1. Nađite one tangencijalne ravnine na plohu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$, koje prolaze točkom $A(1,1,0)$, a okomite su na ravninu $x + y + z - 7 = 0$.

Rješenje: Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$, koja prolazi točkom (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{4}$, glasi

$$z - z_0 = \frac{2x_0}{2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{4}(y - y_0).$$

Kada to sredimo, dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $x_0 x + \frac{y_0}{2} y - z - \frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{4} = 0$. Sada u tu jednadžbu uvrstimo točku $A(1,1,0)$. Dobivamo

$$x_0 + \frac{y_0}{2} = \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{4}.$$

Ostaje nam još iskoristiti uvjet okomitosti. Dobivamo $x_0 \cdot 1 + \frac{y_0}{2} \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$, odnosno

$$y_0 = 2 - 2x_0.$$

Rješavajući sad sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobivamo dva rješenja. Prvo nam $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ daje tangencijalnu ravninu $\Pi_1 ... y - z - 1 = 0$. Dok nam drugo rješenje našeg sustava $x_0 = \frac{4}{3}$, $y_0 = -\frac{2}{3}$ daje drugu tangencijalnu ravninu $\Pi_2 ... \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y - z - 1 = 0$.

2. Izračunajte $\int\int_D x^2 y^2 \sqrt{(x^2+y^2)^3 + 1}\, dxdy$, gdje je

$$D = \left\{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}.$$

Rješenje: Ako naš integral označimo sa I i prijeđemo na polarne koordinate, dobivamo da je $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^5 \sqrt{r^6 + 1} dr$. Prvi integral je lako riješiti jer je $\cos^2\varphi \sin^2\varphi = \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} = \frac{1}{8} - \frac{\cos 4\varphi}{8}$. Tada dobivamo da je

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{1}{32}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin 0\right) = \frac{1}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{64}.$$

Za drugi integral koristimo supstituciju $r^6 + 1 = t$, jer je tada $6r^5 dr = dt$. Tada za drugi integral dobivamo

$$\int_0^{\sqrt{2}} r^5 \sqrt{r^6 + 1} dr = \frac{1}{6} \int_1^9 \sqrt{t} dt = \frac{1}{6} \bullet \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 1\sqrt{1}\right) = \frac{1}{9} \cdot (27 - 1) = \frac{26}{9}.$$

I sada dobivamo konačno rješenje $I = \frac{13}{108}\pi + \frac{13\sqrt{3}}{288}$.

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma} xds$, gdje je Γ krivulja presječnica ploha $y = 3 - x^2$ i $y = z$ u prvom oktantu.

Rješenje: Za Γ možemo izabrati parametrizaciju

$$x(t) = \sqrt{3-t},\ y(t) = t,\ z(t) = t,\ t \in [0,3].$$

Sada nam trebaju derivacije $x'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$, $y'(t) = z'(t) = 1$. Tada ako naš integral označimo s I, dobivamo

$$I = \int\limits_0^3 \sqrt{3-t} \cdot \sqrt{\frac{1}{4(3-t)} + 1 + 1}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \sqrt{25-8t}dt.$$

To dalje rješavamo supstitucijom $25-8t = u^2$, jer je tada $-8dt = 2udu$, odnosno za integral dobivamo $I = -\frac{1}{8}\int\limits_5^1 u^2 du = \frac{1}{8}\left(\frac{125-1}{3}\right) = \frac{31}{6}$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + z^3\overrightarrow{k}$, kroz sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Rješenje: Primjenom Teorema o divergenciji dobivamo da nam je tok jednak $\Phi = \int\int\int\limits_S 3z^2 dxdydz$, gdje je

$$S = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}.$$

Prijelazom na sferne koordinate dobivamo

$$\Phi = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \int\limits_0^R r^4 dr = 6\pi \cdot \frac{-\cos^3\pi + \cos^3 0}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4R^5\pi}{5}.$$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy'\ln x - 2y = \ln x$.

Rješenje: Ovo je linearna jednadžba pa riješimo prvo pripadnu homogenu jednadžbu $xy'\ln x - 2y = 0$. Ovo je jednadžba sa separiranim varijablama pa imamo $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x\ln x}$.Kad integriramo obje strane dobivamo $\ln y = 2\ln\ln x + \ln c$, odnosno $y = c\ln^2 x$.Sada riješimo našu jednadžbu varijacijom konstante. Označimo $y(x) = c(x)\ln^2 x$. Kad to uvrstimo u početnu jednadžbu dobivamo $c'(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$, odnosno kad integriramo $c(x) = -\frac{1}{\ln x} + d$. Znači rješenje naše jednadžbe je $y = d\ln^2 x - \ln x$.