

## Zadaci s pismenih ispita iz matematike 2 s rješenjima

### MATEMATIKA II

20.3.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \text{Arc cos} \frac{2x-4y}{x^2+y^2} + \ln xy$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $z = \sqrt{2}e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $x^2 + y^2 = 9$  i  $z = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{(1,1)}^{(2,2)} (y \ln y - y + e^x) dx + ((x+y) \ln y + \sqrt{4-y^2}) dy$ .
4. Izračunaj  $\iint_{\Sigma} x^2 dS$ , gdje je  $\Sigma$  plašt stošca  $x^2 + y^2 = 4z^2, 0 \leq z \leq 4$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $2xy dx - (x^2 + y^2) dy = 0$ .

- Rješenja: 1.  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 5, (x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 5, xy > 0\}$
2.  $2\sqrt{2}\pi e^3(2e^3 + 1)$ .
  3.  $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 6\ln 2 + e^2 - e$ .
  4.  $512\sqrt{5}\pi$ .
  5.  $y^2 - x^2 = cy$ .

### MATEMATIKA II

20.3.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \text{Arc sin} \frac{2y-4x}{x^2+y^2} + \ln \frac{x}{y}$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $z = \sqrt{2}e^{3-\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  i  $z = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{(1,1)}^{(2,2)} ((x+y) \ln x + \sqrt{4-x^2}) dx + (x \ln x - x + e^y) dy$ .
4. Izračunaj  $\iint_{\Sigma} y^2 dS$ , gdje je  $\Sigma$  plašt stošca  $x^2 + y^2 = 9z^2, 0 \leq z \leq 2$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(2x-4y) dx + (x+y) dy = 0$ .

- Rješenja: 1.  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 5, (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 5, xy > 0\}$   
 2.  $2\sqrt{2}\pi e(e^2 - 3)$ .  
 3.  $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 6\ln 2 + e^2 - e$ .  
 4.  $108\sqrt{10}\pi$ .  
 5.  $(y-2x)^3 = c(y-x)^2$ .

## MATEMATIKA II

17.4.2004.

1. Nađite one tangencijalne ravnine na plohu  $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ , koje prolaze točkom  $A(1,1,0)$ , a okomite su na ravninu  $x + y + z - 7 = 0$ .
2. Izračunajte  $\iint_D x^2 y^2 \sqrt{(x^2 + y^2)^3 + 1} dx dy$ , gdje je  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} x ds$ , gdje je  $\Gamma$  presječna ploha  $y = 3 - x^2$  i  $y = z$ .
4. Izračunaj tok vektorskog polja  $\vec{a} = \hat{i} + \vec{j} + z^3 \vec{k}$  kroz sferu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $xy' \ln x - 2y = \ln x$ .

- Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots y - z - 1 = 0, \pi_2 \dots 4x - y - 3z - 3 = 0$ .  
 2.  $\frac{13\pi}{108} + \frac{13\sqrt{3}}{288}$ .  
 3.  $\frac{31}{6}$ .  
 4.  $\frac{4R^5 \pi}{5}$ .  
 5.  $y = c \ln^2 x - \ln x$ .

## MATEMATIKA II

22.5.2004.

1. Ispitajte ekstreme funkcije  $f(x, y) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 4xy + 2y^2 - 4x - 4y + 1$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ,  $y = x$  i  $y = \sqrt{3}x$ , koje se nalazi u prvom oktantu.
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} x^4 ds$ , gdje je  $\Gamma$  kružnica  $x^2 + y^2 = 2y$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} z dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio rotacionog paraboloida  $z = 1 - x^2 - y^2$ , koji se nalazi iznad ravnine  $z = 0$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(2xy + \ln x)dx + (x^2 - ye^y)dy = 0$ .

Rješenja: 1. Stacionarne točke su  $A(1,0), B(0,1)$ . U točki A funkcija ima lokalni minimum, dok u točki B nema ekstrem.

2.  $V = \frac{\pi}{144}(8\sqrt{2} - 7)$ .

3.  $\frac{3\pi}{4}$ .

4.  $\frac{7\pi}{15}$ .

