

MATEMATIKA 3 - 12.1.2005.

1. Zadan je sustav jednačbi

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

a) Gauss-Seidelovom metodom nađite drugu aproksimaciju rješenja, ako je

početna $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Gaussovom metodom eliminacije nađite točno rješenje.

Rješenje: a) $x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{197}{180} \\ \frac{347}{180} \\ \frac{93}{90} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0944 \\ 1.9278 \\ 1.0444 \end{bmatrix}$.

b) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Zadan je funkcional $\Phi[y(x)] = \int_0^1 (2y'^2 + 12xy) dx$ s uvjetima $y(0) = 0$ i

$y(1) = 1$.

a) Nađite ekstremalu funkcionala.

b) Izračunajte vrijednost funkcionala na toj ekstremali.

Rješenje: a) Ekstremala je funkcija $y(x) = \frac{x^3+x}{2}$.

b) $\Phi\left[\frac{x^3+x}{2}\right] = \frac{28}{5}$.

3. Metodom separacije varijabli riješite problem provođenja topline kroz homogeni štap duljine $l = 1m$. Temperatura na krajevima štapa je $0^\circ C$, a početna distribucija temperature je $u(x, 0) = 0.01 \sin 2\pi x$. Štap je bočno izoliran. Uzmite jednačbu $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0.1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$.

Rješenje: $u(x, t) = 0.01e^{-0.4\pi^2 t} \sin 2\pi x$.

4. Ritzovom metodom riješite problem $((x+1)u'(x))' + x^2 = 0$ na $[0, 1]$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$. Za koordinatne funkcije uzmite $v_1(x) = 2x$, $v_2(x) = 2x^2$, $v_3(x) = 2x^3$.

Rješenje: $u_3(x) = 0.3228x - 0.09788x^2 - 0.04056x^3$.