],$$

oko bilo kojeg pravca kroz ishodište zadanog vektorom

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Mathematica zapis naredbe za crtanje je sljedeći:

$$\text{SurfaceOfRevolution}[\{f_x, f_y, f_z\}, \{t, t_{min}, t_{max}\}, \text{RevolutionAxis} \rightarrow \{a_x, a_y, a_z\}].$$

Na sljedećoj su slici prikazani *Mathematica* inputi i output za crtanje rotacijske plohe koja nastaje rotacijom prostorne krivulje

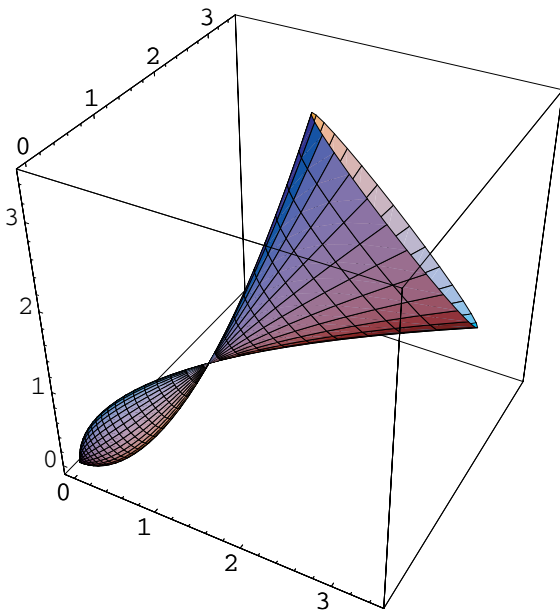
$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3, \quad t \in [0, 1.5],$$

oko osi odođene vektorom

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

```
In[9]:= << Graphics`SurfaceOfRevolution`
```

```
In[10]:= SurfaceOfRevolution[{t, t^2, t^3}, {t, 0, 1.5}, RevolutionAxis -> {1, 1, 1}]
```



```
Out[10]= -Graphics3D-
```

Ukoliko opcijom *RevolutionAxis* ne definiramo os rotacije, krivulja će biti rotirana oko osi z .

Ako je ravninska krivulja, koja leži u koordinatnoj ravnini xz , dana parametarskim jednadžbama

$$f_x = x(t), \quad f_z = z(t), \quad t \in [t_{min}, t_{max}],$$

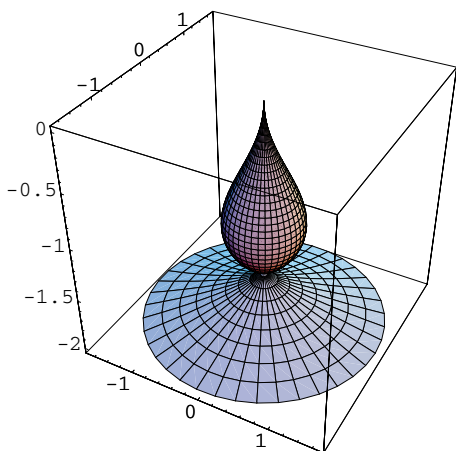
tada se *Mathematica* naredba za crtanje rotacijske plohe koja nastaje rotacijom te krivulje oko osi z može napisati u sljedećem obliku:

$$\text{SurfaceOfRevolution}[\{f_x, f_z\}, \{t, t_{min}, t_{max}\}].$$

Na sljedećoj su slici prikazani input i output za crtanje plohe ako je z os rotacije, a krivulja koju rotiramo leži u ravnini xz i zadana je parametarskim jednačbama

$$x(t) = -t^2 \cos t, \quad z(t) = -t, \quad t \in [0, 2].$$

```
In[11]:=SurfaceOfRevolution[{-t^2*Cos[t],-t},{t,0,2},
BoxRatios->{1,1,1},PlotPoints->40]
```



```
Out[11]= -Graphics3D-
```

Ako se ravninska krivulja u koordinatnoj ravnini xz može zadati jednačbom

$$f = z = f(x), \quad x \in [x_{min}, x_{max}],$$

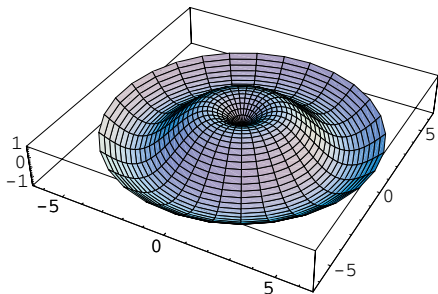
tada je naredba za crtanje rotacijske plohe (z je os) još jednostavnija i glasi

$$\text{SurfaceOfRevolution}[f, \{x, x_{min}, x_{max}\}].$$

Na sljedećoj su slici prikazani input i output za crtanje rotacijske plohe koja nastaje rotacijom oko osi z krivulje u ravnini xz zadane jednačbom

$$z = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

```
In[12]:=SurfaceOfRevolution[Sin[x],{x,0,2Pi}]
```



```
Out[12]= -Graphics3D-
```


2.8 Tangencijalna ravnina i normala plohe

Bilo koja krivulja na regularnoj plohi \mathcal{F} zadanoj vektorskom jednadžbom (11) može biti zadana parametarskim jednadžbama

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (27)$$

gdje za $\forall t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ vrijedi da se $(u(t), v(t))$ nalazi u području \mathcal{U} , a funkcije $u(t)$ i $v(t)$ neprekidne su funkcije od t . Ako krivulja u svakoj točki ima tangentu moraju i derivacije $u'(t)$ i $v'(t)$ biti neprekidne. Budući da krivulja mora zadovoljavati jednadžbu plohe, radij-vektori točaka na krivulji dani su izrazom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \quad (28)$$

Vektor tangente na tu krivulju je

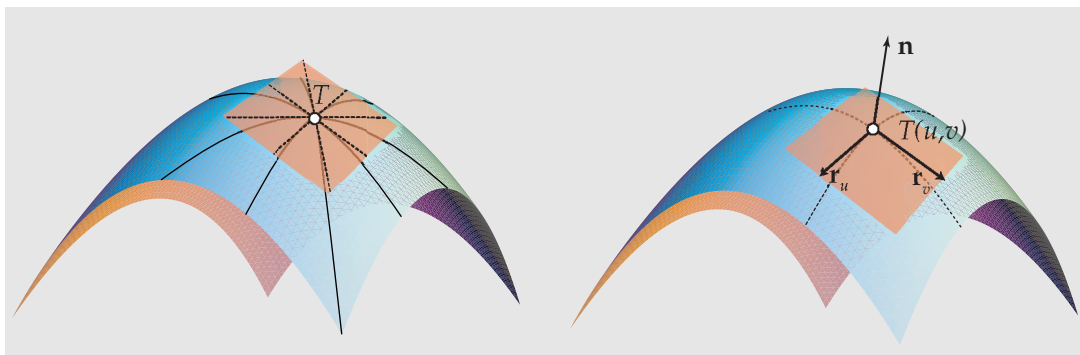
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_u(u, v) u'(t) + \mathbf{r}_v(u, v) v'(t) \quad (29)$$

Proizvoljnom čvrstom točkom $T(u, v)$ plohe \mathcal{F} prolazi beskonačno mnogo prostornih krivulja koje leže na plohi. Za sve takve krivulje vektori $\mathbf{r}_u(u, v)$ i $\mathbf{r}_v(u, v)$ biti će jednaki, budući da oni ovise samo o koordinatama u i v točke T , dok će derivacije $u'(t)$ i $v'(t)$ za pojedine krivulje biti različite. Svi vektori tangenata na krivulje koje prolaze točkom T linearne su kombinacije vektora (14), odnosno leže u ravnini koju oni razapinju. Tangente prostornih krivulja koje su na plohi i prolaze točkom T leže dakle u ravnini koju razapinju tangentni vektori koordinatnih krivulja te točke. Ta se ravnina naziva *tangencijalnom ravninom* na plohu u točki T , a točka T je njezino *diralište*.

Jednadžba tangencijalne ravnine u parametarskom obliku [13, str. 73] je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(u, v) + \rho_1 \mathbf{r}_u + \rho_2 \mathbf{r}_v, \quad (30)$$

gdje je \mathbf{r} radij-vektor bilo koje točke tangencijalne ravnine, \mathbf{r}_0 radij-vektor dirališta T , a ρ_1 i ρ_2 realni parametri koji poprimaju, neovisno jedan o drugom, vrijednosti između $-\infty$ i $+\infty$.



Slika 13: Tangencijalna ravnina i normala u regularnoj točki plohe.

Vektor

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

okomit je na vektore (14), pa prema tome i na tangencijalnu ravninu u točki T i naziva se *vektorom normale* plohe. Vektori (14) svojim međusobnim položajem određuju orijentaciju u tangencijalnoj ravnini te točke. Ona je pozitivna ako prvi vektor prelazi na drugi vektor vrtnjom za neki kut u pozitivnom smislu (suprotno smjeru kazaljke na satu). Vektor

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \quad (31)$$

naziva se *jediničnim vektorm normale* plohe. On ima pozitivnu orijentaciju ako s pozitivnim smjerom vrtnje u tangencijalnoj ravnini točke T čini desni vijak.

Budući da vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ leži u tangencijalnoj ravnini, koja ja okomita na vektor normale, jednadžba tangencijalne ravnine može se napisati pomoću mješovitog produkta:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 0. \quad (32)$$

Ista jednadžba može se napisati i u skalarnim komponentama pomoću determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

gdje su x, y, z koordinate bilo koje točke tangencijalne ravnine, x_0, y_0, z_0 koordinate dirališta T , a u derivacije koordinata uvrštavaju se vrijednosti u i v koje odgovaraju točki T .

Jednadžba normale plohe u točki T , prema [13, str. 64], glasi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v), \quad (34)$$

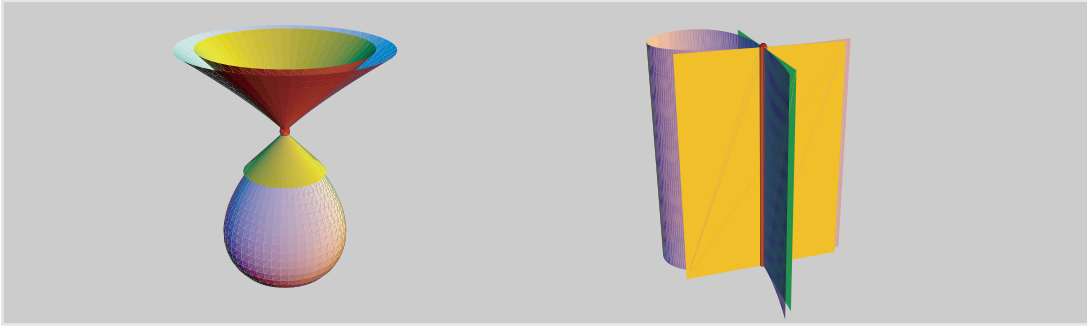
gdje je ρ realni parametar koji prima vrijednosti između $-\infty$ i ∞ , ili

$$\frac{x - x_0}{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)_x} = \frac{y - y_0}{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)_y} = \frac{z - z_0}{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)_z}, \quad (35)$$

gdje su x, y, z koordinate bilo koje točke normale, x_0, y_0, z_0 koordinate točke T , a nazivnici se određuju za vrijednosti u i v koje odgovaraju točki T .

Sva gornja razmatranja odnose se na regularne točke plohe tj. one za koje je $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ barem za jednu parametrizaciju i u kojima uvijek postoji jedinstvena tangencijalna ravnina i normala.

U singularnim točkama plohe, u kojima je $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 0$ za svaku parametrizaciju, tangente onih krivulja plohe koje prolaze tom točkom formiraju tangencijalne stošce onog reda koliki je stupanj višestrukosti singularne točke. Ti se tangencijalni stošci mogu raspasti na ravnine od kojih neke mogu biti i višestruko brojene.



Slika 14: Primjer dvostruke točke plohe s tangencijalnim stošcem i dvostrukog pravca plohe duž kojeg se tangencijalni stožac raspada na dvije ravnine.

2.9 Prva diferencijalna forma plohe

Neka je na plohi \mathcal{F} , kojoj je vektorska jednadžba (11), parametarskim jednadžbama (27) zadana krivulja k . Da bi se odredila duljina luka s krivulje k na plohi \mathcal{F} prema izrazu

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} dt, \quad (36)$$

prvo treba izračunati duljinu vektora tangente te krivulje, odnosno njegov skalarni kvadrat, koji se dobiva kvadriranjem izraza (29):

$$\mathbf{r}^2(t) = \mathbf{r}_u^2[u'(t)]^2 + 2 \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v u'(t) v'(t) + \mathbf{r}_v^2[v'(t)]^2. \quad (37)$$

Ako se uvedu oznake

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned} \quad (38)$$

za skalarni kvadrat može se pisati

$$\mathbf{r}^2(t) = E[u'(t)]^2 + 2F u'(t) v'(t) + G[v'(t)]^2, \quad (39)$$

a za duljinu luka krivulje

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E[u'(t)]^2 + 2F u'(t) v'(t) + G[v'(t)]^2}, \quad (40)$$

gdje vrijednosti parametara t_0 i t_1 pripadaju početnoj i krajnjoj točki luka.

Desna strana u izrazu (39) kvadratna je forma derivacija $u'(t)$ i $v'(t)$. Množenjem cijelog izraza s dt^2 može se dobiti kvadratna forma diferencijala du i dv

$$|d\mathbf{r}|^2 = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (41)$$

koju nazivamo *prvom osnovnom diferencijalnom formom plohe*. Ona ne ovisi o parametru t kojim je zadana krivulja, ali ovisi o parametrima u i v , odnosno o izboru točke T na

plohi i o diferencijalima du i dv . Za određenu točku T plohe koeficijenti E, F, G imaju konstantnu vrijednost, dok se diferencijali du i dv mijenjaju prema krivulji koja se promatra. Prva diferencijalna forma plohe predstavlja kvadrat elementa luka krivulje na plohi, odnosno kvadrat udaljenosti dviju "beskonačno bliskih" točaka (u, v) i $(u + du, v + dv)$ plohe.

2.10 Kut između krivulja na plohi

Prema definicijama (38) jedinični tangencijalni vektori plohe \mathcal{F} u regularnoj točki T dani su izrazima

$$(\mathbf{r}_u)_0 = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \quad (\mathbf{r}_v)_0 = \frac{\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}. \quad (42)$$

Za kut α između koordinatnih krivulja u točki (u, v) može se, prema [13, str. 42], dobiti izraz

$$\cos \alpha = (\mathbf{r}_u)_0 \cdot (\mathbf{r}_v)_0 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (43)$$

Dakle, ako se koordinatne krivulje sijeku pod pravim kutem, tada je $F = 0$, i obratno. Budući da je

$$\cos^2 \alpha = \frac{F^2}{EG} \leq 1 \quad (44)$$

mora vrijediti

$$EG - F^2 \geq 0, \quad (45)$$

a izraz

$$D_I = EG - F^2, \quad (46)$$

naziva se *diskriminantom prve diferencijalne forme plohe* i uvijek je pozitivan.

S koeficijentima E, F, G prve diferencijalne forme određen je i kut φ pod kojim se sijeku bilo koje dvije krivulje na plohi koje prolaze istom točkom $T(u, v)$ plohe, a zadane su parametarskim jednadžbama $u = u(t), v = v(t)$ i $u_1 = u_1(t), v_1 = v_1(t)$, odnosno vektorima $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$. Kut koji tvore dvije takve krivulje, tj. kut između njihovih tangencijalnih vektora $\mathbf{r}'(t)$ i $\mathbf{r}'_1(t)$ u toj točki, prema [13, str. 42], dan je izrazom

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'_1(t)}{|\mathbf{r}'(t)| |\mathbf{r}'_1(t)|}, \quad (47)$$

odnosno prema [13, str. 41] izrazom

$$\cos \varphi = \frac{Eu'(t)u'_1(t) + F[u'(t)v'_1(t) + u'_1(t)v'(t)] + Gv'(t)v'_1(t)}{\sqrt{E[u'(t)]^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G[v'(t)]^2} \sqrt{E[u'_1(t)]^2 + 2Fu'_1(t)v'_1(t) + G[v'_1(t)]^2}}. \quad (48)$$

Za $\varphi = \pi/2$ može se dobiti uvjet okomitosti u točki $T(u, v)$ bilo kojih dvaju smjerova na plohi određenih komponentama $u'(t), v'(t)$ i $u'_1(t), v'_1(t)$

$$Eu'(t)u'_1(t) + F[u'(t)v'_1(t) + u'_1(t)v'(t)] + Gv'(t)v'_1(t) = 0 \quad (49)$$

ili nakon množenja s dt^2

$$Edudu_1 + F(dudv_1 + du_1dv) + Gdvdv_1 = 0 \quad (50)$$

gdje su du i dv diferencijali pri pomaku na prvoj, a du_1 i dv_1 pri pomaku na drugoj krivulji.

2.11 Druga diferencijalna forma plohe

Neka je ploha \mathcal{F} zadana parametarskim jednadžbama (13) ili vektorskim izrazom (11). Ako je \mathbf{R} radij-vektor bilo koje točke u tangencijalnoj ravnini plohe \mathcal{F} u točki $T(u, v)$, \mathbf{r} radij-vektor dirališta $T(u, v)$, a \mathbf{n}_0 jedinični vektor normale na plohu u točki $T(u, v)$, tada je tangencijalna ravnina u toj točki dana jednadžbom:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0. \quad (51)$$

Neka je $\mathbf{r}_1(u + \Delta u, v + \Delta v)$ radij-vektor jedne točke na plohi u neposrednoj blizini dirališta $T(u, v)$. Udaljenost te točke od tangencijalne ravnine dana je, prema [13, str. 71], izrazom:

$$d = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_0. \quad (52)$$

Ako vektorska funkcija $\mathbf{r}(u, v)$ zadovoljava uvjete Taylorove formule [13, str. 211] do uključivo članova trećeg reda, tada vrijedi:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = \Delta u \cdot \mathbf{r}_u + \Delta v \cdot \mathbf{r}_v + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{uu} \Delta u^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \Delta u \Delta v + \mathbf{r}_{vv} \Delta v^2) + R, \quad (53)$$

gdje je

$$R = \frac{1}{6} (\Delta u \mathbf{r}_u + \Delta v \mathbf{r}_v) \Theta \quad (54)$$

ostatak u koji ulaze članovi trećeg reda u veličinama Δu i Δv . Nakon skalarnog množenja objiju strana ove jednakosti s vektorom \mathbf{n}_0 , uz uvažavanje uvjeta okomitosti

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad (55)$$

može se dobiti izraz:

$$2d = (\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}_0 \Delta u^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}_0 \Delta u \Delta v + \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}_0 \Delta v^2) + \frac{1}{6} (\Delta u \mathbf{r}_u + \Delta v \mathbf{r}_v) \Theta \cdot \mathbf{n}_0. \quad (56)$$

Uvedemo li oznake

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}_0 \\ M(u, v) &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}_0 \\ N(u, v) &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (57)$$

dobivamo jednakost

$$2d = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2. \quad (58)$$

Desnu stranu ove jednakosti nazivamo *drugom osnovnom diferencijalnom formom plohe* u točki $T(u, v)$. Ta kvadratna forma izražava glavni dio odstupanja krivulje na plohi od tangencijalne ravnine, pri pomaku od dirališta u njemu "beskonačno blisku" točku.

2.12 Vrste točkaka na plohi

Za $L \neq 0$ druga diferencijalna forma može se napisati u obliku:

$$\frac{1}{L} \left[(L du + M dv)^2 + (LN - M^2) dv^2 \right]. \quad (59)$$

Prema tome, diskusija druge diferencijalne forme ovisit će o njezinoj diskriminanti

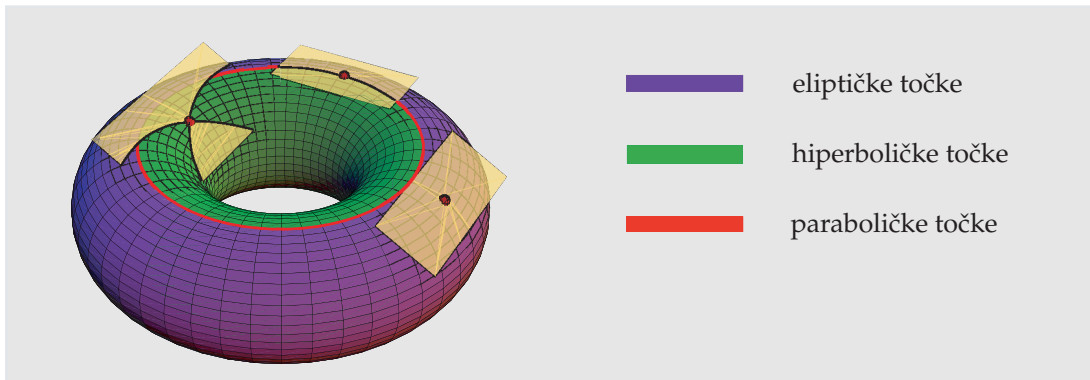
$$D_{II} = LN - M^2. \quad (60)$$

Ako je u točki $T(u, v)$ diskriminanta $D_{II} > 0$, forma je *definitna* [13, str. 144] za sve dovoljno male veličine koje zajedno nisu jednake nuli, i to *pozitivno definitna* za $L > 0$ (prema tome i $N > 0$), a *negativno definitna* za $L < 0$. Tada se točke u neposrednoj okolini dirališta $T(u, v)$ nalaze s iste strane tangencijalne ravnine plohe u točki $T(u, v)$. Za takve točke na plohi kaže se da su *eliptičke*.