5.  $x^2 y + x \ln x - x + e^y - ye^y = c$ .

## MATEMATIKA II

17.6.2004.

1. Na krivulji  $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$  odredite točke za koje je kvadrat udaljenosti od ishodišta najveći.
2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom  $x^2 + y^2 = 3x$  i kardiodom  $r = 1 + \cos \varphi$  koji se nalzi unutar prve, a izvan druge krivulje.
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} \arctg x dx + x^3 y dy$ , gdje je  $\hat{\Gamma}$  dio parabole  $x = y^2$  od točke  $A(1,1)$  do  $B(0,0)$ .
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = x^2 \vec{i} - 2xy \vec{j} + 3z \vec{k}$  kroz zatvorenu plohu  $z = 2 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ , orijentiranu u smjeru vanjskih normala.
5. Riješite diferencijalnu jednadžbu  $y'' - 2y' = x^2 e^x + 3$ .

Rješenja: 1.  $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

2.  $\pi$ .

3.  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{8} - \frac{\pi}{4}$ .

4.  $\frac{5\pi}{2}$ .

5.  $y = c_1 + c_2 e^{2x} - (x^2 + 2)e^x - \frac{3}{2}x$ .

## MATEMATIKA II

17.6.2004.

1. Na krivulji  $4x^2 + 6xy + 4y^2 = 14$  odredite točke za koje je kvadrat udaljenosti od ishodišta najveći.
2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom  $x^2 + y^2 = 6x$  i kardiodom  $r = 2(1 + \cos \varphi)$  koji se nalzi unutar prve, a izvan druge krivulje.
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} xy dx + \arctg y dy$ , gdje je  $\hat{\Gamma}$  dio parabole  $y = x^2$  od točke  $A(1,1)$  do  $B(0,0)$ .
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = 2xz \vec{i} - 2yz \vec{j} + z^2 \vec{k}$  kroz zatvorenu plohu  $z = 6 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ , orijentiranu u smjeru vanjskih normala.
5. Riješite diferencijalnu jednadžbu  $y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^x + 1$ .

- Rješenja: 1.  $A(\sqrt{7}, -\sqrt{7}), B(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ .
2.  $4\pi$ .
3.  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}$ .
4.  $\frac{64\pi}{3}$ .
5.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x\right)e^x - \frac{1}{3}$ .

## MATEMATIKA II

8.7.2004.

1. Nađite tangencijalne ravnine na plohu  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - 8 = 0$  koje su paralelne s ravninom  $x - 2y - 2z + 11 = 0$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  i  $z = x^2 + y^2$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} (x+y)^2 dx - x^2 dy$ , gdje je  $\hat{\Gamma}$  dio sinusoide  $y = \sin x$  od točke  $A(0,0)$  do  $B(\pi,0)$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} (z^2 + 1) dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  u prvom oktantu.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $yy' y'' = y'^3 + y'^2$ .

- Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots x - 2y - 2z - 8 = 0, \pi_2 \dots x - 2y - 2z + 8 = 0$ .
2.  $\frac{2\pi}{3} (6\sqrt{6} - 11)$ .
3.  $\frac{\pi^3}{3} + \frac{9\pi}{2}$ .
4.  $\frac{56\pi}{3}$ .
5.  $y = (y + c_1) e^{c_1 x + c_2}$ .

## MATEMATIKA II

8.7.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu, te ispitajte ekstreme funkcije  $f(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  i  $z = x^2 + y^2$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} (x+y)^2 dx + (x^2+1)dy$ , gdje je  $\Gamma$  dio krivulje  $y = \cos x$  od točke  $A(0,1)$  do  $B(\pi, -1)$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} (z^2 + 2)dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  u prvom oktantu.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $xy'' = y' + y' \ln \frac{y'}{x}$ .

Rješenja: 1.  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, y \geq -1\}$  Stacionarna točka funkcije je  $A\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ , no u toj točki funkcija nema ekstrem.

2.  $\frac{\pi}{6}$ .

3.  $\frac{\pi^3}{3} + \pi^2 + \frac{\pi}{2} - 2$ .

