

MATEMATIKA 3 - 15.12.2004.

1. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Gauss-Jordanovom metodom nađite A^{-1} .

b) Izračunajte AA^{-1} .

Rješenje: a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Zadan je funkcional $\Phi[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx$ s uvjetima $y(1) = 1, y(2) = \frac{1}{2}$.

a) Nađite ekstremalu funkcionala.

b) Izračunajte vrijednost funkcionala na toj ekstremali.

Rješenje: a) Ekstremale je funkcija $y(x) = \frac{1}{x}$.

b) $\Phi\left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

3. Metodom separacije varijabli riješite problem provođenja topline kroz homogeni štap duljine $l = 0.3m$. Temperatura na krajevima štapa je $0^\circ C$, a početna distribucija temperature je $u(x, 0) = 0.003 \sin 10\pi x$. Štap je bočno izoliran. Uzmite jednadžbu $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$.

Rješenje: $u(x, t) = 0.003e^{-100\pi^2 t} \sin 10\pi x$.

4. Zadan je problem $y' - y + x = 0, y(0) = 1.5$.

a) Metodom Runge-Kutta nađite približno rješenje u $x = 0.25$, s korakom $h = 0.25$.

b) Nađite točno rješenje problema i usporedite ga s približnim u $x = 0.25$.

Rješenje: a) $y_0 = 1.5, y_1 = 1.892$.

b) Rješenje problema je $y = 1 + x + \frac{1}{2}e^x$. Tada je $y(0.25) = 1.89201$.