Ako je u točki $T(u, v)$ diskriminanta $D_{II} < 0$, forma je *indefinitna*, pa udaljenost d točkaka plohe u neposrednoj okolini dirališta od tangencijalne ravnine može imati i pozitivne i negativne vrijednosti, odnosno tangencijalna ravnina u takvoj točki siječe plohu. Za takve točke na plohi kaže se da su *hiperboličke*.

Ako je u točki $T(u, v)$ diskriminanta $D_{II} = 0$ forma je *semidefinitna* i može za posebno odabrane du i dv biti jednaka nuli, a inače je pozitivna za $L > 0$ ili negativna za $L < 0$. Za točke u kojima je $D_{II} = 0$ i $L \neq 0$ kaže se da su *paraboličke*.

Za točke u kojima je $D_{II} = 0$ i $L = 0$ kažemo da su *ravninske* ili *planarne*.



Slika 15: Torus je primjer plohe na kojoj postoje eliptičke, hiperboličke i paraboličke točke.

3 Zakrivljenosti ploha

3.1 Zakrivljenost krivulje

Da bismo definirali zakrivljenosti u regularnoj točki plohe potrebno je objasniti pojam zakrivljenosti u regularnoj točki krivulje (ravninske ili prostorne).

Neka je krivulja \mathcal{K} parametrizirana duljinom luka tj. neka je (J, β) njezina parametrizacija prirodnim parametrom s . Funkcija $\kappa : J \rightarrow \mathbb{R}$, definirana formulom

$$\kappa(s) = \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right| = |\beta''(s)| = |\mathbf{t}''(s)| = \left| \frac{d^2\mathbf{t}}{ds} \right|, \quad (61)$$

naziva se *fleksijom* ili funkcijom 1. *zakrivljenosti* krivulje \mathcal{K} .

Ako je (I, α) parametrizacija krivulje \mathcal{K} općim parametrom t , tada je fleksija $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ dana formulom

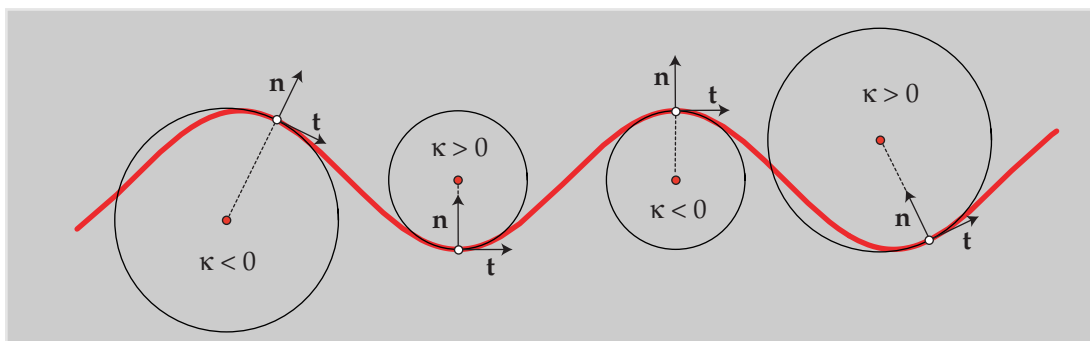
$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}. \quad (62)$$

Geometrijski je fleksija mjera promjene kuta tangencijalnog vektora.

Broj

$$R(s_0) = \frac{1}{|\kappa(s_0)|} \quad (63)$$

nazivamo *polumjerom zakrivljenosti* krivulje \mathcal{K} u točki $T(s_0)$. To je polumjer *oskulacijske kružnice* u točki $T(s_0)$ koja s krivuljom \mathcal{K} ima u $T(s_0)$ zajedničku tangentu i istu (ili suprotnu) fleksiju. Oskulatorna kružnica najbolje (bolje od tangente ili drugih dirnih kružnica) aproksimira krivulju u okolini točke T .



Slika 16: Oskulacijsku ravninu točke T na krivulji K razapinju tangencijalni vektor \mathbf{t} i vektor normale \mathbf{n} (za ravninske krivulje to je ravnina krivulje). Orijentacije su im takve da \mathbf{t} prelazi u \mathbf{n} rotacijom za $\pi/2$ u smjeru obrnutom od kretanja kazaljke na satu. Središte oskulacijske kružnice leži na pravcu normale. Fleksija je pozitivna ako je središte oskulacijske kružnice na pozitivnoj strani orijentiranog pravca normale.

2. *zakrivljenost* krivulje, koju nazivamo torzijom, mjeri odstupanja krivulje od oskulacijske ravnine. Za ravninske krivulje torzija je jednaka 0.

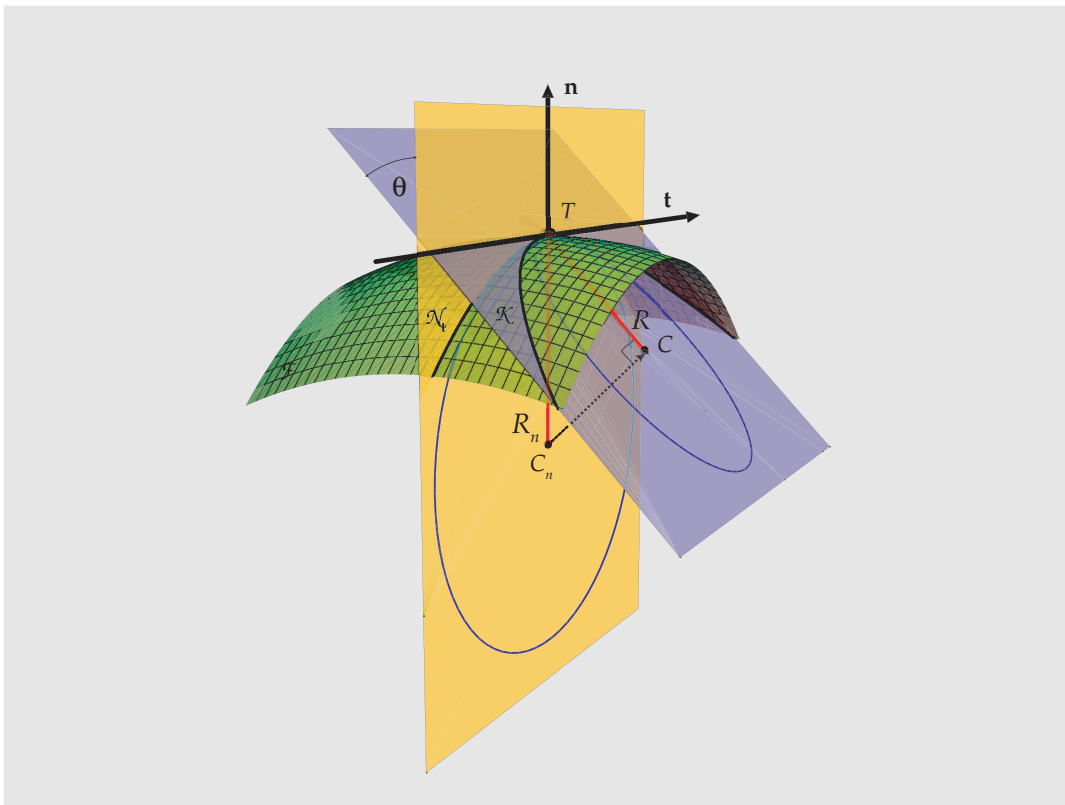
3.2 Normalna zakrivljenost

Ravnine koje sadrže normalu \mathbf{n} plohe \mathcal{F} u točki T nazivamo *ravninama normalnih presjeka* kroz T . Svaka je takva ravnina određena normalom \mathbf{n} i nekim tangencijalnim vektorom \mathbf{t} koji leži u tangencijalnoj ravnini plohe \mathcal{F} . Krivulju normalnog presjeka u smjeru \mathbf{t} označavat ćemo \mathcal{N}_t . Zakrivljenost (fleksiju) krivulje \mathcal{N}_t u točki T nazivamo *normalnom zakrivljenošću* plohe \mathcal{F} u smjeru \mathbf{t} i označavamo ju k_n . Ta zakrivljenost može poslužiti za mjerenje zakrivljenosti κ bilo koje druge krivulje \mathcal{K}_t na plohi \mathcal{F} koja u T ima istu tangentu kao i \mathcal{N}_t . Tu vrijede relacije

$$k_n = \kappa \cos \theta \quad \text{i} \quad R = R_n \cos \theta, \quad (64)$$

gdje su k_n i R_n zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti krivulje \mathcal{N}_t , κ i R zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti proizvoljne krivulje \mathcal{K}_t , a θ kut između oskulacijske ravnine krivulje \mathcal{K}_t u točki T i ravnine normalnog presjeka \mathcal{N}_t u točki T . Pritom za polumjer zakrivljenosti krivulje dozvoljavamo pozitivne, negativne i beskonačno velike vrijednosti. Naime, ako je C središte zakrivljenosti neke krivulje u njezinoj točki T , R je pozitivan ako su \overrightarrow{TC} i \mathbf{n} iste orijentacije, odnosno R je negativan ako su \overrightarrow{TC} i \mathbf{n} suprotne orijentacije. Ako je krivulja pravac ili joj je T infleksiona točka tada je zakrivljenost $k = 0$, a polumjer $R = \infty$.

Relacije (64) izražavaju *Meusnierov teorem* koji glasi : Centar zakrivljenosti krivulje \mathcal{K} na plohi \mathcal{F} u točki T je ortogonalna projekcija centra zakrivljenosti normalnog presjeka, koji u T ima istu tangentu kao i \mathcal{K} , na oskulacijsku ravninu krivulje \mathcal{K} u točki T .



Slika 17: Ilustracija Meusnierovog teorema

Prema [13, str. 250] za plohu \mathcal{F} zadanu vektorskom jednadžbom (11) normalne zakrivljenosti u regularnoj točki $T(u, v)$ izražavaju se pomoću I. i II. diferencijalne forme i dane su jednadžbom

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (65)$$

3.3 Glavni i asimptotski smjerovi

Za regularnu točku T plohe \mathcal{F} promatramo ravnine normalnih presjeka kroz sve tangente plohe \mathcal{F} u točki T . Ako smjeru neke tangente pridružimo vrijednost 0 tada je zakrivljenost normalnih presjeka funkcija $k_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ koja na intervalu $[0, \pi]$ ima maksimum i minimum koje ćemo označavati K_1 i K_2 .

Te ekstremne vrijednosti K_1 i K_2 normalne zakrivljenosti k_n nazivamo *glavnim* ili *pincipalnim zakrivljenostima* plohe \mathcal{F} u točki T . Njima odgovarajuće jedinične tangencijalne vektore \mathbf{p}_1 i \mathbf{p}_2 nazivamo *glavnim* ili *principalnim vektorima*, krivulje $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_1}$ i $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_2}$ *glavnim* ili *principalnim krivuljama*, a ravnine tih krivulja *glavnim ravninama* plohe \mathcal{F} u točki T .

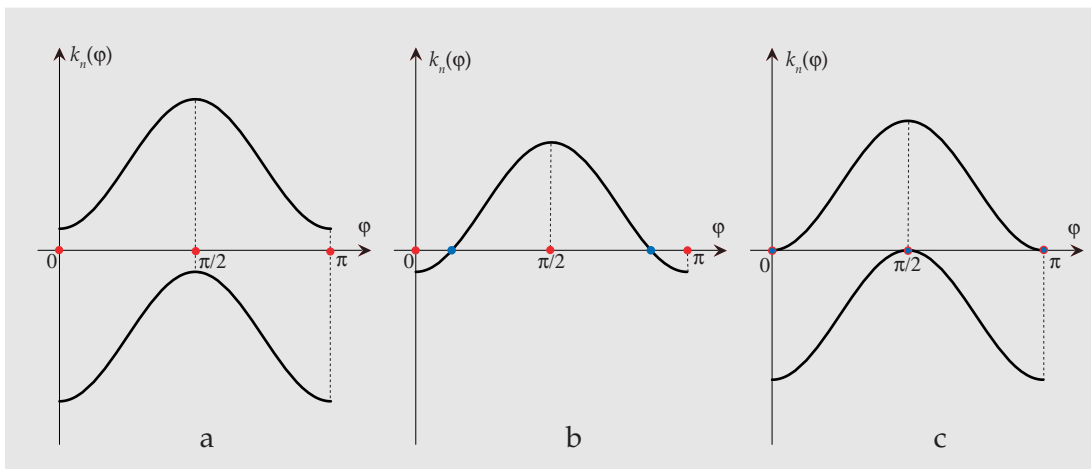
Glavni su vektori uvijek ortogonalni [13, str. 254].

Prema [1] iz jednadžbe (65) može se dobiti jednadžba

$$k_n^2 - \frac{EN - 2MF + GL}{EG - F^2} k_n + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0, \quad (66)$$

čija su rješenja ekstremne vrijednosti funkcije k_n , tj. glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 .

Ako jednom od glavnih smjerova pridružimo početnu vrijednost kuta $\varphi = 0$ (neka je to p_1 i neka je $K_1 < K_2$), graf funkcije k_n sinusoidnog je oblika, za $\varphi = 0, \pi$ ima minimum, za $\varphi = \pi/2$ maksimum, a prema koordinatnim osima može biti u odnosu kao na slici.



Slika 18: Graf funkcije $k_n : [0, \pi] \rightarrow [K_1, K_2]$ ne siječe (a), siječe (b) ili dodiruje (c) os φ .

Zakrivljenost k_n bilo kojeg normalnog presjeka može se izraziti pomoću glavnih zakrivljenosti K_1 i K_2 . Tu vrijedi relacija

$$k_n(\varphi) = K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi, \quad (67)$$

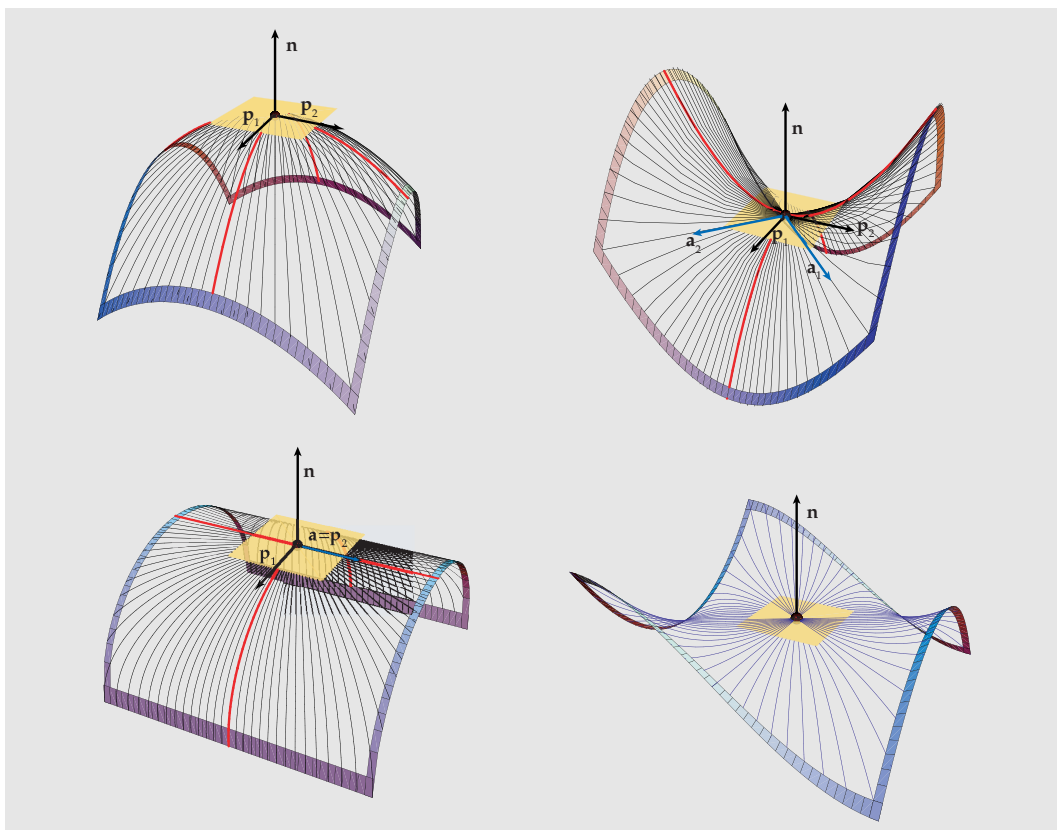
gdje je φ kut između odgovarajućeg tangencijalnog vektora t i glavnog vektora p_1 . Jednakost (67) naziva se *Eulerovom formulom* [10, str.372].

U ravninama normalnih presjeka kroz točku T mogu postojati i krivulje kojima je zakrivljenost u točki T jednaka 0. Takve ravnine nazivamo *asimptotskim ravninama*, smjer odgovarajuće tangente *asimptotskim smjerom* plohe u točki T , a tangencijalni vektor označujemo a . Krivulja N_a je pravac ili u T ima infleksionu točku. Kut $\varphi \in [0, \pi/2]$ koji asimptotska ravnina zatvara s glavnom ravninom smjera p_1 je rješenje jednadžbe

$$K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi = 0. \quad (68)$$

Rješenja jednadžbe (68) ovise o vrsti točke na plohi. Diskusija rješenja je sljedeća:

1. $K_1 \neq 0 \wedge K_2 \neq 0$, $\text{sing}K_1 = \text{sing}K_2$ jednadžba nema rješenja (Slika 18a). T je eliptička točka plohe, nema asimptotskih smjerova.
2. $K_1 \neq 0 \wedge K_2 \neq 0$, $\text{sing}K_1 \neq \text{sing}K_2$ jednadžba ima dva rješenja (Slika 18b). T je hiperbolička točka plohe, ima dva asimptotska smjera.
3. $K_1 = 0 \vee K_2 = 0$, jednadžba ima jedno rješenje (Slika 18c). T je parabolička točka plohe, ima jedan asimptotski smjer.
4. $K_1 = K_2 = 0$, $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ je rješenje jednadžbe. k_n je konstanta ($k_n = 0$). T je ravninska (planarna, spljoštena) točka plohe, svi smjerovi su asimptotski.



Slika 19: Primjeri eliptičke, hiperboličke, paraboličke i planarne točke.

3.4 Glavni i asimptotski smjerovi na pravčastim ploham

Pravčasta je ploha skup od ∞^1 neprekinuto povezanih pravaca. Nastaje gibanjem pravca duž neke krivulje. Pravce takve plohe nazivamo *izvodnicama* i oni čine jedan sistem asimptotskih linija plohe.

Izvodnicu pravčaste plohe nazivamo *torzalnom* ako ploha u svim njezinim točkama ima istu dirnu ravninu. Točke na torzalnoj izvodnici su paraboličke.

Ako izvodnica nije torzalna tada su dirne ravnine u njezinim točkama različite, a svaka od njih sadrži izvodnicu. Pramen dirnih ravnina duž izvodnice pravčaste plohe *projektivno* je pridružen nizu dirališta. Sve točke na izvodnici pravčaste plohe koja nije torzalna su hiperboličke.

Pravčastu plohu nazivamo *razvojnjom* ako su sve njezine izvodnice torzalne tj. ako su joj sve točke paraboličke. Takva se ploha može izometrički preslikati (razviti) u ravninu. Stošci i valjci bilo kojeg reda primjeri su takvih ploha. Razvojnju plohu čine i tangente bilo koje prostorne krivulje.

Ako pravčasta ploha ima samo konačan broj torzalnih izvodnica onda se ona ne može razviti u ravninu i takve plohe nazivamo *vitoperim* pravčastim ploham. Sve točke takve plohe (izuzevši one na torzalnim pravcima) su hiperboličke.

Algebarske pravčaste plohe (one za koje koordinate njihovih točaka zadovoljavaju neku algebarsku jednadžbu) razvrstavaju se prema stupnju njihove jednadžbe koja određuje i stupanj plohe. Geometrijski ih možemo generirati kao skup pravaca koji sijeku tri krivulje koje nazivamo *ravnalicama* [12, str. 171].