4.  $\frac{14\pi}{3}$ .

5.  $c_1^2 y = c_1 x e^{c_1 x} - e^{c_1 x} + c_2$ .

## MATEMATIKA II

2.9.2004.

1. Nađite tangencijalne ravnine na plohu  $z = 2xy$  koje prolaze točkom  $A(1,0,-4)$ , a okomite su na ravninu  $x = y$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $y = 2x^2$ ,  $y + z = 8$  i  $z = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} x \cos y ds$ , gdje je  $\Gamma$  rub kvadrata  $|x| + |y| = 1$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} (\sqrt{1-z^2} - z)dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio plohe  $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(y^2 - 6xy)dx + 3x^2 dy = 0$ .

Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots 2x + 2y + z + 2 = 0, \pi_2 \dots 4x + 4y - z - 8 = 0.$

2.  $V = \frac{1024}{15}.$

3. 0.

4. 0.

5.  $y = cx^2(y + 6x).$

## MATEMATIKA II

2.9.2004.

1. Nađite tangencijalne ravnine na plohu  $z = 3xy$  koje prolaze točkom  $A(0,0,9)$ , a okomite su na ravninu  $x + y + 6z - 5 = 0.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $x = 5x^2, x + z = 5$  i  $z = 0.$

3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} x \sin y ds,$  gdje je  $\Gamma$  rub kvadrata  $|x| + |y| = 2.$

4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} \frac{\sqrt{1-z^2}}{3+z^2} dS,$  gdje je  $\Sigma$  dio plohe  $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1.$

5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $xy' = y + \frac{x^2}{y} \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$

Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots 3x - 9y + z - 9 = 0, \pi_2 \dots 9x - 3y - z + 9 = 0.$

2.  $V = \frac{40}{3}.$

3. 0.

4.  $2\sqrt{2}\pi(\ln 3 - 1).$

5.  $e^{-\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} = cx.$

## MATEMATIKA II

16.9.2004.

- a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y} \ln(x+y)$ .

b) Nađite tangencijalnu ravninu na plohu  $z = \sqrt{1-x^2-y} \ln(x+y)$  u točki  $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdot\right)$ .
- Izračunajte  $\iint_D y^2 \sin x dx dy$ , gdje je  $D$  područje u ravnini, ograničeno krivuljama  $y = 2 \cos x - 1$ ,  $y = 0$  i  $x = 0$  u prvom kvadrantu.
- Izračunajte krivuljni integral  $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,\pi)} (z \cos zx - y \sin x) dx + \cos x dy + x \cos x dz$ .
- Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = \vec{i} - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \vec{j}$  kroz zatvorenu plohu (orijentiranu u smjeru vanjskih normala) koju čini dio plohe  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  u prvom oktantu, zajedno s ravninama  $x = 0$ ,  $y = 0$  i  $z = 1$ .
- Riješite diferencijalnu jednačinu  $y'' \cos x + y' \sin x = 1$ , uz uvjete  $y(0) = 0$  i  $y'(0) = 1$ .

Rješenja: 1. a)  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0, y \leq 1 - x^2\}$

b)  $\pi \dots x + y - 2z - 1 = 0$ .

2.  $\frac{1}{24}$ .

3.  $2 \cos 1$ .

4.  $2 - 2 \cos 1 - \sin 1$ .

5.  $y = 1 + \sin x - \cos x$ .

## MATEMATIKA II

16.9.2004.

- a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \sqrt{2+x-y^2} \ln(x+y)$ .

b) Nađite tangencijalnu ravninu na plohu  $z = \sqrt{2+x-y^2} \ln(x+y)$  u točki  $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdot\right)$ .
- Izračunajte  $\iint_D y^2 \cos x dx dy$ , gdje je  $D$  područje u ravnini, ograničeno krivuljama  $y = 1 + \sin x$ ,  $y = 0$  i  $x = 0$  u prvom kvadrantu.
- Izračunajte krivuljni integral  $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,\pi)} \cos y dx + (z \cos yz - x \sin y) dy + y \cos yz dz$ .
- Izračunaj tok vektorskog polja  $\vec{a} = \sin \sqrt{x^2 + y^2} \vec{i} - 3\vec{k}$  kroz zatvorenu plohu (orijentiranu u smjeru vanjskih normala) koju čini dio plohe  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  u prvom oktantu, zajedno s ravninama  $x = 0$ ,  $y = 0$  i  $z = 1$ .
- Riješite diferencijalnu jednadžbu  $y'' \sin x - y' \cos x = 1$ , uz uvjete  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  i  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

