MATEMATIKA 2 - 15.1.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 3x^2y + y$.

Rješenje: Stacionarne točke funkcije su $\left(0, -\frac{1}{2}\right), (1, 1), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.Od toga je točka $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ točka u kojoj funkcija ima lokalni minimum, dok u druge dvije točke funkcija nema ekstrema.

2. Izračunajte $\iint\limits_D xydxdy$, gdje je D područje u R^2 omeđeno krivuljama $y = \ln x$, $x + y = 1$ i $x = 2$.

Rješenje: $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 xdx \int\limits_{1-x}^{\ln x} ydy = \ln^2 2 - \ln 2 + \frac{1}{12}$.

3. Pomoću Greenove formule izračunajte $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \left(e^x \sin y - y^2 + x\right) dx + e^x \cos ydy$, gdje je $\overset{\frown}{\Gamma}$ dio krivulje $x^2 + y^2 = 4x$, koji se nalazi iznad osi x, od točke $A(4, 0)$ do točke $B(0, 0)$.

Rješenje: $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \left(e^x \sin y - y^2 + x\right) dx + e^x \cos ydy = \frac{8}{3}$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\overrightarrow{a} = \left(z - x^2\right) \overrightarrow{j} + \sqrt{4 - z}\,\overrightarrow{k}$ kroz plohu $\overset{\frown}{\Sigma} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\right\}$, orijentiranu tako da vektor normale zatvara oštar kut s vektorom $\overrightarrow{k}$.

Rješenje: Prelaskom na polarne koordinate dobivamo $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r\left(-2r^3 \sin^3 \varphi + \sqrt{4 - r^2}\right) drd\varphi = \frac{16}{3}\pi$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\left(x^2 + 1\right) y'' + 2xy' = \frac{1}{x^2+1}$.

Rješenje: $y = \frac{arctg^2 x}{2} + c_1 arctgx + c_2$.