Ako je vitopera pravčasta ploha reda 2. (hiperbolički paraboloid ili jednokrili hiperboloid) na njoj postoje dva sistema izvodnica - kroz svaku njezinu točku prolazi po jedna izvodnica iz svakog sistema. Te izvodnice određuju dva asimptotska smjera.

Za sve algebarske pravčaste plohe reda većeg od 2 postoji samo jedan sistem izvodnica tj. svakom točkom takve plohe prolazi jedna i samo jedna izvodnica plohe. Izvodnica određuje jedan asimptotski smjer u promatranoj točki, dok je drugi određen tangentom na presječnu krivulju plohe i tangencijalne ravnine u promatranoj točki. Naime, tangencijalna ravnina algebarske pravčaste plohe reda n siječe plohu po izvodnici i krivulji reda $n - 1$.

U svim hiperboličkim točkama vitopere pravčaste plohe glavni se smjerovi podudaraju sa simetralama kuta između asimptotskih smjerova.

Glavni i asimptotski smjerovi u točki hiperboličkog paraboloida

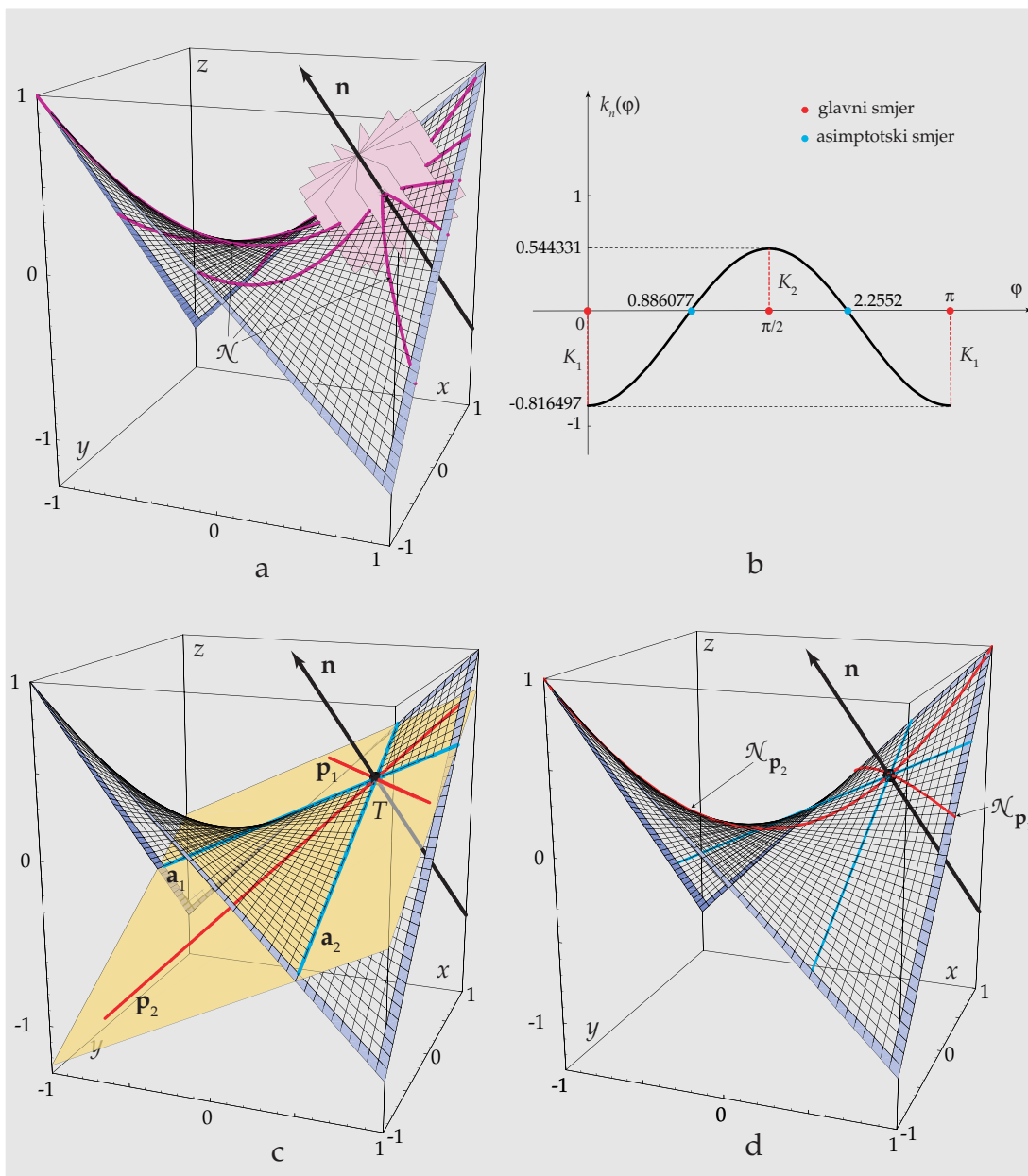
Animacije geometrijskog izvođenja kao i vizualizacije vezne uz asimptotske i glavne smjerove u točki hiperboličkog paraboloida (*hipara*) dane su u [8]. Na hiparu nema singularnih točaka niti torzalnih pravaca pa su sve njegove točke hiperboličke.

Najjednostavnija parametrizacija hipara je:

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = uv \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (69)$$

Za bilo koju točku hipara, danog parametrizacijom (69), mogu se izračunati koeficijenti I. i II. osnovne diferencijalne forme, a zatim se pomoću jednadžbi (66) i (67) mogu

odrediti glavne zakrivljenosti, funkcija normalne zakrivljenosti i asimptotski smjerovi. U ovom primjeru račun i grafički prikazi napravljeni su u programu *Mathematica* za točku $T(0.5, 0.5) = (0.5, 0.5, 0.25)$.



Slika 20: Na slikama je prikazan dio hipara, određenog s parametarskim jednadžbama (69), nad područjem $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Na slici **a** prikazano je nekoliko ravnina i krivulja normalnih presjeka kroz točku $(0.5, 0.5, 0.25)$. Na slici **b** dan je graf funkcije normalne zakrivljenosti u toj točki s istaknutim glavnim zakrivljenostima i asimptotskim smjerovima. Asimptotski smjerovi određeni su s dvije izvodnice hipara koje prolaze danom točkom (za promatrane parametrizacije izvodnice su parametarske u i v krivulje), a glavni smjerovi određeni su sa simetralama kuta između njih (c). Na slici **d** istaknute su glavne i asimptotske krivulje u promatranoj točki.

Glavni i asimptotski smjerovi u općoj točki kružnog konoida 4. reda

Konoidi su pravčaste plohe kojima je jedna ravnalica beskonačno daleki pravac neke ravnine koju nazivamo *direkcijskom*. Ravnalice konoida u ovom primjeru su:

c ... kružnica u ravnini xy dana parametarskim jednadžbama

$$x(u) = \cos u, \quad y(u) = \sin u, \quad z(u) = 0, \quad u \in [0, 2\pi],$$

d_1 ... pravac paralelan s osi x dan parametarskim jednadžbama

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

d_2^∞ ... beskonačno daleki pravac ravnine yz kojeg određuju direkcijske ravnine

$$x = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

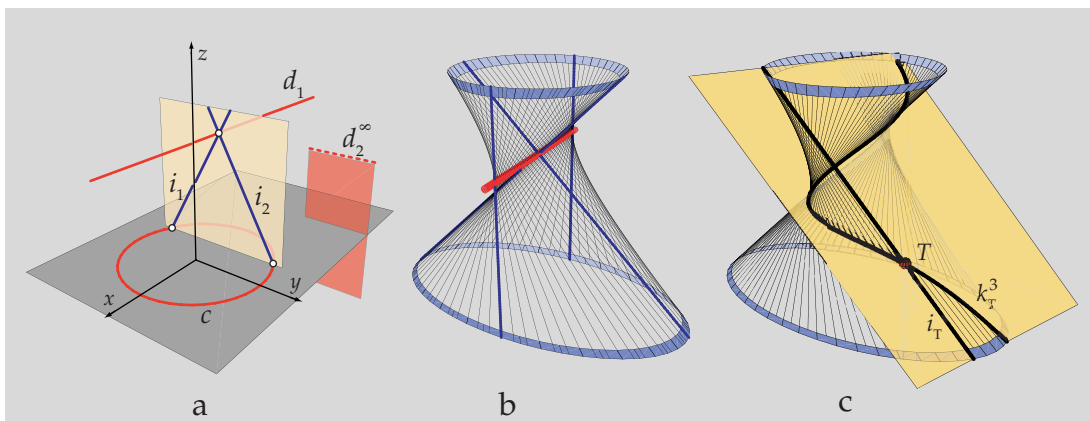
Ovako zadana ploha može se parametrizirati na sljedeći način:

$$x(u, v) = \cos u, \quad y(u, v) = \sin u(1 - v), \quad z(u, v) = v, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}. \quad (70)$$

Animacije geometrijskog izvođenja kao i vizualizacije vezane uz asimptotske i glavne smjerove u točki tog kružnog konoida dane su u [8].

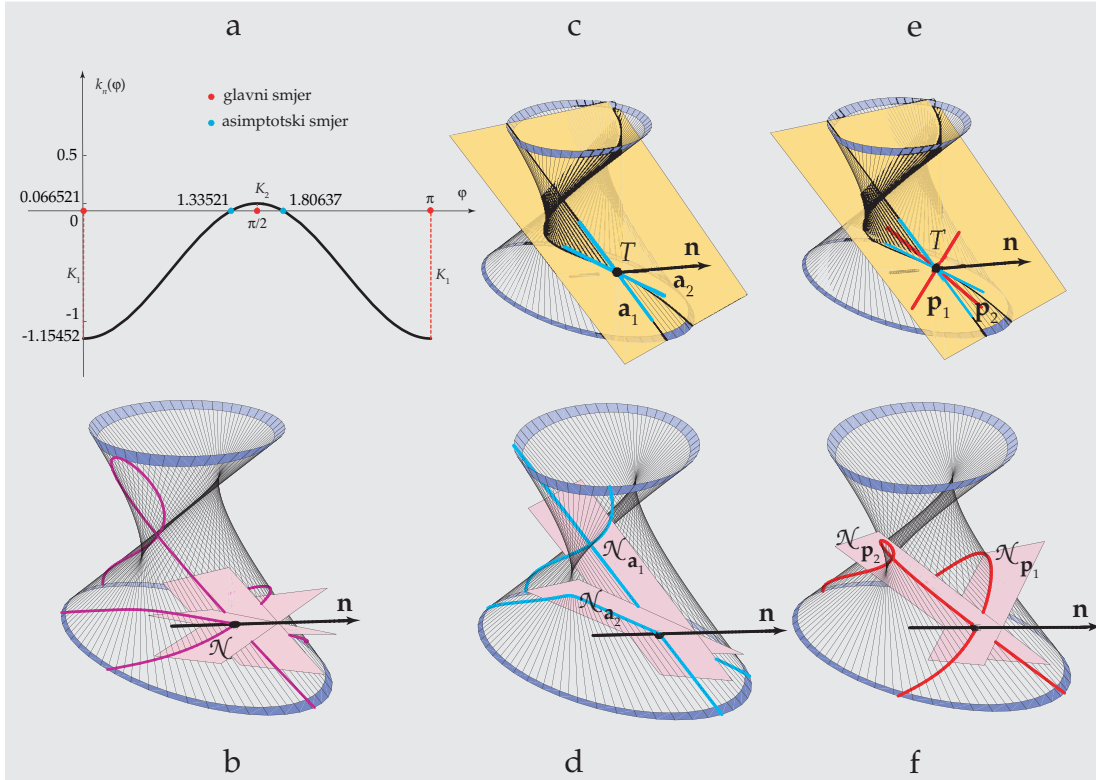
Na toj plohi postoje dvije singularne linije (pravci d_1 i d_2^∞) na kojima su sve točke dvostruke (čvorovi, šiljci ili izolirane), tj. u svakoj točki ravnalice d_1 (d_2^∞) sijeku se dvije izvodnice plohe (u slučaju beskonačno daleke ravnalice ovo siječenje znači paralelnost dviju izvodnica). Šiljaste točke dvostruke linije (koje razdvajaju izolirane dvostruke točke od čvorova) nazivamo kuspidalnim točkama plohe i kroz njih prolaze torzalne izvodnice. Na promatranom konoidu postoje četiri torzalna pravca i četiri kuspidalne točke (dvije u beskonačnosti).

U točki plohe, koja ne leži na singularnom ili torzalnom pravcu, dirna ravnina siječe konoid po odgovarajućoj izvodnici i krivulji trećega reda.



Slika 21: Na slici **a** prikazane su ravnalice konoida i dvije njegove izvodnice u ravni pramena $[d_2^\infty]$. Na slici **b** plavom su bojom istaknute torzalne izvodnice, a crvenom singularni pravac u konačnosti. Na slici **c** istaknuta je točka T na konoidu, dirna ravnina plohe u toj točki te izvodnica i krivulja 3. reda po kojoj ta dirna ravnina siječe plohu (izvodnica i_T i krivulja k_T^3 čine raspadnutu krivulju 4. reda).

Za bilo koju točku konoida, danog parametrizacijom (70), mogu se izračunati koeficijenti I. i II. osnovne diferencijalne forme, a zatim se pomoću jednažbi (66) i (67) mogu odrediti glavne zakrivljenosti, funkcija normalne zakrivljenosti i asimptotski smjerovi. U ovom primjeru račun i grafički prikazi napravljeni su u programu *Mathematica* za točku $T(\pi/3, 0) = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$.



Slika 22: Na slici **a** prikazan je graf funkcije normalne zakrivljenosti s istaknutim asimptotskim smjerovima i glavnim zakrivljenostima u točki $T(\pi/3, 0)$ konoida danog jednažbama (70). Na slici **b** iscrtno je nekoliko ravnina i krivulja normalnih presjeka plohe u toj točki. Jedan asimptotski smjer plohe u točki T određen je izvodnicom, dok se drugi podudara s tangentom krivulje k_T^3 u točki T (**c**). Na slici **d** istaknuti su normalni presjeci plohe kroz asimptotske smjerove. Krivulja \mathcal{N}_{a_2} je prava krivulja 4. reda, dok se krivulja \mathcal{N}_{a_1} raspada na izvodnicu i krivulju 3. reda. Glavni smjerovi podudaraju se sa simetralama kuta između asimptotskih smjerova (**e**). Na slici **f** istaknuti su glavni presjeci konoida u točki T .

3.5 Gaussova i srednja zakrivljenost regularne plohe

Neka je \mathcal{F} regularna ploha, $T(u, v) \in \mathcal{F}$ i (u, v) krivolinijske koordinate.

Funkciju $K : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, definiranu formulom

$$K(u, v) = K_1(u, v) \cdot K_2(u, v), \quad (71)$$

gdje su $K_1(u, v)$, $K_2(u, v)$ glavne zakrivljenosti plohe \mathcal{F} u točki $T(u, v)$ nazivamo *Gaussovom* zakrivljenošću plohe \mathcal{F} .

Funkciju $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, definiranu formulom

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(K_1(u, v) + K_2(u, v)), \quad (72)$$

gdje su $K_1(u, v)$, $K_2(u, v)$ glavne zakrivljenosti plohe \mathcal{F} u točki $T(u, v)$ nazivamo *srednjom* zakrivljenošću plohe \mathcal{F} .

Budući da su glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 rješenja kvadratne jednadžbe (66), možemo, prema Vietéovim formulama, zaključiti da Gaussovu i srednju zakrivljenost s koeficijentima I. i II. osnovne diferencijalne forme povezuju sljedeće relacije:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (73)$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{EN - 2MF + GL}{EG - F^2} \right). \quad (74)$$

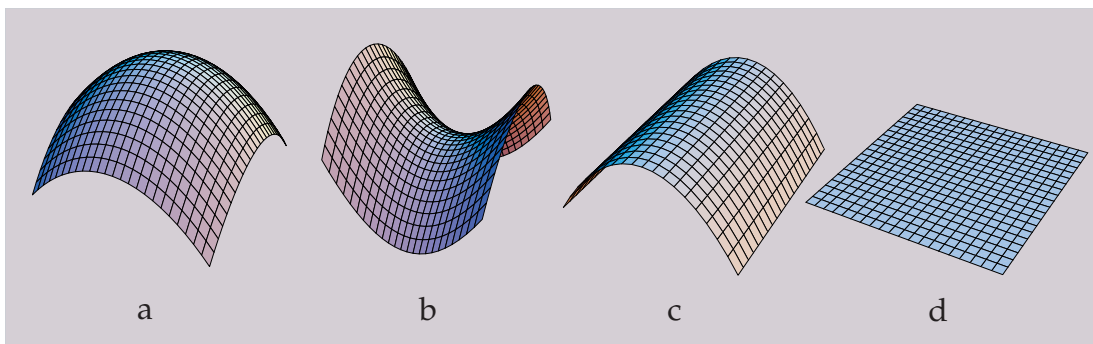
Sada se glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 mogu izraziti pomoću Gaussove i srednje zakrivljenosti na sljedeći način:

$$K_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad (75)$$

$$K_2 = H + \sqrt{H^2 - K}. \quad (76)$$

Iz analize rješenja jednadžbe (68) i definicije funkcije Gaussove zakrivljenosti (71) jasno je da predznak funkcije Gaussove zakrivljenosti ovisi o vrsti točke na plohi. Vrijedi sljedeće:

1. Ako je $T(u, v)$ eliptička točka plohe ($\text{sing}K_1 = \text{sing}K_2$), tada je $K(u, v) > 0$. Specijalno, ako je $K_1 = K_2$ točku nazivamo *kružnom* točkom plohe.
2. Ako je $T(u, v)$ hiperbolička točka plohe ($\text{sing}K_1 \neq \text{sing}K_2$), tada je $K(u, v) < 0$.
3. Ako je $T(u, v)$ parabolička ($K_1 = 0 \vee K_2 = 0$) ili ravninska ($K_1 = K_2 = 0$) točka plohe, tada je $K(u, v) = 0$.



Slika 23: Primjeri ploha na kojima su sve točke eliptičke (a), hiperboličke (b), paraboličke (c) ili planarne (d).

3.6 Plohe konstantne Gaussove zakrivljenosti

Ploha je skup od ∞^2 neprekinuto povezanih točaka - dvodimenzionalna mnogostrukost. Mjerenjem lukova i kutova (paragrafi 1.9 i 1.10) određena je metrika na plohi na kojoj je zadan krivolinijski koordinatni sustav i osnovna diferencijalna forma ds^2 . Skup svojstava što proizlaze iz I. kvadratne forme čini *geometriju na plohi* i ne ovisi o smještaju plohe u trodimenzionalnom prostoru. Preslikavanje jedne plohe na drugu nazivamo *izometričkim* ako čuva udaljenosti i kutove. Za dvije plohe koje se mogu izometrički preslikati kažemo da se mogu *razviti* jedna na drugu, jedna u drugu prelaze savijanjem - bez rastezanja, kidanja ili gužvanja. Svojstva ploha koja ostaju sačuvana pri razvijanju nazivamo *unutarnjim* ili *intrinzičnim* svojstvima plohe. Gauss je pokazao (*theorema egregium*) da je zakrivljenost K intrinzično svojstvo plohe tj. da dvije plohe koje se mogu razviti jedna na drugu imaju u pridruženim točkama jednaku Gaussovu zakrivljenost K . [13, str. 253], [9, str. 214]

U diferencijalnoj geometriji se pokazuje da je za opći slučaj jednakost Gaussove zakrivljenosti u pridruženim točkama dviju ploha samo nužan uvjet za razvijanje. Taj je uvjet, međutim, nužan i dovoljan kod ploha s konstantnom Gaussovom zakrivljenosti.

Plohe za koje je Gaussova zakrivljenost jednaka 0

To su plohe koje se mogu razviti u ravninu i nazivami ih *ravnim* plohama. Čine ih valjci, stošci i plohe tangenata prostorne krivulje. Geometrija takve plohe jednaka je geometriji ravnine, npr. zbroj kutova u trokutu jednak je 180° . (Plohe **c** i **d** na slici 23 su ravne plohe i imaju ista intrinzična svojstva).

Plohe konstantne pozitivne Gaussove zakrivljenosti

Najpoznatija ploha konstantne pozitivne Gaussove zakrivljenosti je kugla (sfera). Standardna parametrizacija sfere polumjera r dana je u potpisu slike 10. U svakoj točki Gaussova zakrivljenost ove plohe jednaka je $1/r^2$. Sfera se niti lokalno (po dijelovima) ne može razviti u ravninu, npr. zbroj kutova u sfernom trokutu uvijek je veći od 180° . Izvođenja jednadžbi rotacijskih ploha konstantne zakrivljenosti $K = 1/a^2$ te njihovi prikazi u programu *Mathematica*, mogu se naći u [10, str. 482].

Plohe konstantne negativne Gaussove zakrivljenosti

Unutarnja geometrija ploha konstantne negativne zakrivljenosti različita je od one u ravnini ili na sferi. Tu je npr. zbroj kutova u trokutu uvijek manji od 180° .