Rješenja: 1. a)  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0, x \geq y^2 - 2\}$   
b)  $\pi \dots 3x + 3y - 2z - 3 = 0$ .

2.  $-\frac{1}{12}$ .

3.  $\cos 1$ .

4.  $2 \sin 1 - \cos 1 - 1$ .

5.  $y = 1 - \sin x - \cos x$ .

## MATEMATIKA II

6.11.2004.

1. Odredite maksimum funkcije  $f(x, y) = 7 - 5x + 12y$ , uz uvjet  $x^2 + y^2 = 4$ .
2. Izračunajte volumen tijela koje nastaje presjekom ploha  $x^2 + y^2 = 4$  i  $x^2 + z^2 = 4$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} xy dx + (x^2 + y^3) dy$ , gdje je  $\Gamma$  dio kružnice  $x^2 + y^2 = R^2$  od točke  $A(R, 0)$  do točke  $B(0, R)$ .
4. Izračunajte plošni integral  $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{(1+x+z)^2}$ , gdje je  $\Sigma$  dio ravnine  $x+y+z=1$  u prvom oktantu.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $y'' - 5y' + 6y = x^2 e^{2x} + 1$ .

Rješenja: 1. 33.

2.  $V = \frac{64}{3}$ .

3.  $\frac{R^3}{3} + \frac{R^4}{4}$ .

4.  $\sqrt{3} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$ .

5.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \left( \frac{1}{3} x^3 + x^2 + \frac{1}{3} x \right) e^{2x} + \frac{1}{6}$ .

## MATEMATIKA II

11.12.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \text{Arc cos} \frac{2x-4y}{x^2+y^2} + \ln xy$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $z = \sqrt{2} e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $x^2 + y^2 = 9$  i  $z = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{(1,1)}^{(2,2)} (y \ln y - y + e^x) dx + ((x+y) \ln y + \sqrt{4-y^2}) dy$ .
4. Izračunaj  $\iint_{\Sigma} x^2 dS$ , gdje je  $\Sigma$  plašt stošca  $x^2 + y^2 = 4z^2, 0 \leq z \leq 4$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $2xy dx - (x^2 + y^2) dy = 0$ .

- Rješenja: 1.  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 5, (x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 5, xy > 0\}$   
 2.  $2\sqrt{2}\pi e^3(2e^3 + 1)$   
 3.  $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 6\ln 2 + e^2 - e$   
 4.  $512\sqrt{5}\pi$   
 5.  $y^2 - x^2 = cy$ .

## MATEMATIKA II

11.12.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \text{Arc sin} \frac{2y-4x}{x^2+y^2} + \ln \frac{x}{y}$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $z = \sqrt{2}e^{3-\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  i  $z = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{(1,1)}^{(2,2)} ((x+y)\ln x + \sqrt{4-x^2})dx + (x\ln x - x + e^y)dy$ .
4. Izračunaj  $\iint_{\Sigma} y^2 dS$ , gdje je  $\Sigma$  plašt stošca  $x^2 + y^2 = 9z^2, 0 \leq z \leq 2$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(2x-4y)dx + (x+y)dy = 0$ .

- Rješenja: 1.  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 5, (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 5, xy > 0\}$   
 2.  $2\sqrt{2}\pi e(e^2 - 3)$   
 3.  $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 6\ln 2 + e^2 - e$   
 4.  $108\sqrt{10}\pi$   
 5.  $(y-2x)^3 = c(y-x)^2$ .

## MATEMATIKA II

15.1.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije  $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 3x^2y + y$ .
2. Izračunajte  $\iint_D xy dx dy$ , gdje je  $D$  područje u  $R^2$  omeđeno krivuljom  $y = \ln x$  i pravcima  $x + y = 1$  i  $x = 2$ .
3. Pomoću Greenove formule izračunajte  $\int_{\Gamma} (e^x \sin y - y^2 + x) dx + e^x \cos y dy$ , gdje je  $\Gamma$  dio krivulje  $x^2 + y^2 = 4x$ , koji se nalazi iznad osi  $x$ , od točke  $A(4,0)$  do točke  $B(0,0)$ .
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = (z - x^2)\vec{j} + \sqrt{4 - z}\vec{k}$  kroz plohu  $\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$  orijentiranu tako da vektor normale zatvara oštar kut s vektorom  $\vec{k}$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su  $A\left(0, -\frac{1}{2}\right), B(1,1), C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ . Od toga u točki A funkcija ima lokalni minimum, dok u B i C nema ekstrema.

2.  $\ln^2 2 - \ln 2 + \frac{1}{12}$ .

3.  $\frac{8}{3}$ .

4.  $\frac{16\pi}{3}$ .

5.  $y = c_1 \arctg x + \frac{(\arctg x)^2}{2} + c_2$ .

## MATEMATIKA II

3.2.2005.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu  $z = x^2 + y^2 + xy$  koje prolaze točkom  $A(1,0,-6)$ , a okomite su na ravninu  $x = y$ .
2. Izračunajte površinu oba lika omeđena krivuljom  $x^2 + y^2 = y$  i pravcem  $y = \sqrt{3}x$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} xy ds$ , gdje je  $\Gamma$  presječna ploha  $x = 1 - y^2$  i  $x = z$  u prvom oktantu.
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = x^4 \vec{i} + \vec{j}$  kroz zatvorenu plohu  $\widehat{\Sigma} = \{(x, y, z) \in R^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x, y, 0) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , orijentiranu u smjeru vanjskih normala.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $yy'' = y^2 y' + y'^2$ .

Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots 3x + 3y + z + 3 = 0, \pi_2 \dots 6x + 6y - z - 12 = 0$ .

2.  $P_1 = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}, P_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}$ .

3.  $\frac{19}{120}$ .

4. 0.

5.  $y = (y + c_1)e^{c_1 x + c_2}$ .

## MATEMATIKA II

3.2.2005.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu  $z = x^2 + y^2 - xy$  koje prolaze točkom  $A(0,1,-6)$ , a okomite su na ravninu  $x + y = 15$ .
2. Izračunajte površinu oba lika omeđena krivuljom  $x^2 + y^2 = x$  i pravcem  $y = \sqrt{3}x$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} xy ds$ , gdje je  $\Gamma$  presječna ploha  $y = 1 - x^2$  i  $y = z$  u prvom oktantu.
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = y^4 \vec{j} + \vec{k}$  kroz zatvorenu plohu  $\widehat{\Sigma} = \{(x, y, z) \in R^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x, y, 0) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , orijentiranu u smjeru vanjskih normala.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $yy'' = y^2 y' + y'^2$ .

Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots 3x - 3y - z - 3 = 0, \pi_2 \dots 6x - 6y + z + 12 = 0.$

$$2. P_1 = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16}, P_2 = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

$$3. \frac{19}{120}.$$

$$4. 0.$$

$$5. y = (y + c_1)e^{c_1x + c_2}.$$

## MATEMATIKA II

17.2.2005.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \sqrt{9^{x^2+2xy+y^2} - 3^{36-2x^2+4xy-7y^2}}$  te izračunajte  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

2. Izračunajte volumen manjeg tijela omeđenog plohami  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$  i  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

3. a) Provjerite da je polje  $\vec{a} = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\vec{j} - \frac{xy}{z^2}\vec{k}$  potencijalno.

b) Izračunajte  $\int_{(0,1,1)}^{(2,1,1)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz$ .

4. Pomoću Stokesova teorema izračunajte  $\int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} d\vec{r}$ , ako je  $\vec{a} = 2xz\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ , a  $\hat{\Gamma}$  pozitivno orijentirana krivulja nastala presjekom ravnine  $x + y + 2z = 2$  s koordinatnim ravninama.