Najpoznatija ploha konstantne negativne zakrivljenosti je *pseudosfera*. Ta ploha nastaje rotacijom *traktrise* oko njezine asimptote. Traktrisa je ravninska krivulja koja je *evoluta* (krivulja koju čine središta zakrivljenosti) *lančanice* (oblik lančanice poprima gipka, teška, nerastezljiva nit ovješena u dvije točke). Jedna parametrizacija traktrise u ravnini xz kojoj je pravac $x = 0$ asimptota je sljedeća:

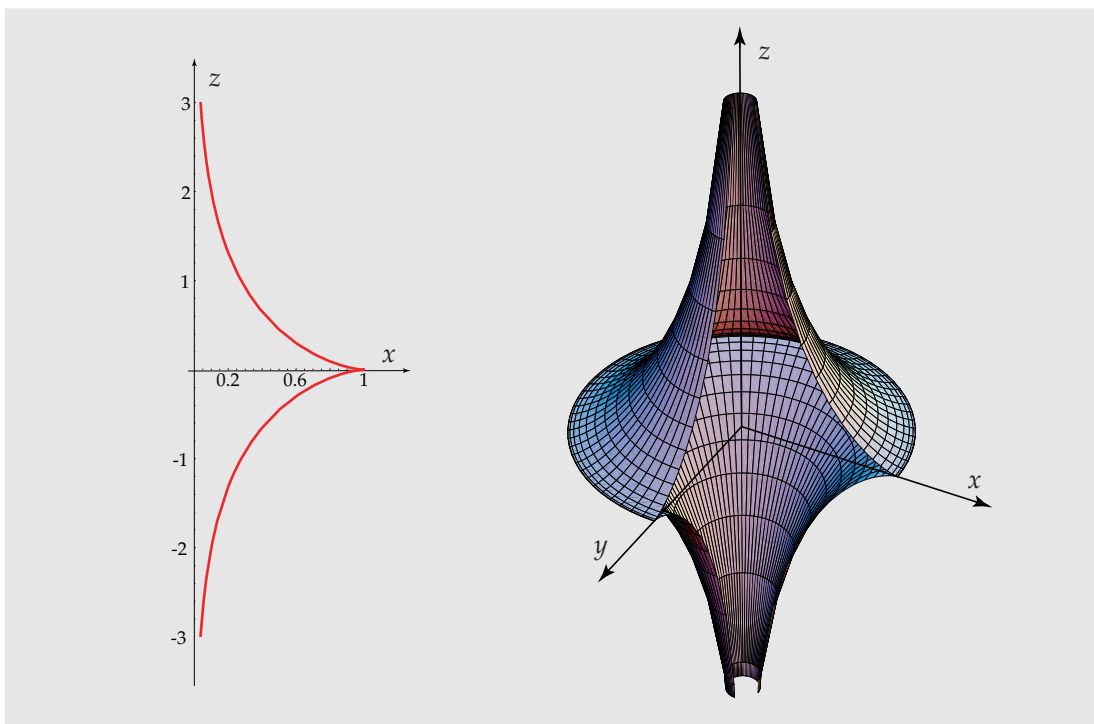
$$x(t) = a \sin t, \quad z(t) = a(\cos t + \log(\tan \frac{t}{2})), \quad t \in (0, \pi). \quad (77)$$

Rotacijom ove krivulje oko osi z nastaje *pseudosfera* polumjera a određena sljedećim

parametarskim jednađbama:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= a \cos u \sin v, & y(u, v) &= a \sin u \sin v, & z(u, v) &= a(\cos v + \log(\tan \frac{v}{2})), \\(u, v) &\in [0, 2\pi] \times (0, \pi).\end{aligned}\tag{78}$$

U svakoj točki ove plohe Gaussova je zakrivljenost jednaka $-\frac{1}{a^2}$.



Slika 24: Traktrisa za $a = 1$ i dio pseudosfere koja nastaje njezinom rotacijom oko osi z .

Izvođenja jednađbi ploha konstantne negativne zakrivljenosti te njihovi prikazi u programu *Mathematica*, mogu se naći u [10, str. 486].

4 Mathematica vizualizacije Gaussove i srednje zakrivljenosti

4.1 Prikaz Mathematica bilježnice i webMathematica datoteke s vizualizacijama Gaussove i srednje zakrivljenosti ploha

Vektorsku funkciju $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ koja određuje parametrizaciju neke plohe može se, u programskom jeziku *Mathematica*, definirati na sljedeći način:

```
x[u_,v_]:= {x1[u,v],x2[u,v],x3[u,v]}
```

gdje su skalarne funkcije x_1 , x_2 i x_3 diferencijabilne na \mathcal{U} .

Koeficijente E , F , G prve osnovne diferencijalne forme (koje ćemo u *Mathematici* nazivati ee , ff , gg) možemo na temelju jednakosti (38), za varijabilnu vektorsku funkciju x , definirati na sljedeći način:

```
ee[x_][u_,v_]:=FullSimplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],uu]]/.{uu->u,vv->v};  
ff[x_][u_,v_]:=FullSimplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],vv]]/.{uu->u,vv->v};  
gg[x_][u_,v_]:=FullSimplify[D[x[uu,vv],vv].D[x[uu,vv],vv]]/.{uu->u,vv->v};
```

Nadalje, definicija jediničnog vektora normale (31) je

```
N0[x_][u_,v_]:=FullSimplify[Cross[D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]]/  
Sqrt[Cross[D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]].  
Cross[D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]]]]/.  
{uu->u,vv->v}
```

a definicije koeficijenata druge diferencijalne forme, na temelju jednakosti (57) su

```
ll[x_][u_,v_]:=FullSimplify[D[x[uu,vv],uu,uu].N0[x][uu,vv]]/.{uu->u,vv->v};  
mm[x_][u_,v_]:=FullSimplify[D[x[uu,vv],uu,vv].N0[x][uu,vv]]/.{uu->u,vv->v};  
nn[x_][u_,v_]:=FullSimplify[D[x[uu,vv],vv,vv].N0[x][uu,vv]]/.{uu->u,vv->v};
```

Sada je, u programskom jeziku *Mathematica*, na temelju jednakosti (73) i (74) moguće definirati funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti (koje ćemo označiti GZ i SZ) za bilo koju funkciju x .

```
GZ[x_][u_,v_]:=FullSimplify[(ll[x][uu,vv]*nn[x][uu,vv]  
-mm[x][uu,vv]*mm[x][uu,vv])/   
(ee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]-ff[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv])]/.  
{uu->u,vv->v}
```

```
SZ[x_][u_,v_]:=FullSimplify[1/2(ee[x][uu,vv]*nn[x][uu,vv]  
-2mm[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv]  
+gg[x][uu,vv]*ll[x][uu,vv])/   
(ee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]-ff[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv])]/.  
{uu->u,vv->v}
```

Ove nam definicije omogućuju strojno računanje Gaussove i srednje zakrivljenosti na plohi, kao i crtanje grafova tih funkcija. Na primjer, nakon učitavanja gornjih definicija, za rotacijski paraboloid s eksplisitnom jednažbom $z = x^2 + y^2$ to izgleda ovako:

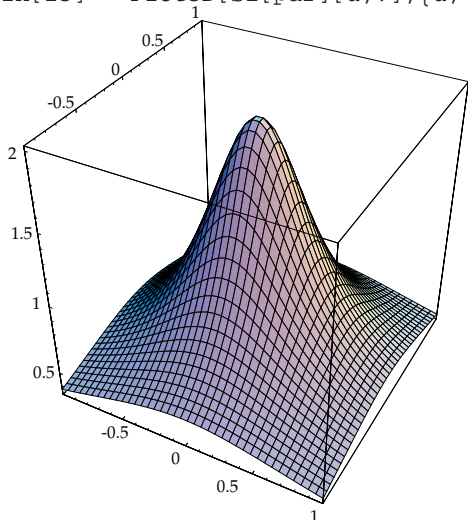
```
In[10]:= par[u_,v_]:= {u,v,u^2+v^2}
```

```
In[11]:= GZ[par][u,v]  
Out[11]= 4/(1+4u^2+4v^2)^2
```

```
In[12]:= GZ[par][u,v]  
Out[12]= (2+4u^2+4v^2)/(1+4u^2+4v^2)^(3/2)
```

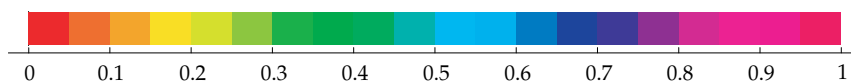
Naredba za crtanje grafa funkcije srednje zakrivljenosti definiranog paraboloida je sljedeća:

```
In[13]:= Plot3D[SZ[par][u,v],{u,-1,1},{v,-1,1},BoxRatios->{1,1,1},PlotPoints->40]
```



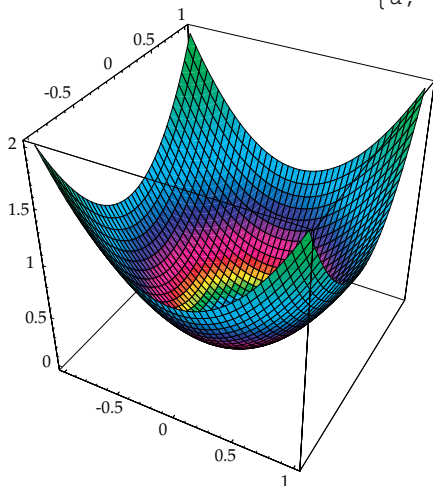
```
Out[13]= - SurfaceGraphics -
```

U programu *Mathematica* postoji periodička (perioda 1) funkcija boje *Hue* definirana na sljedeći način:



Ta funkcija omogućuje prikaze ploha obojane bojom koja je funkcija njihove Gaussove ili srednje zakrivljenosti. S takvih slika ne može se očitavati točna vrijednost zakrivljenosti plohe u pojedinim točkama, ali one vrlo dobro vizualiziraju "ponašanje" funkcija na plohi. Na sljedećoj je slici prikazan paraboloid obojan bojom koja je funkcija njegove srednje zakrivljenosti $Hue(SZ)$.

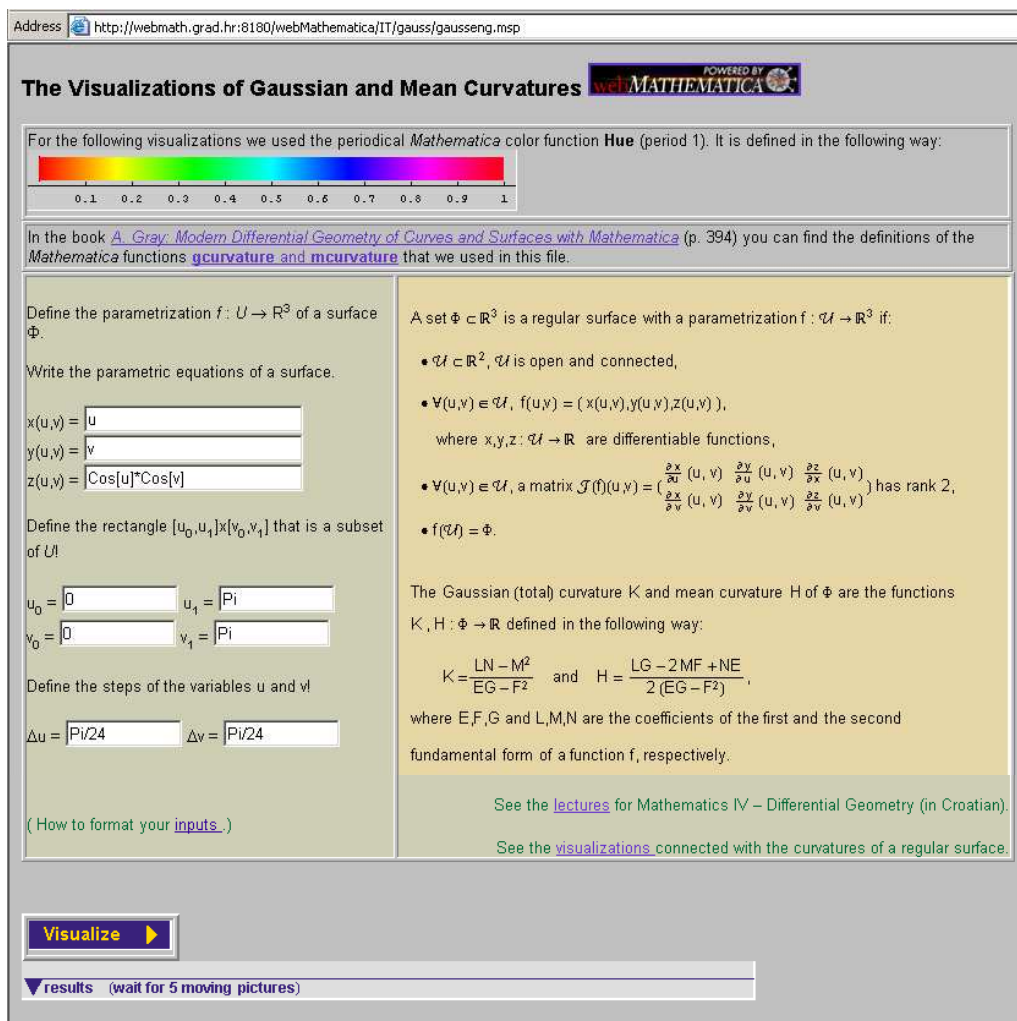
```
In[14]:= ParametricPlot3D[Append[par[u,v],Hue[SZ[par][u,v]]//Evaluate,
{u,-1,1},{v,-1,1},Lighting->False,PlotPoints->40]
```



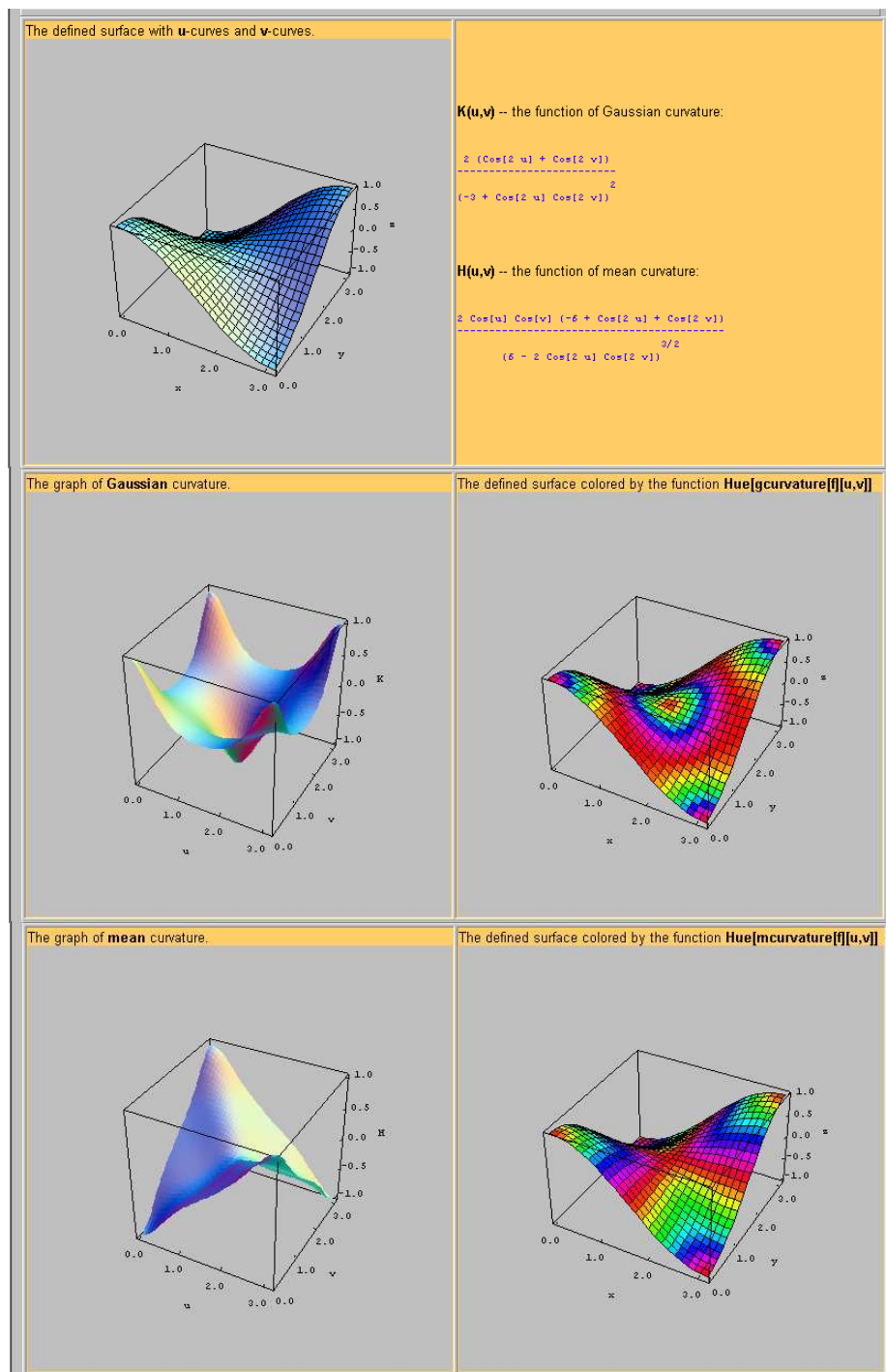
```
Out[14]= - Graphics3D -
```

Na temelju izloženog principa, u okviru svog rada na IT projektu *Odabrana poglavlja geometrije i matematike za inženjere graditeljskih struka pomoću Mathematice*, profesorica Sonja Gorjanc s Građevinskog fakulteta u Zagrebu izradila je program za crtanje grafova funkcija Gaussove i srednje zakrivljenosti, te prikazivanja ploha obojanih bojom koja je funkcija tih zakrivljenosti. U okviru istog projekta profesor Vladimir Benić, s istog fakulteta, instalirao je na računalu **webmath.grad.hr** program *webMathematica*. To je skup datoteka, nastao prije manje od dvije godine, koji omogućuje da se u HTML datotekama nalaze naredbe programa *Mathematica*. Drugim riječima, *webMathematica* je most između web servera i programa *Mathematica* koji omogućava interaktivno računanje i vizualizacije na web stranicama ([3], [2]).

Instalacija *webMathematice* na Građevinskom fakultetu u Zagrebu omogućila je izradu interaktivne datoteke s vizualizacijama zakrivljenosti ploha.



Slika 25: Print-screen engleske verzije web stranice podržane *webMathematicom* koja je izrađena u okviru spomenutog projekta. Korisnik upisuje podatke (parametarske jednadžbe plohe, područje definicije i korake vatrijabli) u bijela pravokutna polja, a nakon toga pritiskom na tipku **Visualize** pokreće interaktivnu komunikaciju.



Slika 26: Print-scean *webMathematica* rezultata. Grafički su prikazi *LiveGraphics3D* tj. na zaslonu računala može ih se pokretati pomoću miša.

Prilikom rada na ovoj radnji koristili smo tu *webMathematica* datoteku kao i program napisan u *Mathematici* na temelju kojeg je ona napravljena. Tako smo izradili veći broj primjera koji se nalaze na CD-u u prilogu.

4.2 Primjeri

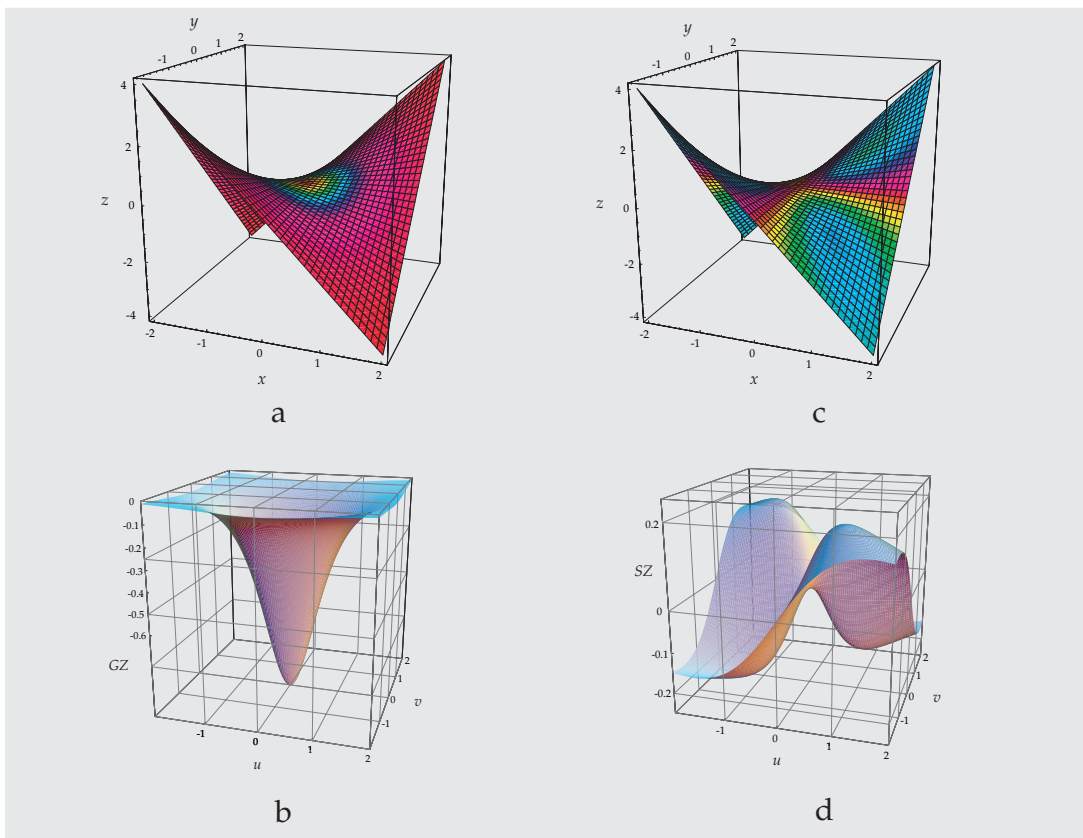
Prva dva primjera su hiperbolički paraboloid i kružni konoid za koje smo u prethodnom poglavlju promatrali glavne i asimptotske smjerove.

Primjer 1.

Hiperbolički paraboloid zadan je parametarskim jednadžbama (69). Promatramo ga u području $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Za tu su plohu funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti dane formulama:

$$K(u, v) = -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad H(u, v) = -\frac{uv}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}. \quad (79)$$



Slika 27: Na slici su za hipar s parametrizacijom (69) dani sljedeći prikazi:

- (a) Ploha obojana bojom $Hue(GZ)$.
- (b) Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti hipara (79) nad područjem $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
- (c) Ploha obojana bojom $Hue(3SZ)$.
- (d) Graf funkcije srednje zakrivljenosti hipara (79) nad područjem $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

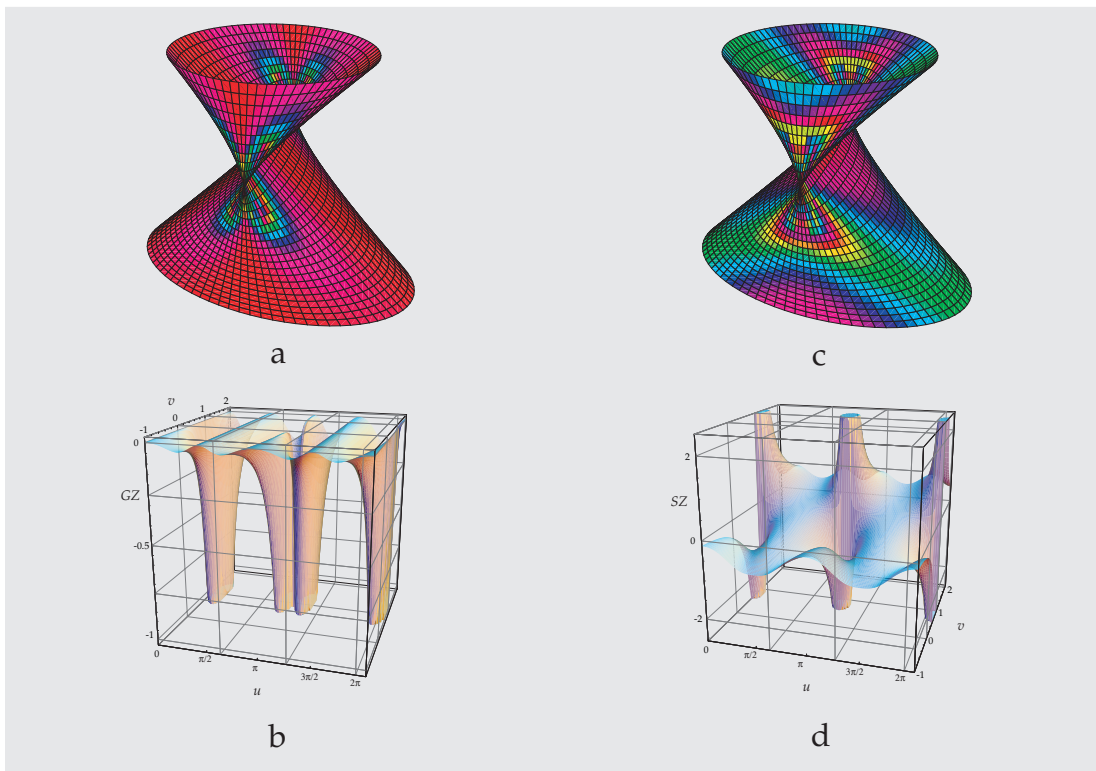
Primjer 2.

Kružni konoid 4. reda zadan je parametarskim jednadžbama (70). Promatramo ga u području $[0, 2\pi] \times [-2, 1]$.

Za tu su plohu funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti dane formulama:

$$K(u, v) = -\frac{\cos^2 u \sin^2 u}{((v-1)^2 \cos^2 u + \sin^2 u + \sin^4 u)^2}, \quad (80)$$

$$H(u, v) = \frac{(v-1)(1 + (2 + \cos^2 2u) \sin^2 u)}{2((v-1)^2 \cos^2 u + \sin^2 u \sin^4 u)^{3/2}}. \quad (81)$$



Slika 28: Na slici su za konoid s parametrizacijom (70) dani sljedeći prikazi:

- (a) Ploha obojana bojom $Hue(GZ)$.
- (b) Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti (80) nad područjem $[0, 2\pi] \times [-2, 1]$.
- (c) Ploha obojana bojom $Hue(SZ)$.
- (d) Graf funkcije srednje zakrivljenosti (81) nad područjem $[0, 2\pi] \times [-2, 1]$.

Za promatrani konoid pravac (ravnilica) paralelan s osi x , čije točke zadovoljavaju jednadžbu

$$v = 1, \quad v \in \mathbb{R}$$

je dvostruki pravac plohe, u svakoj njegovoj točki postoje dvije tangencijalne ravnine. U tim točkama funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti nisu definirane, što se jasno vidi na njihovim grafovima (slika 28b i 28d).

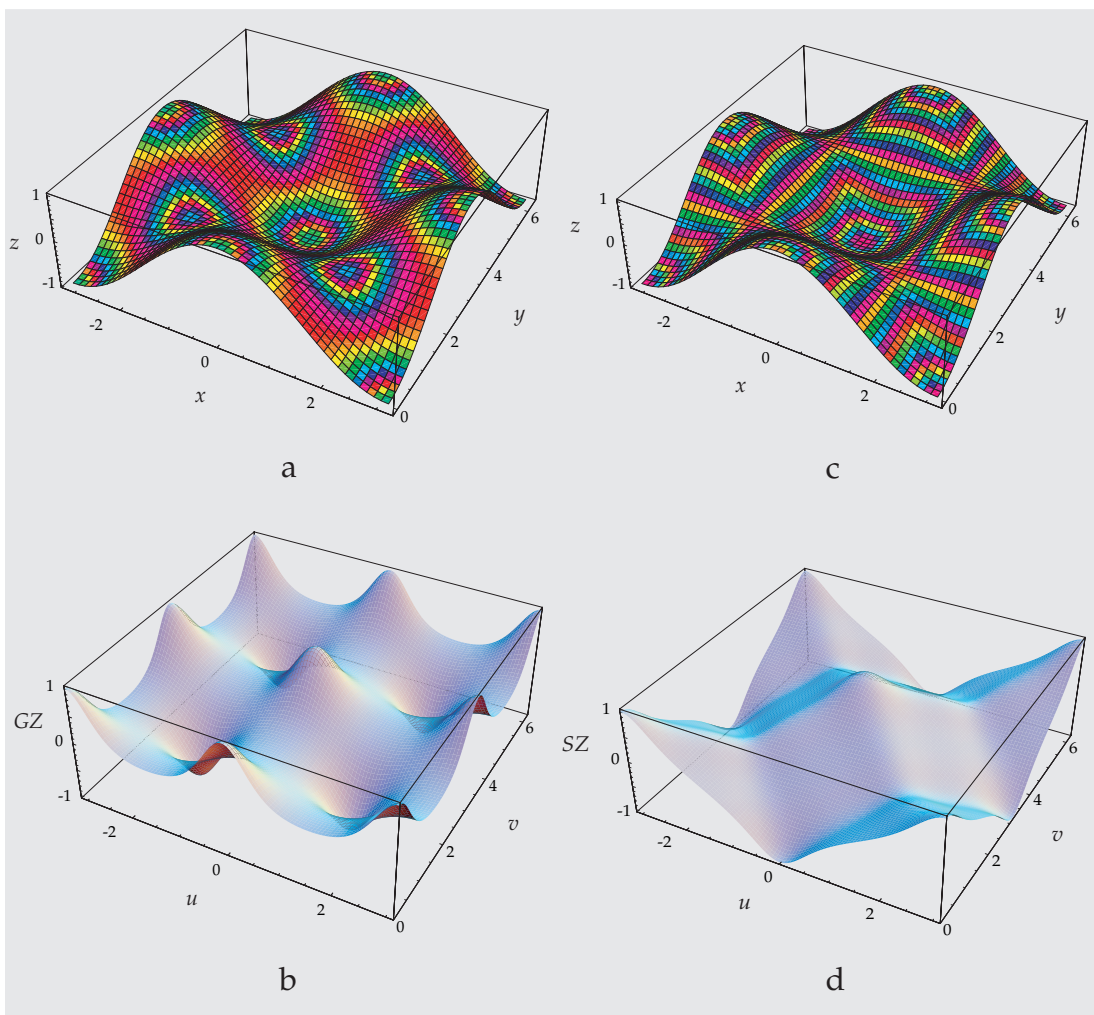
Primjer 3.

Promatramo regularnu plohu zadanu paramerizacijom

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = \cos u \cos v, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]. \quad (82)$$

Za tu su plohu funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti dane formulama:

$$K(u, v) = -\frac{2(\cos 2u + \cos 2v)}{(\cos 2u \cos 2v - 3)^2}, \quad H(u, v) = \frac{2 \cos u \cos v (\cos 2u + \cos 2v - 6)}{(6 - 2 \cos 2u \cos 2v)^{3/2}}. \quad (83)$$



Slika 29: Na slici su za plohu s parametrijom (82) dani sljedeći prikazi:

(a) Ploha obojana bojom $Hue(GZ)$.

(b) Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti (83) nad područjem $[-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]$.

(c) Ploha obojana bojom $Hue(SZ)$.

(d) Graf funkcije srednje zakrivljenosti (83) nad područjem $[-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Primjer 4.

Parametrizacija elipsoida sa središtem u ishodištu je

$$x(u, v) = a \cos u \sin v, \quad y(u, v) = b \sin u \sin v, \quad z(u, v) = c \cos v, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi], \quad (84)$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Singularne točke ove parametrizacije su $(0, 0, \pm c)$.

Ako su brojevi $a, b, i c$ međusobno različiti elipsoid nazivamo *troosnim*.

Ako je $a = b \neq c$ elipsoid je *rotacijski* i to *spljoštenu* ukoliko je $a > c$, odnosno *izduženu* ukoliko je $a < c$.

U slučaju kada je $a = b = c$ jednadžbe (84) određuju *kuglu* polumjera a .

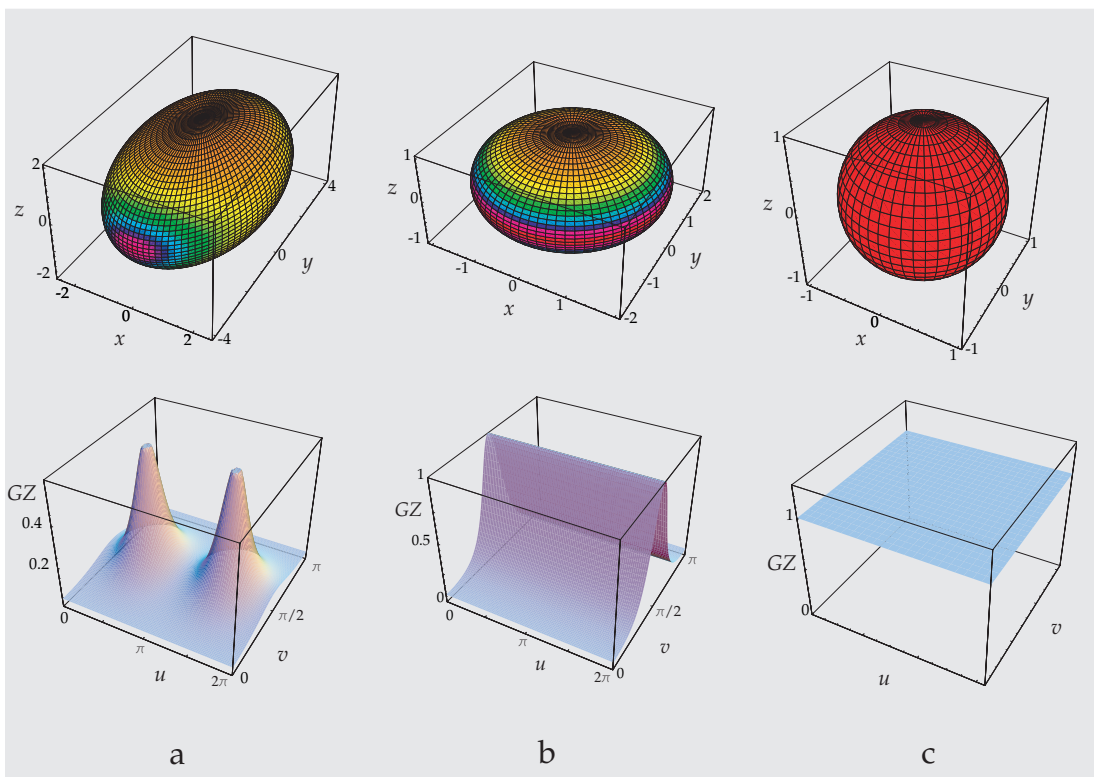
Funkcija Gaussove zakrivljenosti troosnog elipsoida dana je formulom

$$\frac{1}{(a^2 + b^2 + (b^2 - a^2) \cos u) \sin^2 v \cos^2 v + \frac{a^2 b^2 \cos^4 v}{c^2} + \frac{c^2 \sin^4 v (b^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u)^2}{a^2 b^2}}. \quad (85)$$

Funkcija Gaussove zakrivljenosti rotacijskog elipsoida dana je formulom

$$\frac{4c^2}{(a^2 + c^2 + (a - c)(a + c) \cos 2v)^2}, \quad (86)$$

dok je, kao što je već istaknuto u 2.6, Gaussova zakrivljenost u svakoj točki kugle jednaka $1/a^2$.

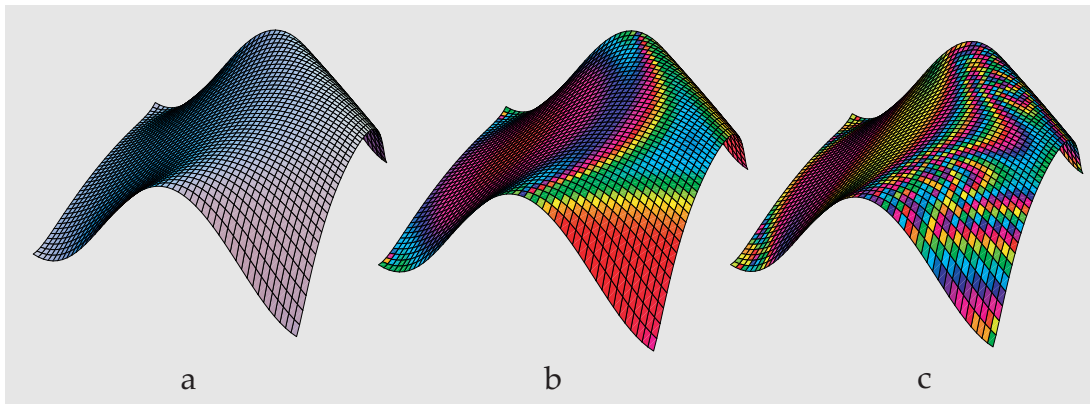


Slika 30: Na slici su za troosni elipsoid ($a = 2.5, b = 4, c = 2$) (a), spljoštenu rotacijski elipsoid ($a = 2, c = 1$) (b) i kuglu ($a = 1$) (c) dani prikazani ploha obojanih bojom $Hue(GZ)$ te grafovi njihovih funkcija Gaussove zakrivljenosti.

Primjer 5.

Ploha je zadana parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto \left(u, v, \sin \frac{u}{\cos v}\right). \quad (87)$$

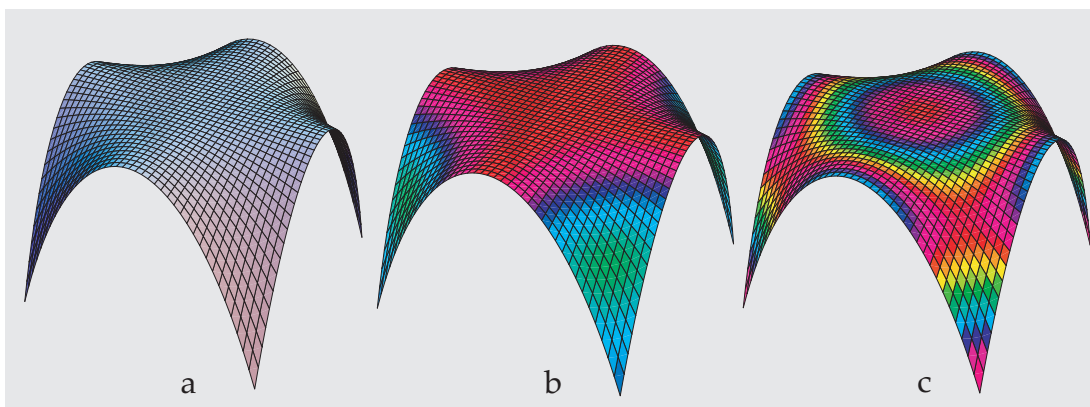


Slika 31: Na slici **a** prikazana je ploha (87) u području $[-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 6.

Ploha je zadana parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto (u, v, -\cosh uv). \quad (88)$$

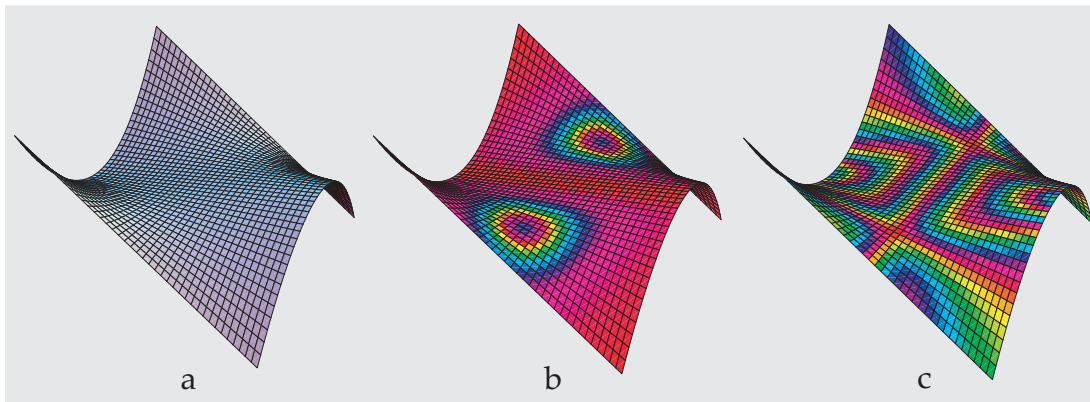


Slika 32: Na slici **a** prikazana je ploha (88) u području $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 7.

Parabolički konoid 3. reda zadan je parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto (u, v, 0.5(v^2 - 1)(3 - u)). \quad (89)$$

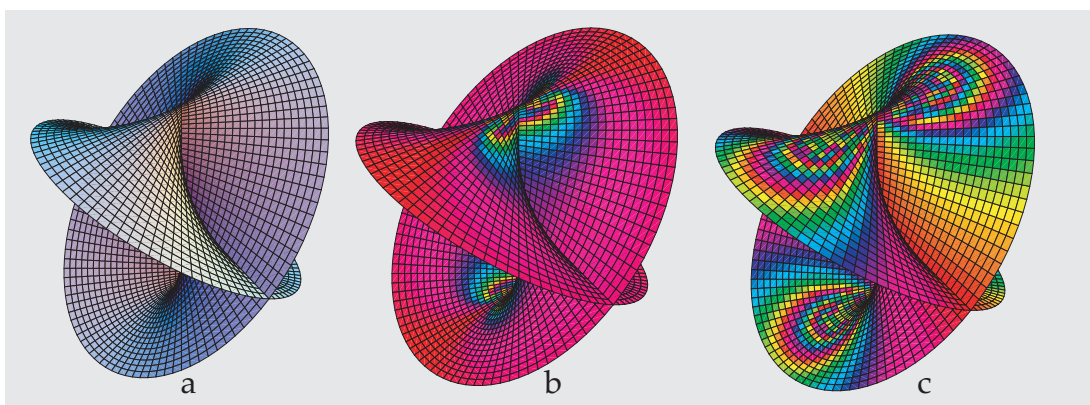


Slika 33: Na slici **a** prikazana je ploha (89) u području $[1, 5] \times [-2, 2]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 8.