5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1$ , uz uvjet  $y(1) = 0$ .

Rješenja: 1.  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \geq 36\}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{9^{x^2+2xy+y^2} (2x+2y) \ln 9 + 3^{36-2x^2+4xy-7y^2} (4x-14y) \ln 3}{2\sqrt{9^{x^2+2xy+y^2} - 3^{36-2x^2+4xy-7y^2}}.$$

$$2. V = \frac{2\pi}{3} (8 - 4\sqrt{2}).$$

$$3. 2.$$

$$4. -\frac{2}{3}.$$

$$5. \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = 0.$$

## MATEMATIKA II

19.3.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije  $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x^2}{y} + y + 1$ .
2. Izračunajte  $\iint_D \sin x dx dy$ , gdje je  $D$  područje u ravnini omeđeno krivuljom  $y = x^2$  i pravcem  $y = x$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} (x+y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$ , gdje je  $\Gamma$  dio krivulje  $y = 2 - |x - 2|$  od točke  $x = 0$  do točke  $x = 4$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} (x+y) dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  u prvom oktantu.
5. Riješite diferencijalnu jednadžbu  $xy' \ln x - 2y = \ln x$ .

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su  $A(2,2), B(-2,-2)$ . Od toga u točki A funkcija ima lokalni minimum, a u točki B lokalni maksimum.

2.  $2 - 2\cos 1 - 3\sin 1$ .

3.  $\frac{80}{3}$ .

4.  $4\pi$ .

5.  $y = c \ln^2 x - \ln x$ .

## MATEMATIKA II

16.4.2005.

1. Ako je  $z = \frac{4x}{\varphi(x-y^2) - x - y^2}$ , pokažite da je  $2x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z + z^2$ .

2. Prelaskom na sferne koordinate izračunajte integral  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho^3 dz$ .

3. Izračunajte krivuljni integral  $\int_{\Gamma} \sqrt{6-4x} ds$  po zatvorenoj krivulji  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , gdje je  $\Gamma_1$  presječna ploha  $x=1-y^2$  i  $y=z$  u prvom oktantu, a  $\Gamma_2$  spojnica točaka  $A(1,0,0)$  i  $B(0,1,1)$ .

4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} xy dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio plohe  $z=2-x^2-y^2$ , omeđen ravninama  $y=0$  i  $y=\sqrt{3}x$ , u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu  $y''+4y = \cos 2x + x^2 e^{2x}$ .

Rješenja: 2.  $\frac{128\pi}{15}$ .

3.  $\frac{10}{3} + 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

4.  $\frac{149}{160}$ .

5.  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x + \left( \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \right) e^{2x}$ .

## MATEMATIKA II

21.5.2005.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu  $x^2 + xy + y^2 + z^2 - 2z = 1$ , koje su paralelne s ravninom  $4x + 5y - 2z + 7 = 0$ .
2. Izračunajte površinu lika omeđenog kardiodom  $r = 2(1 + \sin \varphi)$  i kružnicom  $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ , koji se nalazi unutar obje krivulje.
3. Izračunajte krivuljni integral  $\int_{\Gamma} (x + y) ds$ , gdje je  $\Gamma$  presječna ploha  $y = \frac{x^2}{3}$  i  $z = \frac{2}{9}xy$  od točke  $A(0,0,0)$  do točke  $B(3,3,2)$ .
4. Izračunajte površinu dijela plohe cilindra  $x^2 + z^2 = 1$  u prvom oktantu, koji se nalazi između ravnina  $y = x$  i  $y = 2x$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(xe^x + y - \cos y)dx + (x + x \sin y + \ln y)dy = 0$ .

Rješenja: 1.  $\pi_1 \dots 4x + 5y - 2z - 6 = 0, \pi_2 \dots 4x + 5y - 2z + 10 = 0$ .

2.  $5\pi$ .

3.  $\frac{387}{20}$ .

4.  $P = 1$ .

5.  $xe^x - e^x + xy - x \cos y + y \ln y - yc$ .