Plückerov konoid 4. reda zadan je parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, 2 \sin u). \quad (90)$$

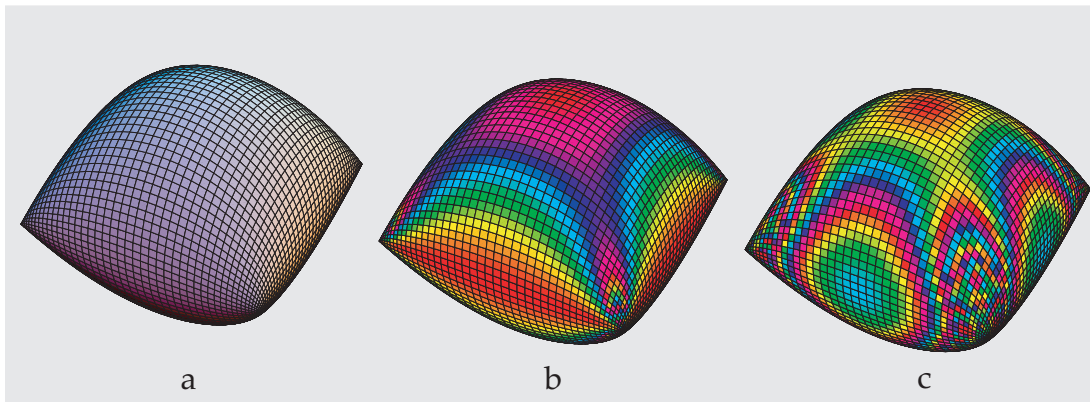


Slika 34: Na slici **a** prikazana je ploha (90) u području $[0, 2\pi] \times [-2, 2]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 9.

Ploha je zadana parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto (\sin u, \sin v, \cos u \cos v). \quad (91)$$

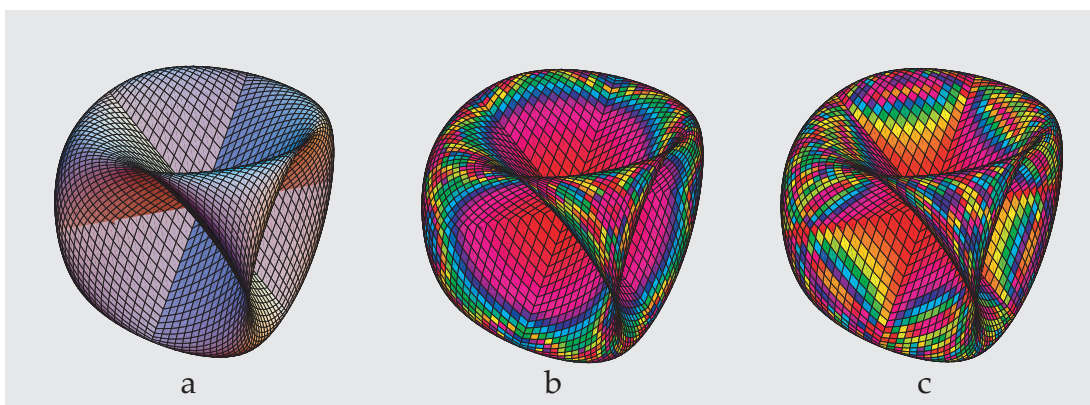


Slika 35: Na slici **a** prikazana je ploha (91) u području $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 10.

Ploha je zadana parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto (\sin u, \sin v, \sin(u + v)). \quad (92)$$

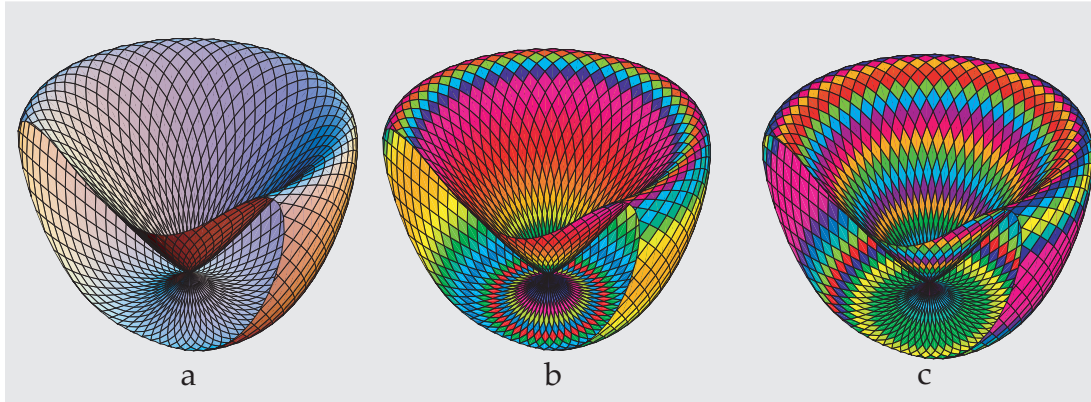


Slika 36: Na slici **a** prikazana je ploha (92) u području $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 11.

Ploha je zadana parametrizacijom

$$(u, v) \mapsto (\sin u + \cos v, \cos u + \sin v, \cos(u + v) + \sin(u + v)). \quad (93)$$



Slika 37: Na slici **a** prikazana je ploha (93) u području $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Ista je ploha na slici **b** obojana bojom $Hue(GZ)$, a na slici **c** bojom $Hue(SZ)$.

5 Minimalne plohe

5.1 Definicije, Lagrangeova i Laplaceova jednadžba

Pojam minimalne plohe može se odnositi na dvije vrste tvorevina.

Prirodna minimalna ploha označava oblike koje poprima opna od sapunice razapeta na žicu savijenu u zadanu prostornu krivulju. Opna uvijek ima najmanju površinu od svih ploha koje zadovoljavaju iste rubne uvjete.

Matematička minimalna ploha definira se kao ploha koja ima srednju zakrivljenost jednaku nuli i kao takva oponaša opisanu pojavu iz prirode. Minimalna ploha, parametrizirana u obliku $(x, y, f(x, y))$, zadovoljava nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu čiji je autor Lagrange:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (94)$$

Kao trivijalno rješenje Lagrangeove jednadžbe može se dobiti najjednostavnija minimalna ploha - *ravnina*. Prva netrivialna rješenja (*katenuoid* i *helikoid*) dali su Meusnier i Euler u 18. stoljeću. Katenuoid nastaje rotacijom lančаницe što omogućuje njegovu primjenu u graditeljstvu.

Lagrangeova jednadžba prilično je složena. Taj se problem nastojalo riješiti primjenom prikladnog jednostavnijeg izraza. Došlo se do zaključka da se za plitke plohe Lagrangeova jednadžba može aproksimirati s linearnom, Laplaceovom jednadžbom:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (95)$$

U graditeljskoj se praksi plitke plohe samo iznimno koriste, jer one premalo odstupaju od ravnine pa nemaju dovoljnu zakrivljenost ni dovoljnu geometrijsku krutost u smjeru okomitom na plohu.

Danas je poznat čitav niz analitički definiranih minimalnih ploha (rješenja Lagrangeove jednadžbe) od kojih su mnoga nađena na elektroničkim računalima pomoću simboličkih matematičkih programa (*Mathematica* i dr.) [6].

5.2 Primjeri minimalnih ploha s prikazima u *Mathematici*

U ovom ćemo dijelu prikazati jedanaest primjera minimalnih ploha koji se mogu naći u [10] i [17]. Svi grafički prikazi dobiveni su u programu *Mathematica*, a naredbe za njihovo crtanje nalaze se na CD-u u prilogu.

Helikoid - zatvorena uspravna zavojna pravčasta ploha

Kružnom zavojnicom polumjera a i parametra b nazivamo krivulju danu parametarskim jednadžbama

$$x(u) = a \cos u, \quad y(u) = a \sin u, \quad z(u) = bu, \quad u \in \mathbb{R}, \quad a > 0, b \neq 0. \quad (96)$$

To je krivulja koju opisuje točka na uspravnom kružnom valjku ako jednoliko kruži oko njegove osi, a istovremeno se jednoliko giba u smjeru te osi.

Normale zavojnice koje ortogonalno sijeku zavojnu os (glavne normale) tvore *zatvorenu uspravnu pravčastu plohu* - HELIKOID. Možemo reći da je to ploha koju generira pravac koji ortogonalno siječe neku os, jednoliko rotira oko te osi, a istovremeno se jednoliko giba u smjeru te osi.

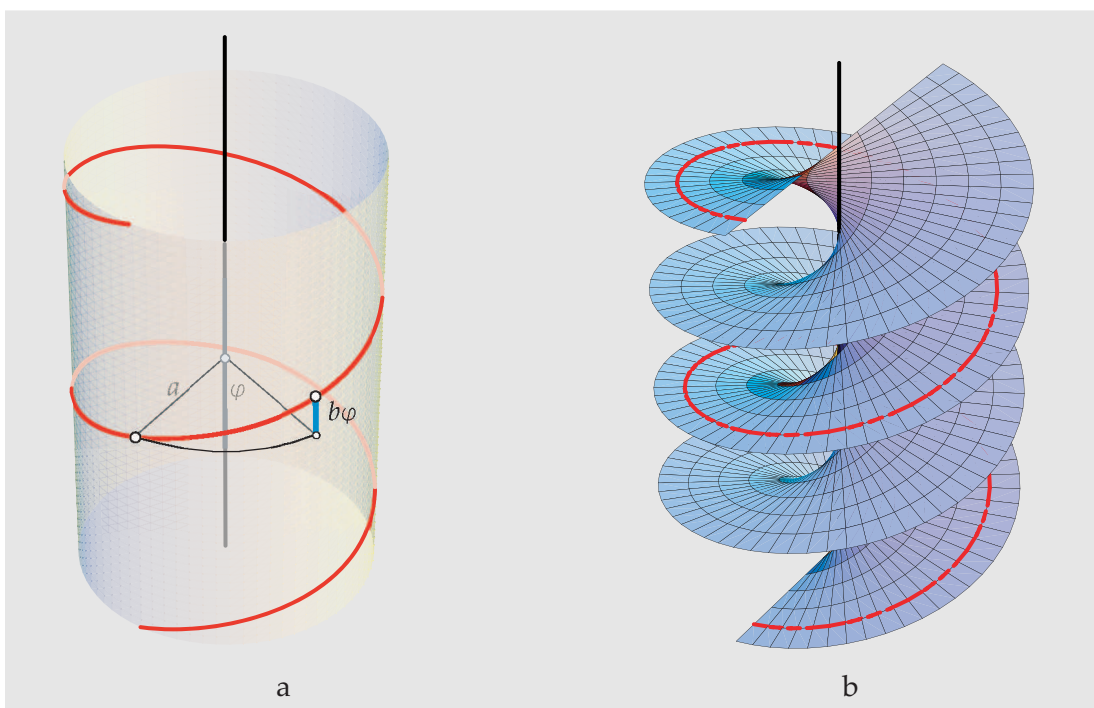
Helikoid je, pored ravnine, jedina pravčasta minimalna ploha [17].

Parametarske jednadžbe takve plohe su

$$x(u, v) = av \cos u, \quad y(u, v) = av \sin u, \quad z(u, v) = bu, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0, \quad b \neq 0. \quad (97)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 helikoida (97) u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \frac{a}{a^2 + u^2}. \quad (98)$$



Slika 38: Zavojnica ($a = 2, b = 0.5$) na valjku (a) i njoj pridruženi helikoid (b).

Katenoid

Katenoid je, pored ravnine, jedina rotacijska minimalna ploha [10, str. 468]. Nastaje rotacijom lančanice. Ako je u ravni yz lančanica zadana parametarskim jednadžbama

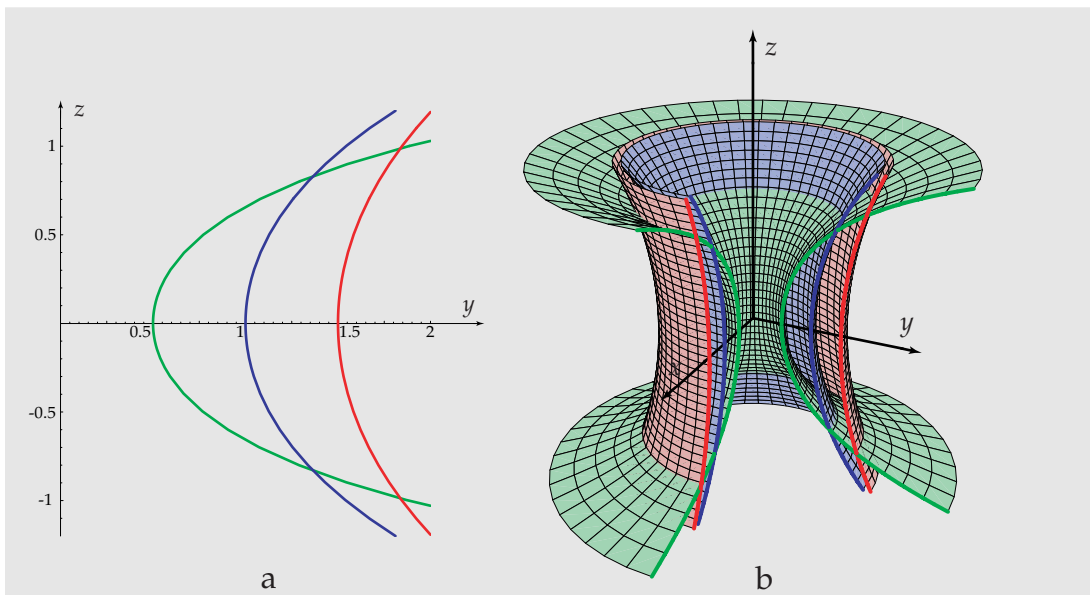
$$y(v) = a \cosh \frac{v}{a}, \quad z(v) = v, \quad v \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad (99)$$

tada njezinom rotacijom oko osi z nastaje katenoid dan parametrizacijom

$$\begin{aligned} x(u, v) &= a \cosh \frac{v}{a} \cos u, \\ y(u, v) &= a \cosh \frac{v}{a} \sin u, \\ z(u, v) &= v, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 katenoida (100) u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \frac{\left(\operatorname{sech} \frac{v}{a}\right)^2}{a}. \quad (101)$$



Slika 39: Na slici (a) su prikazani dijelovi lančanica danih jednadžbom (99) za $a = 0.5$ (zeleni), $a = 1$ (plavi) i $a = 1.5$ (crveni). Na slici (b) prikazani su dijelovi katenoida koji nastaju njihovom rotacijom oko osi z , obojani odgovarajućom bojom.

Heltocat

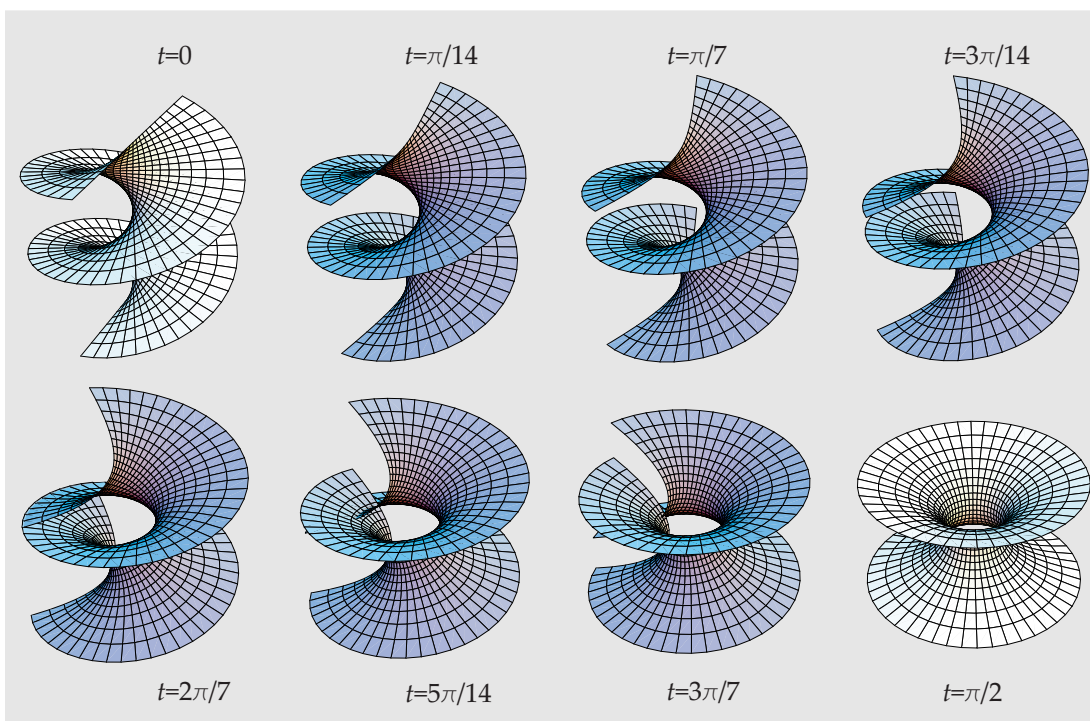
Heltocat je uređena familija izometričnih minimalnih ploha $\mathcal{H}(t)$, $t \in [0, \pi/2]$ danih parametarskim jednažbama

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \sin t \cosh v \cos u + \cos t \sinh v \sin u, \\ y(u, v) &= \sin t \cosh v \sin u - \cos t \sinh v \cos u, \\ z(u, v) &= u \cos t + v \sin t, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi]\mathbb{R}, \quad t \in [0, \pi/2]. \end{aligned} \quad (102)$$

Za $t = 0$ heltocat je helikoid ($a = 1$, $b = 1$), a za $t = \pi/2$ heltocat je katenoid ($a = 1$), tj. helikoid i katenoid su početak i kraj jedne kontinuirane deformacije izometričnih minimalnih ploha.

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 plohe $\mathcal{H}(t)$ (102) u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \operatorname{sech}^2 v. \quad (103)$$



Slika 40: Niz minimalnih ploha $\mathcal{H}(t)$ određenih jednažbama (102).

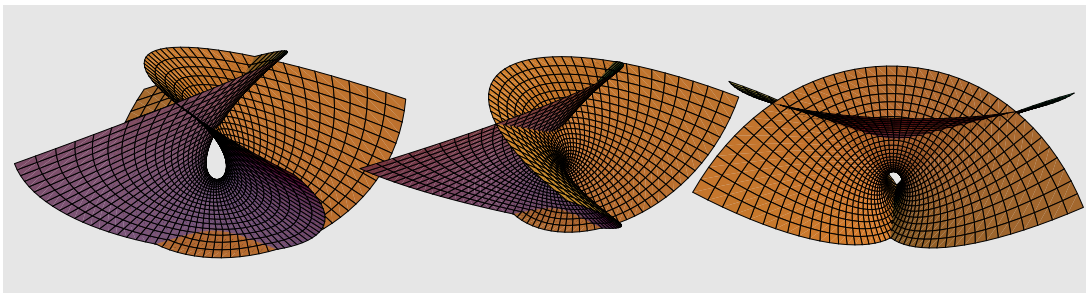
Enneperova minimalna ploha

Parametarske jednažbe Enneperove minimalne plohe su

$$x(u, v) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \quad y(u, v) = -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, \quad z(u, v) = u^2 - v^2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (104)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 plohe dane jednađbama (104) u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}. \quad (105)$$



Slika 41: Tri različita pogleda na plohu danu jednađbama (104).