## MATEMATIKA II

16.6.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije  $f(x, y) = x^4 - 2x^2y + y^3 - y + 7$ .
2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami  $z = x^2 + y^2$  i  $z = 4y$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} (x + y)^2 dx + (x^2 + y^2) dy$ , gdje je  $\Gamma$  dio krivulje  $y = 1 - |x + 1|$  od točke  $x = -2$  do točke  $x = 0$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} (z^2 + 1) dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  u prvom oktantu.
5. Metodom varijacije konstanti riješite diferencijalnu jednačinu  $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ .

- Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su  $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), C(1,1), D(-1,1)$ . Od toga funkcija ima lokalni minimum u točkama C i D, dok u A i B nema ekstrema.
2.  $8\pi$ .
  3.  $\frac{10}{3}$ .
  4.  $\frac{2\pi}{3}$ .
  5.  $y = (x + c_1)\sin x + (\ln \cos x + c_2)\cos x$ .

## MATEMATIKA II

7.7.2005.

1. a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2-y}$ .  
 b) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu  $z = \sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2-y}$ , u točki  $T(0, -4, \cdot)$ .
2. Izračunajte  $\iint_D \frac{x^2 dx dy}{(x^2 + y^2)^3}$ , gdje je  $D$  područje u ravnini omeđeno krivuljama  $x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 2y, x = 0$  i  $y = x$ .
3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte  $\int_{\hat{\Gamma}} (x^2 + ye^x) dx + (e^x + \ln(x^2 + 1)) dy$ , gdje je  $\hat{\Gamma}$  dio krivulje  $y = x^2$  od točke  $A(-1,1)$  do točke  $B(1,1)$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\Sigma} x^2 dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio plohe  $z = x^2 + y^2$  koji se nalazi unutar sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ .
5. Riješite diferencijalnu jednadžbu  $xy'' - (x+1)y' = e^x$ .

- Rješenja: 1. a)  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1, y \leq x^2\}$   
 b)  $\pi \dots 8x + y + 4z - 8 = 0$ .
2.  $\frac{3}{8} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ .
  3.  $\frac{2}{3} + e - \frac{1}{e}$ .
  4.  $\frac{149\pi}{60}$ .
  5.  $y = c_1 x e^x - c_1 e^x - e^x + c_2$ .

## MATEMATIKA II

7.7.2005.

1. Na krivulji  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$  odredite točke najbliže ishodištu.
2. Izračunajte  $\iiint_V z dx dy dz$ , gdje je  $V$  područje u  $R^3$  omeđeno plohami  $z = x^2 + y^2, z = 1$  i  $z = 4$ .
3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte  $\int_{\hat{\Gamma}} (e^y + \ln(y^2 + 1)) dx + (y^2 + xe^y) dy$ , gdje je  $\hat{\Gamma}$  dio krivulje  $x = y^2$  od točke  $A(1,1)$  do točke  $B(1,-1)$ .
4. Izračunajte  $\iint_{\hat{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$ , gdje je  $\vec{a} = yi + zk$ , a  $\hat{\Sigma}$  dio ravnine  $2x + 2y + z = 2$  u prvom oktantu, orijentiran normalom koja zatvara oštar kut s vektorom  $\vec{k}$ .
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $yy'' + y'^2 = yy'$ .

Rješenja: 1.  $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

2.  $21\pi$ .

3.  $-\frac{2}{3} - e + \frac{1}{e}$ .

4.  $\frac{2}{3}$ .

5.  $\ln(y^2 + c_1) = x + c_2$ .

## MATEMATIKA II

8.9.2005.

1. Ako je  $z(x, y) = xy + \frac{y}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}}$ , pokažite da vrijedi  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ .
2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicama  $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$ ,  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  i pravcem  $y = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} (x + y^3 + z) ds$ , gdje je  $\Gamma$  presječna ploha  $z = x^2 + y^2$  i  $z = 2 - x^2 - y^2$  u prvom oktantu.
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = 6x\vec{i} - y^3\vec{j} + 3y^2z\vec{k}$  kroz zatvorenu plohu koju čini dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  za koji je  $z \geq 1$  zajedno s ravninom  $z = 1$ , orijentiranu u smjeru vanjskih normala.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $2x^2 dy - (y^2 + 4xy) dx = 0$ .

Rješenja: 2.  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

3.  $\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$ .

4.  $10\pi$ .

5.  $y = cx(y + 2x)$ .

## MATEMATIKA II

8.9.2005.

1. Ako je  $z(x, y) = xy + \frac{x}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}}$ , pokažite da vrijedi  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ .
2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicama  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ,  $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$  i pravcem  $x = 0$ .
3. Izračunajte  $\int_{\Gamma} (x^3 + y + z) ds$ , gdje je  $\Gamma$  presječna ploha  $x^2 + y^2 = 4$  i  $z = 6 - x^2 - y^2$  u prvom oktantu.
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = x^2 \vec{i} + 3y \vec{j} - 2xz \vec{k}$  kroz zatvorenu plohu koju čini dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  za koji je  $z \geq 1$  zajedno s ravninom  $z = 1$ , orijentiranu u smjeru vanjskih normala.
5. Riješite diferencijalnu jednačinu  $(6xy + y^2)dx - 3x^2 dy = 0$ .

Rješenja: 2.  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

3.  $2\pi + \frac{44}{3}$ .

4.  $5\pi$ .

5.  $y = cx(y + 3x)$ .

## MATEMATIKA II

22.9.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije  $f(x, y) = x + \frac{y^2}{2x} + \frac{x^2}{y} + \frac{5}{2x}$ .
2. Izračunajte  $\iiint_V (x+y)^2 dx dy dz$ , gdje je  $V$  područje u  $R^3$  koje se nalazi izvan sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , a unutar sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ , te unutar cilindra koji se dobije translacijom presjeka te dvije sfere po osi  $z$ .
3. a) Provjerite da je vektorsko polje  $\vec{a} = (y \ln y - y)\vec{i} + (x + y) \ln y \vec{j}$  potencijano.  
b) Izračunajte  $\int_{(1,1)}^{(2,2)} (y \ln y - y) dx + (x + y) \ln y dy$ .
4. Izračunajte tok vektorskog polja  $\vec{a} = z\vec{k}$  kroz dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  u prvom oktantu, orijentirane normalom koja zatvara oštar kut s vektorom  $\vec{k}$ .
5. Riješite diferencijalnu jednadžbu  $y' + y \cos x = \sin 2x$ .

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su  $A(1,1), B(-1,-1)$ . Od toga u točki A funkcija ima lokalni minimum, a u točki B lokalni maksimum.

2.  $9\pi$ .

3.  $6 \ln 2 - \frac{15}{4}$ .

4.  $\frac{16\pi}{3}$ .

5.  $y = 2 \sin x - 2 + ce^{-\sin x}$ .

## MATEMATIKA II

22.9.2005.

- a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f(x, y) = \text{Arc cos} \frac{x^2 + y^2}{2x - 2y} + \ln(x - y)$ .

b) Izračunajte  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ .
- Izračunajte  $\iiint_V x dx dy dz$ , gdje je  $V$  područje u  $R^3$  omeđeno plohamo  $z = x^2 + y^2$  i  $z = 3y$ .
- a) Provjerite da je vektorsko polje  $\vec{a} = (\arctg x + e^{-y})\vec{i} + (1 - xe^{-y})\vec{j}$  potencijano.

b) Izračunajte  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (\arctg x + e^{-y}) dx + (1 - xe^{-y}) dy$ .
- Izračunajte  $\iint_{\Sigma} xy dS$ , gdje je  $\Sigma$  dio plohe  $y = x^2$  za koji je  $y \leq 1$ , a koji se nalazi između ravnina  $z = 0$  i  $z = 1$ .
- Riješite diferencijalnu jednađbu  $yy'' + y'^2 = y^3$ .

Rješenja: 1. a)  $Df = \{(x, y) \in R^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2, y < x\}$

b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

2. 0.

3.  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 + 1 + \frac{1}{e}$ .

4. 0.

5.  $y + c_1 y^2 = x + c_2$ .