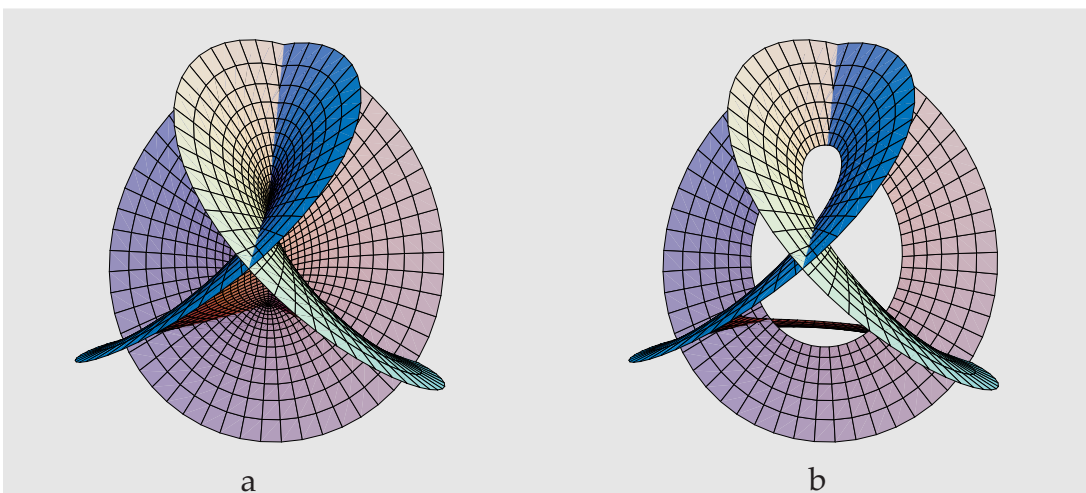
Hennebergova minimalna ploha

Parametarske jednađbe Hennebergove minimalne plohe su

$$\begin{aligned} x(u, v) &= 2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh 3u \cos 3v, \\ y(u, v) &= 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh 3u \sin 3v, \\ z(u, v) &= 2 \cosh 2u \cos 2v, \quad (u, v) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (106)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 plohe dane jednađbama (106) u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \frac{\operatorname{sech}^2 u}{2\sqrt{2(\cosh 4u - \cos 4v)}}. \quad (107)$$



Slika 42: Prikazi plohe dane jednađbama (106) za $u \in [0, 0.85]$ (a) i $u \in [0.35, 0.85]$ (b).

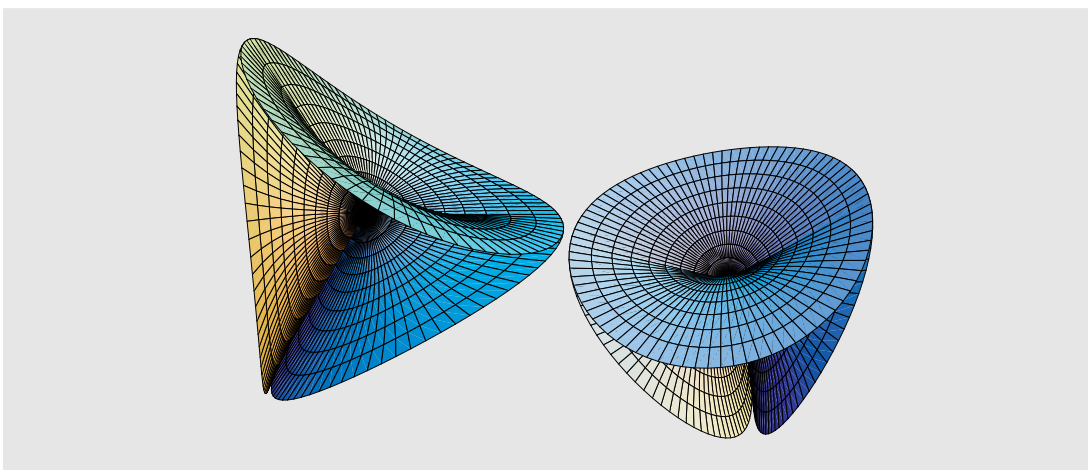
Bourova minimalna ploha

Parametarske jednadžbe *Bourove* minimalne plohe su

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u \cos v - \frac{1}{2}u^2 \cos 2u, \\y(u, v) &= -u \sin v - \frac{1}{2}u^2 \sin 2v, \\z(u, v) &= \frac{4}{3}u^{3/2} \cos \frac{3}{2}v \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-2\pi, 2\pi].\end{aligned}\tag{108}$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 plohe dane jednadžbama (108) u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \frac{1}{(1+u)^2 \sqrt{u}}.\tag{109}$$



Slika 43: Dva različita pogleda na plohu danu jednadžbama (108).

Minimalna ploha s astroidom kao geodezijskom linijom

Neka je \mathcal{K} krivulja na plohi \mathcal{F} , $T \in \mathcal{K}$ i $\bar{\mathcal{K}}$ ortogonalna projekcija krivulje \mathcal{K} na tangencijalnu ravninu plohe \mathcal{F} u točki T . *Geodezijska zakrivljenost* krivulje \mathcal{K} u točki T na plohi \mathcal{F} jednaka je zakrivljenosti krivulje $\bar{\mathcal{K}}$ u točki T . Krivulju \mathcal{G} na plohi \mathcal{F} nazivamo *geodezijskom linijom* ako je u svakoj njezinoj točki geodetska zakrivljenost plohe jednaka 0, tj. geodetska se linija u tangencijalnoj ravnini projicira u pravac. Geodetske linije imaju važnu ulogu u geometriji ploha, na njima leže najkraće spojnice točaka na plohi.

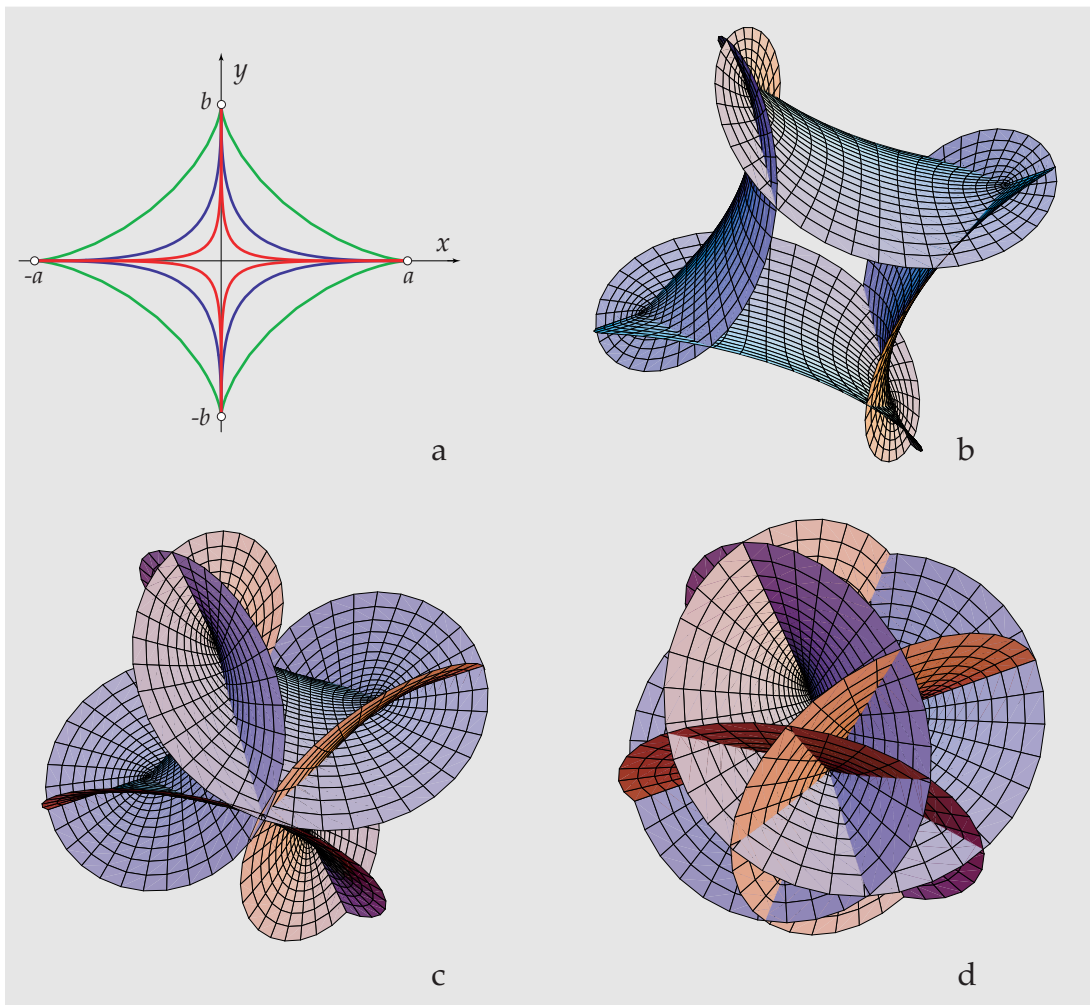
U knjizi [10, str. 766] dani su primjeri minimalnih ploha konstruiranih (pomoću preslikavanja u kompleksnoj ravnini) tako da su prvo odabrane neke ravninske krivulje kao njihove geodezijske linije. Mi ćemo ovdje navesti dva primjera, u prvom je odabrana geodezijska linija - astroida. *Astroida* je ravninska krivulje dana parametrizacijom:

$$x(t) = a \cos t^n, \quad y(t) = b \sin t^n, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad n \in \mathbb{N}, n > 2, \quad a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.\tag{110}$$

Prema [10, str. 766] parametarske jednadžbe plohe kojoj je astroida, određena brojevima ($n = 3, a = b = 8/3$) geodezijska linija su

$$\begin{aligned} x(u, v) &= 2 \cos u \cosh v + \frac{2}{3} \cos 3u \cosh 3v, \\ y(u, v) &= 2 \sin u \cosh v - \frac{2}{3} \sin 3u \cosh 3v, \\ z(u, v) &= -2 \sin 2u \sinh 2v, \quad (u, v) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (111)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 te plohe u točki $T(u, v)$ podudaraju se s glavnim zakrivljenostima Hennebergove minimalne plohe i dane su jednadžbama (106).



Slika 44: Na slici (a) prikazane su astroide dane jednadžbom (110).

Za $n = 3$ zelena, za $n = 5$ plava i za $n = 7$ crvena.

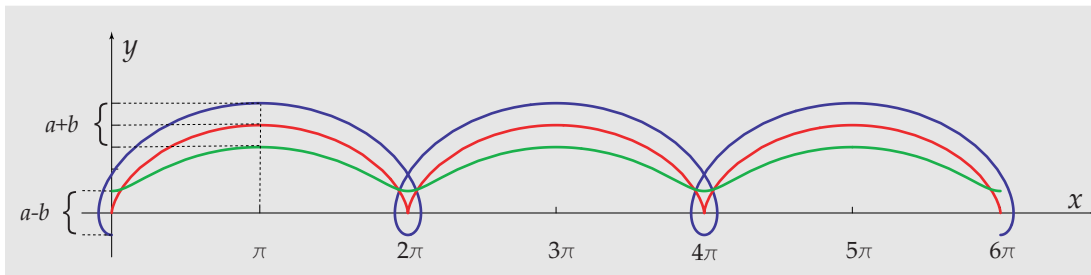
Na ostalim su slikama dani prikazi plohe s jednadžbama (111) nad područjima:

(b) $[-\pi, \pi] \times [-0.4, 0.4]$, (c) $[-\pi, \pi] \times [-0.67, 0.67]$ i (d) $[-\pi, \pi] \times [-1, 1]$.

Catalanova ploha - minimalna ploha sa cikloidom kao geodezijskom linijom

Cikloida je periodička ravninska krivulja s parametarskim jednađbama

$$x(t) = at - b \sin t, \quad y(t) = a - b \cos t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0. \quad (112)$$

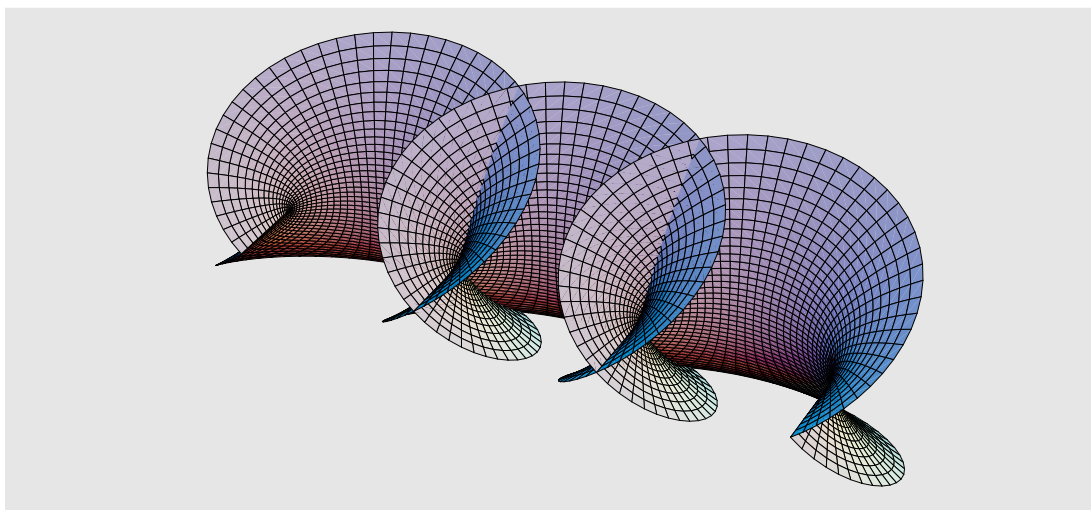


Slika 45: Na slici su prikazane tri cikloide: plava za $a < b$, crvena za $a = b$ i zelena za $a > b$. Minimalnu plohu kojoj je geodezijska linija cikloida ($a = b$) nazivamo *Catalanovom*. Ta je ploha dana parametarskim jednađbama

$$x(u, v) = u - \sin u \cosh v, \quad y(u, v) = 1 - \cos u \cosh v, \quad z(u, v) = -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (113)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 te plohe u točki $T(u, v)$ dane su jednađbama

$$K_1, K_2 = \pm \frac{\operatorname{sech}^2 \frac{v}{2}}{2\sqrt{2 \cosh v - 2 \cos u}}. \quad (114)$$



Slika 46: Catalanova minimalna ploha (113) u području $[0, 6\pi] \times [-2, 2]$.

Scherkove minimalne plohe

Scherkove minimalne plohe su prve minimalne plohe otkrivene (1834.) nakon katenoida i helikoida. 1. Scherkova minimalna ploha dana je parametarskim jednadžbama

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = \ln \frac{\cos u}{\cos v}, \quad \mathcal{U} = \{(u, v) \mid \cos u \cos v > 0\}. \quad (115)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 te plohe u točki $T(u, v)$ dane su jednadžbama

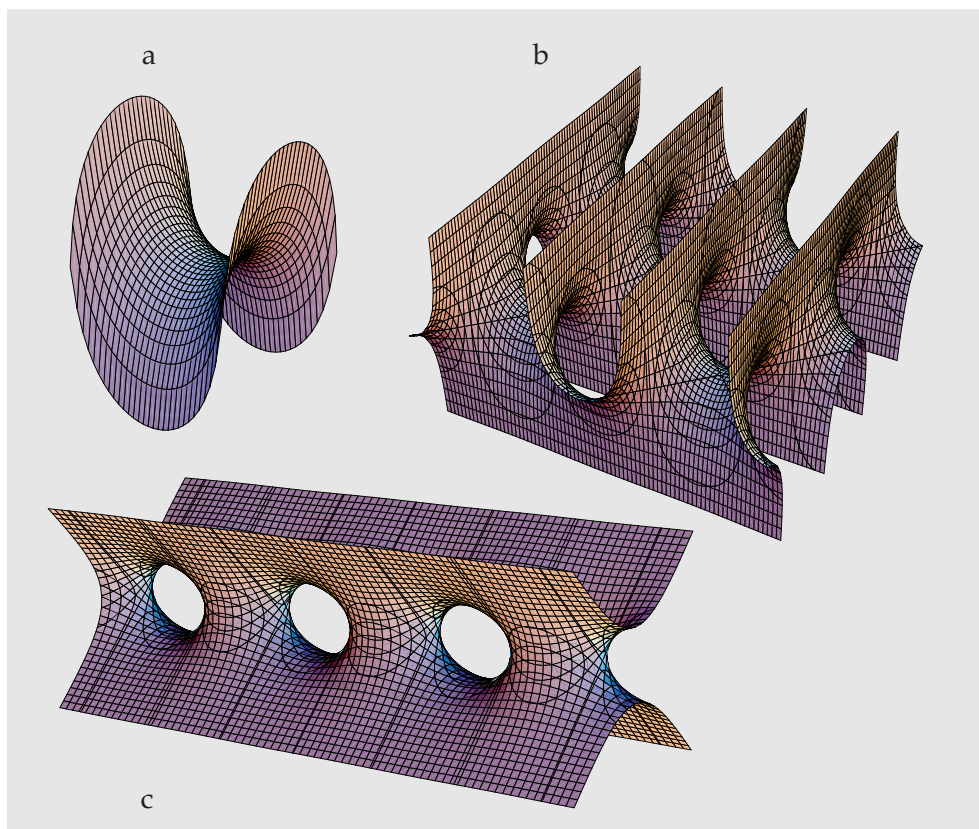
$$K_1, K_2 = \pm \frac{\sec u \sec v}{\sec^2 u + \tan^2 v}. \quad (116)$$

Istu plohu možemo zadati i implicitnom jednadžbom

$$e^z \cos y - \cos x = 0. \quad (117)$$

Minimalna ploha koju, prema [10, str. 697], nazivamo 5. Scherkovom minimalnom plohom dana je implicitnom jednadžbom

$$\sin z - \sinh x \sinh y = 0. \quad (118)$$



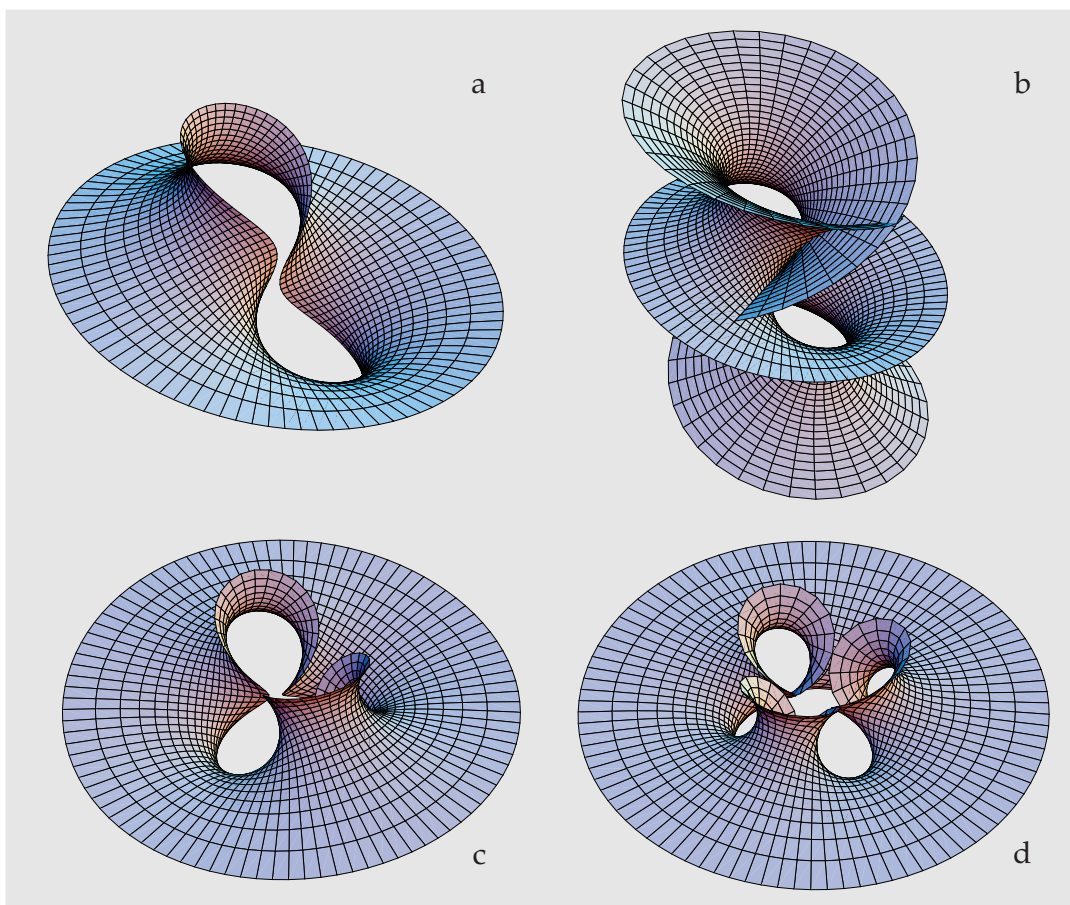
Slika 47: Na slici (a) prikazan je dio plohe (115) u području $\mathcal{U} \subset (-\pi/2, \pi/2)$. Za prikaz (b) korištena je jednadžba (117) koja je omogućila zadovoljavajući grafički prikaz iste plohe, ali u širem području. Na slici (c) prikazana je ploha koja je dana jednadžbom (118), zakrenuta u odnosu na uobičajeni položaj koordinatnih osi.

Richmondova minimalna ploha

U knjizi [10, str. 736] dane su definicije Weierstrassove i konjugirano Weierstrassove parametrizacije. To su relativno komplicirane parametrizacije koje ovise o dvije kompleksne funkcije $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Ako su te funkcije dane formulama $f(z) = 1/z^2$ i $g(z) = z^{n+1}$ nastaje cijeli niz minimalnih ploha, koje nazivamo *Richmondovima*, a dane su parametarskim jednadžbama:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= -\frac{\cos(t+u)}{2v} - \frac{v^{2n+1} \cos(t-(2n+1)u)}{4n+2} \\ y(u, v) &= -\frac{\sin(t+u)}{2v} - \frac{v^{2n+1} \sin(t-(2n+1)u)}{4n+2} \\ z(u, v) &= \frac{v^n \cos(t-nu)}{n}, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (119)$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 tih ploha u točkama $T(u, v)$ podudaraju se s glavnim zakrivljenostima Catalanove minimalne plohe i dane su jednadžbama (114).



Slika 48: Na slici su prikazane plohe s parametarskim jednadžbama (119).

Za plohu na slici (a) $n = 1, t = 0$, a područje je $[-\pi, \pi] \times [0.3, 1.3]$.

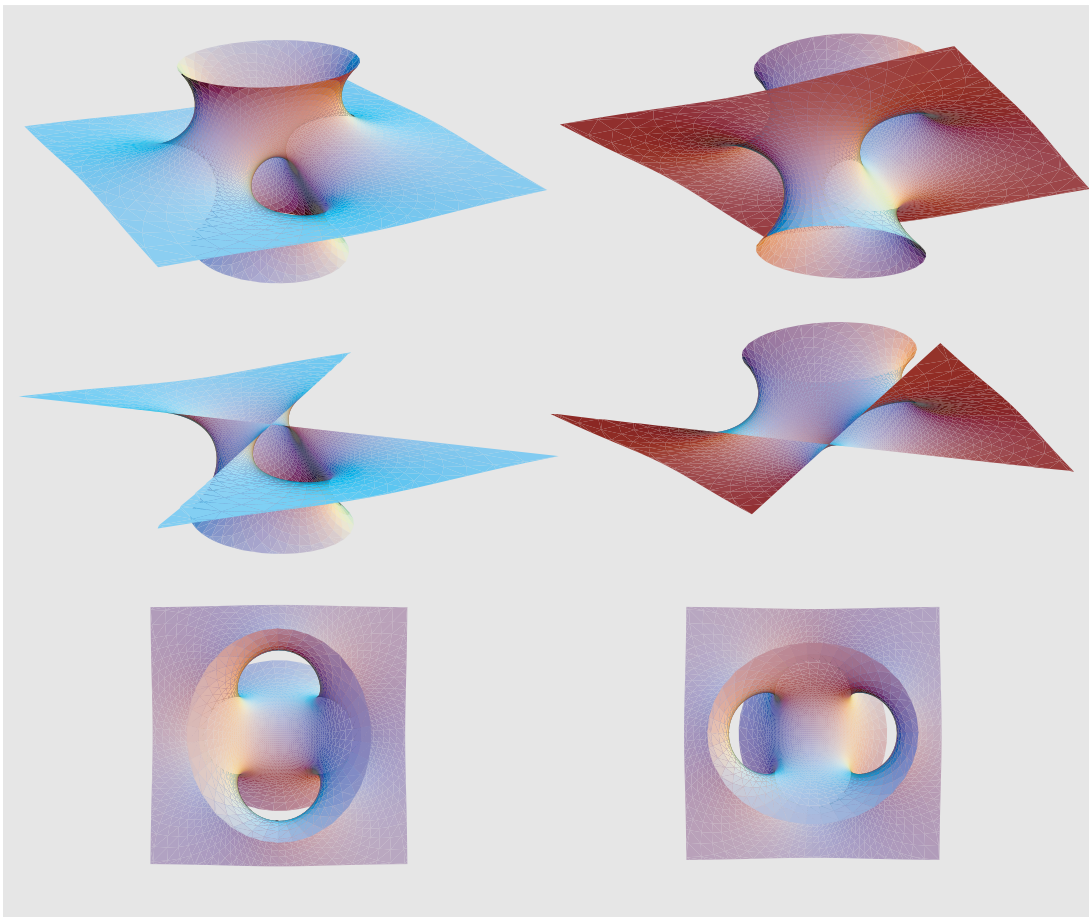
Za plohu na slici (b) $n = 1, t = 0$, a područje je $[-\pi, \pi] \times [0.3, 2]$.

Za plohu na slici (c) $n = 2, t = 0$, a područje je $[-\pi, \pi] \times [0.3, 1.3]$.

Za plohu na slici (d) $n = 3, t = 0$, a područje je $[-\pi, \pi] \times [0.3, 1.3]$.

Costina minimalna ploha

Costina minimalna ploha definirana je 1984. godine. Teorija koja omogućuje njezinu definiciju bazirana je na Weierstrassovoj Zeta funkciji (koja je ugrađena u program *Mathematica* od njegove verzije 3.0), može se naći u [10, str. 747-757] i po svojoj težini svakako nadilazi okvire ovoga rada. Stoga ovdje dajemo samo grafičke prikaze ove zanimljive plohe dobivene u *Mathmatici*.



Slika 49: Costina minimalna ploha prikazana s različitim pogledima i izrezima.

6 Određivanje oblika minimalnih mreža

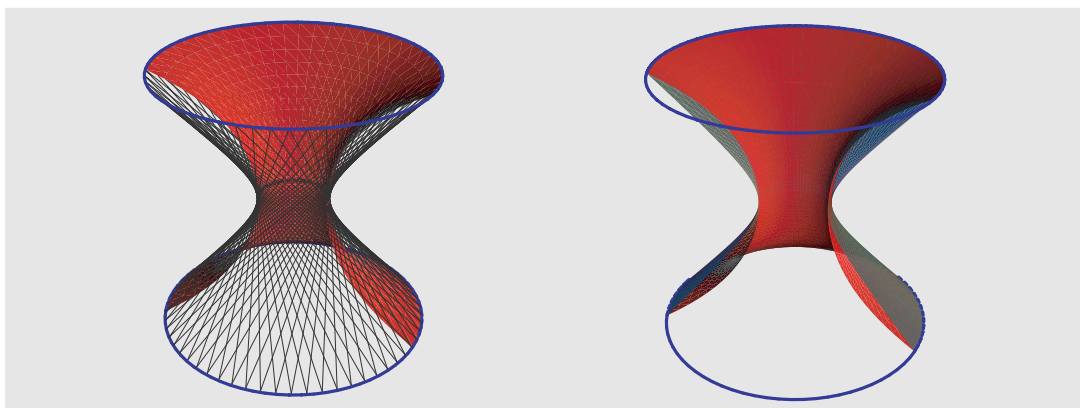
Kao što smo spomenuli u prvom poglavlju, krov od tkanine opterećen samo jednolikim silama prednapona poprima oblik *minimalne plohe*. Na takvoj su plohi naprezanja jednaka u svakoj točki i u svim smjerovima tangencijalne ravnine. Takva ploha ima najmanju površinu od svih onih koje zadovoljavaju iste rubne uvjete.

Određivanje oblika minimalne plohe može se provesti tako da se odredi ravnotežno stanje za bilo koji materijal koji može preuzeti posmik. Važno je samo da oba glavna naprezanja budu vlačna. Konstrukcija od tkanine može poprimiti oblik neminimalne plohe, ako se krojenjem postigne podudarnost smjerova glavnih naprezanja sa smjerovima niti u deformiranom stanju. [6, str. 250-253]

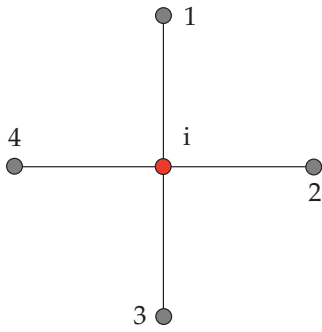
Potrebno je naglasiti da postoji velik broj načina za proračun prednapetih konstrukcija u obliku minimalnih ploha i da ovdje nećemo ići u detalje, jer to nadilazi zamišljeni okvir ovoga rada. Zbog toga ćemo, samo za ilustraciju, prikazati načine koji su najinteresantniji i daju dobar uvid u rješenje problema.

6.1 Numeričko određivanje oblika minimalnih mreža

Minimalna mreža je jednostavan primjer užadi koja u prostoru tvori oblik koji može poslužiti kao aproksimacija minimalne plohe. Minimalna mreža i minimalna ploha nisu identične. Za iste rubne uvjete minimalna ploha nastaje minimiziranjem površine, a minimalna mreža minimiziranjem duljina užadi.



Slika 50: Minimalna ploha kojoj rub čine dvije paralelne kružnice je katenoid, dok odgovarajuću minimalnu mrežu čine izvodnice jednokrillnog rotacijskog hiperboloida.



Slika 51: Promatrani čvor mreže kablova.

Da bi se oblik minimalne mreže matematički odredio, potrebno je promatrati čvorove u kojima se sijeku kablovi. Za svaki od tih čvorova mogu se napisati statički uvjeti ravnoteže. Kako se pri određivanju oblika konstrukcije pretpostavlja da na nju ne djeluje opterećenje, te jednačbe imaju oblik:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} S_{ij} &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 \frac{(y_i - y_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} S_{ij} &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 \frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} S_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (120)$$

Ako se pretpostavi da su sile u kablovima S_{ij} konstantne, one će u izrazima (120) iščezavati. Ideja je da se oblik minimalne mreže definira određivanjem koordinata svih čvorova mreže pomoću izraza (120). Ti izrazi čine sustav nelinearnih jednačbi koji se rješava nekom od poznatih numeričkih metoda. Nemoguće je nepoznanice izračunati izravno. Na temelju pretpostavljenog aproksimativnog rješenja, tj. početnog rješenja, alogaritam iterativnim postupkom konvergira konačnom rješenju. Važno je napomenuti da metode kojima se dobivaju početna rješenja za numeričko određivanje oblika minimalnih mreža, moraju zadovoljiti zahtjeve jednostavnosti i brzine postupka, a pritom dati rezultate što bliže konačnima, kako bi kasniji numerički postupak rješavanja nelinearnih jednačbi konvergirao. Uobičajeni matematički postupak je tzv. *metoda gustoće sile*. Njegova je osnovna zamisao da se jednačbe ravnoteže lineariziraju, što se može postići uvođenjem omjera:

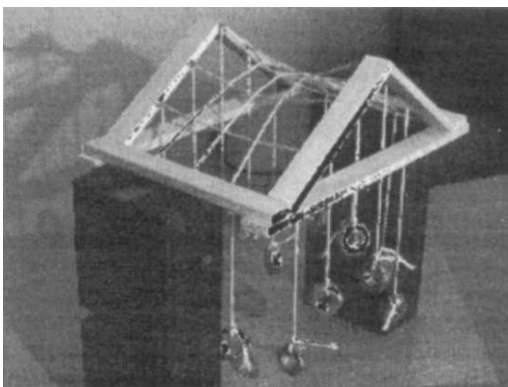
$$q_{ij} = \frac{S_{ij}}{l_{ij}}, \quad l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Time se dobivaju tri neovisna sustava čija se rješenja lako nalaze, ako se kao početna pretpostavka uzme da su vrijednosti q_{ij} konstante. Tako dobivena rješenja dobra su aproksimacija za jednostavne slučajeve, dok je za neke potrebno postupak iterirati nekoliko puta dok se ne dođe do zadovoljavajuće točnosti [11, str. 86-87]. Detaljniji opis numeričkih postupaka dan je u [6].

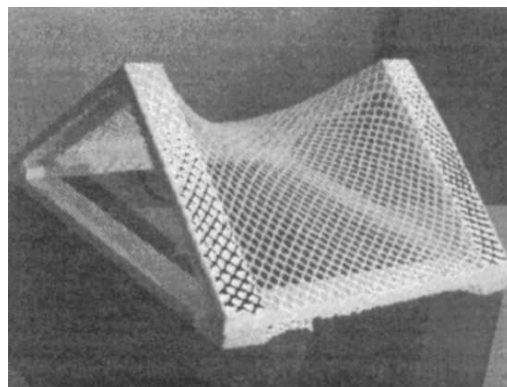
6.2 Eksperimentalno određivanje oblika minimalnih mreža

Važan način određivanja oblika minimalnih mreža, koji se ne smije izostaviti u malo važnijem proračunu, jest svakako preko fizikalnog modela. Danas je to opće prihvaćen

način kontroliranja rezultata dobivenih numeričkim metodama. Odabir vrste modela i tehnologije njegove izrade, te odabir mjernog postupka moraju zadovoljiti niz uvjeta. Osnovno je da izrada modela mora biti jednostavna, od lako dostupnog materijala i u cjelini ekonomična. Metoda izrade modela, kao i postupak mjerenja, mora osigurati da rezultati dovoljno točno aproksimiraju oblik za numeričku analizu. Proces mora biti što automatiziraniji, a da pritom bude osigurana kompatibilnost podataka pri razmjeni u raznim etapama postupka. Kod svih modela je neophodno da bude osigurana geometrijska sličnost, a ukoliko se na njima provode mehanička ispitivanja oni moraju biti izrađeni u skladu s pravilima modelske sličnosti. Kako se u procesu pronalaženja oblika ne promatra vanjsko opterećenje, preostaju samo sile prednapinjanja, čiji međusobni omjeri unutar modela moraju odgovarati projektiranima. Nama je važno da rezultat bude minimalna mreža, pa u skladu s tim sile prednapinjanja moraju biti jednake, a modeli takvi da osiguravaju njihovu jednoličnu raspodjelu po elementima. Ovdje će biti prikazana dva jednostavna modela.



Slika 52: Model 1



Slika 53: Model 2

Model 1 (sl. 52) najbliži je stvarnoj konstrukciji, te odražava fizikalno načelo minimalne mreže. Prema projektiranom rasteru, na okvir su slobodno ovješene niti konca, na krajevima opterećene utezima jednake težine. U idealnim uvjetima takvo bi stanje nužno trebalo dovesti do oblika minimalne mreže, uz pretpostavku da niti mogu slobodno međusobno klizati bez trenja. *Model 2* (sl. 53) izrađen je napinjanjem elastične mrežaste tkanine preko okvira. Time se izravno ne simulira minimalna mreža, oblik koji se dobiva zapravo je gusto diskretizirana ploha. Vizualnom kontrolom ujednačenosti veličine okana nastojalo se uvesti jednoliko prednaprezanje i ostvariti oblik jednakih vrijednosti unutarnjih sila. Takvo stanje odgovara minimalnoj plohi. Iako različitoga fizikalnog karaktera, minimalna ploha u većini slučajeva dobro aproksimira minimalnu mrežu. S obzirom na to da je izrada modela od elastične tkanine mnogo jednostavnija od končastih, ta vrsta modela bolje odgovara osnovnim pretpostavkama. Mjerni postupak je jednako važan kao i odabir samog modela. Osnovna je pretpostavka da mjerni postupak bude jednostavan za rukovanje i brz, te da rezultate daje u digitaliziranom obliku pogodnom za daljnju obradu. Te pretpostavke upućuju na optičku, nekontaktnu metodu, s digitalnim procesom snimanja trodimenzionalnih karakteristika objekta. [11, str. 89-90]

Zaključak

U ovom radu prikazali smo neka važna svojstva ploha uz matematičko analitički i geometrijski pristup, kao i mogućnost njihove praktične primjene u građevinarstvu.

Kroz veliki broj primjera nastojali smo olakšati razumijevanje i stvoriti ilustrativnu predodžbu izloženog sadržaja. Iako današnjim brzim razvojem tehnike i računarstva u građevinsko-projektantskoj praksi nove numeričke metode u velikoj mjeri potiskuju pomalo zastarjele analitičke metode, svakako treba istaknuti da teorijska matematička osnova ima veliku važnost. Poznavanje obrađene tematike inženjerima neosporno može biti od velike koristi, doprinijeti njihovom boljem razumijevanje vlastite struke i omogućiti uspješnije stvaranje građevina.

Naravno, željeli smo pobuditi interes čitatelja za ovu temu i potaknuti ga na daljnje samostalno otkrivanje. Zbog toga smo na priloženom CD-u naveli linkove na stranice za koje mislimo da donose brojne kvalitetne informacije za potrebe u primjeni.

Bibliografija

- [1] Beban-Brkić J., 2003, *Matematika IV - Diferencijalna geometrija*, web skripta (www.grad.hr/itproject_math/Links/jelena/index.html)
- [2] Benić V., Gorjanc S., 2003, "O informatizaciji nastave geometrije na Građevinskom fakultetu u Zagrebu", Zbornik radova 1. simpozija Računalstvo u graditeljstvu, Zagreb, pp.277-283
- [3] Benić V., Gorjanc S., 2004, "Visualisations of Gaussian and Mean Curvatures by Using *Mathematica* and *webMathematica*", Proc. of 6th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary
- [4] Berger H., 1996, *Light Structures - Structures of Light*. Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin
- [5] Dierks L., Irwin D., Powers M, 1995, *Tipis & Yurts: authentic designs circular shelters / Blue Evening Star*. Lark Books, Ashewille, North Carolina, USA
- [6] Dvornik J., Lazarević D., 1997, "Viseće konstrukcije od platna i užadi", Građevni godišnjak '97, HDGI, Zagreb, pp.239-297
- [7] Filipan S., Gorjanc S., Kvasnička H., 2000, "Natkrivanje paraboličkim konoidom", KoG, No. 5, pp. 57-64.
- [8] Gorjanc S., 2003, *Pravčaste plohe*, web skripta (www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/pravcaste/pravcaste.html)
- [9] Goetz A., 1970, *Introduction to Differential Geometry*. Addison–Wesley, Reading, Massachusetts
- [10] Gray A., 1998, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, Boca Raton
- [11] Jecić Z., 1997, "Oblikovanje visećih konstrukcija pomoću modela", Prostor, Vol. 5, No.1(13) pp. 84-94.
- [12] Kučinić B., Kristoforović O., Saler I., 1992, *Oble forme u graditeljstvu*, Građevinar, Zagreb
- [13] Marković Ž., 1952, *Uvod u višu analizu*, II dio, Školska knjiga, Zagreb

- [14] Mihailović D., 1960, *Elementi vektorske analize, diferencijalne geometrije i teorije polja*,
Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd
- [15] Suljagić S., 2000, *Matematika II*, web skripta
(www.grad.hr/nastava/matematika/mat2)
- [16] Wolfram S., 1993, *Mathematica - Second Edition*, Addison–Wesley
- [17] Wolfram S., 2004, *MathWorld*, web enciklopedija
(<http://mathworld.wolfram.com/>)

Sažetak

U prvom poglavlju navedena su osnovna svojstva visećih konstrukcija i neki specifični problemi prilikom njihovog projektiranja. Pregled fotografija odabranih primjera takvih konstrukcija nalazi se na CD-u koji je prilog radu.

U drugom i trećem poglavlju, metodama analitičke i diferencijalne geometrije, uz korištenje programskog paketa *Mathematica*, obrađeni su sljedeći pojmovi: parametrizacija plohe, tangencijalna ravnina i normala, prva i druga osnovna diferencijalna forma plohe, normalna zakrivljenost, glavni i asimptotski smjerovi te funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti s posebnim naglaskom na pravčaste plohe.

U četvrtom su poglavlju, za jedanaest primjera ploha, dane vizualizacije funkcija Gaussove i srednje zakrivljenosti. Također je dan i prikaz programa, pisanog u jeziku *Mathematica*, pomoću kojega su te vizualizacije dobivene. Program je u cijelosti, zajedno s ulaznim podacima za izradu primjera, dostupan na priloženom CD-u.

U petom su poglavlju dane definicije i jedanaest primjera minimalnih ploha. Primjeri su obrađeni na razini parametrizacije, izračunavanja glavnih zakrivljenosti i grafičkih prikaza u *Mathematici*. Datoteka pomoću koje je ta obrada izvršena dostupna na priloženom CD-u.

U šestom je poglavlju dan kratak prikaz numeričkog i eksperimentalnog određivanja oblika minimalnih mreža.

Summary

In the first chapter elementary characteristics of tension structures are mentioned, as well as some specific problems during their design. A survey of photographs for this type of structures is given on the CD, which is enclosed to this paper.

In the second and third chapter, using methods of analytic and differential geometry, with add of the program Mathematica the following terms are worked out: the parametrization of surfaces, the tangent plane and normal vector, the first and second fundamental form, principal and asymptotic directions, as well as the functions of Gaussian and mean curvatures with particular accent on ruled surfaces.

In the fourth chapter, the visualisations of Gaussian and mean curvatures are given for eleven examples of surfaces. There is also given an overview of the Mathematica notebook, which has been used to obtain these visualisations. The program and input data for drawing are accessible on the enclosed CD.

In the fifth chapter there are given definitions, as well as eleven examples of minimal surfaces. These examples are worked out through parametrization, calculation of principal curvatures and graphics in Mathematica. The file used for this treatment is also given on the enclosed CD.

The sixth chapter contains a short description of numerical and experimental form finding of minimal nets.