
MAXWELLOVA JEDNADŽBA

VISOKOSTIJENI NOSAČI

SEMINARSKI RAD

Kolegij:

Primijenjena matematika

Studenti:

Benjamin Medenčević
Ana Šimović

Zagreb, 2011.



SADRŽAJ

1. UVOD

2. MAXWELLOVA JEDNADŽBA

2.1. STANJE RAVNINSKE DEFORMACIJE I RAVNINSKOG NAPREZANJA

2.2. AIRYJEVA FUNKCIJA NAPREZANJA

2.3. AIRYJEVA FUNKCIJA I UVJETI NA KONTURI. LEVYJEVE JEDNADŽBE

2.4. HARMONIJSKE I BIHARMONIJSKE FUNKCIJE



3. VISOKOSTIJNI NOSAČI

3.1. MODEL VISOKOSTIJENOG NOSAČA

3.2. POTENCIJALNA FUNKCIJA I MAXWELLOVA JEDNADŽBA

3.3. KORIŠTENJE IZRAZA ZA KOMPONENTE NAPREZANJA ZA DOBIVANJE IZRAZA ZA KOEFICIJENTE

3.4. ODREĐIVANJE POTREBNIH KOEFICIJENATA

3.5. IZRAŽENA POTENCIJALNA FUNKCIJA

3.6. IZRAŽENE KOMPONENTE NAPREZANJA

3.7. IZVOD IZRAZA ZA NAPREZANJA U „MATHEMATICI“

4. PROGRAM „VINO“

4.1. OPIS PROGRAMA „VINO“

4.2. INPUT PROGRAMA „VINO“



4.3. KOD PROGRAMA „VINO“

5. PRIMJERI VISOKOSTIJENOG NOSAČA

5.1. ZADATAK 1. - VISOKOSTIJENI NOSAČ

5.2. RJEŠENJE ZADATKA 1. - VISOKOSTIJENI NOSAČ - RUČNO

5.3. RJEŠENJE ZADATKA 1. - VISOKOSTIJENI NOSAČ - „VINO“

5.4. ZADATAK 2. - VISOKOSTIJENI NOSAČ

5.5. RJEŠENJE ZADATKA 2. - VISOKOSTIJENI NOSAČ - „VINO“

6. PRILOZI

6.1. IZVOD IZRAZA ZA NAPREZANJA U „MATHEMATICI“

6.2. KOD PROGRAMA „VINO“ - JEZGRA

6.3. PROGRAM „VINO“



6.4. RIJEŠEN ZADATAK 1. VISOKOSTIJENOG NOSAČA U PROGRAMU „VINO“

6.5. RIJEŠEN ZADATAK 2. VISOKOSTIJENOG NOSAČA U PROGRAMU „VINO“

6.6. POWER POINT PREZENTACIJA

7. ZAKLJUČAK

8. LITERATURA



1. UVOD

Pod zidovima i stijenama u konstrukcijama podrazumijevamo tanke pločaste nosive dijelove konstantne debljine čija je srednja ploha postavljena u ravnini a koje su izložene djelovanju opterećenja upravo u toj srednjoj ravnini. Za takve konstrukcije kažemo da su ravninske jer je stanje opterećenja i odgovor konstrukcije definiran u srednjoj ravnini. Zidovi zgrada i sličnih građevina kada ih se promatra u njihovoj ravnini učestali su primjeri ravninskih konstrukcija često velikih površina i složenih uvjeta pridržanja. Osobito su složeni kad imaju otvore u sebi i/ili su dio složenog sustava zidova kao nosivih konstrukcija zgrada.

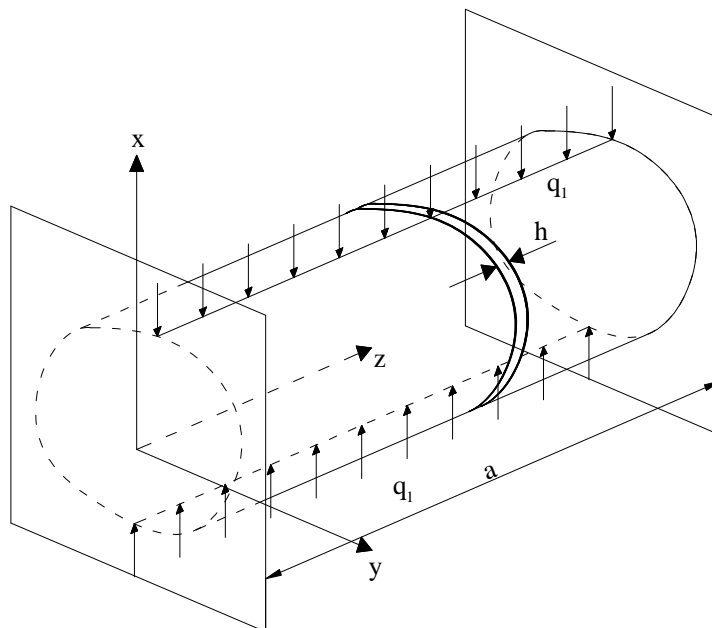
Stijenama smatramo manje i po opterećenjima i rubnim uvjetima jednostavnije ravninske konstrukcije. Poseban slučaj stijena predstavljaju visokostijeni nosači raznih oblika. Analitička i numerička podloga za njihovu statičku analizu utemeljena je u stanju ravninskog naprezanja a ponekada i u stanju ravninskih deformacija.

2. MAXWELLOVA JEDNADŽBA

2.1. STANJE RAVNINSKE DEFORMACIJE I RAVNINSKOG NAPREZANJA

Mnoga elastična tijela se deformiraju tako da se pojavljuju komponente napreznja samo u jednoj ravnini, npr. xy , dok su komponente napreznja u okomitoj ravnini ili u dvije u dvije ostale ravnine jednaki nuli. Takvi problemi se nazivaju općenito **ravninskim problemima** i njihovo rješavanje je jednostavnije od rješavanja prostornih problema, jer broj uvjetnih jednažbi smanjuje i jer u matematici postoje postupci koji se ne mogu primjeniti u prostornim zadacima.

Zamislimo najprije jedno cilindrično ili prizmatično tijelo između dva oslonca na stalnom razmaku a , te da opterećenje q_1, q_2 itd. stalne veličine djeluje duž izvodnica i nalazi se u ravnoteži tako da nema savijanja. Takvo tijelo prikazano je na slici 1.



Slika 1. Cilindrično tijelo između dva oslonca

Ako zamislimo to tijelo razrezano okomito na os z na tanke diskove debljine h , očito je da će se svi diskovi po dužini tog tijela nalaziti u jednakom stanju, tj. za sve će biti:

$$w = 0$$

$$u \neq 0$$

$$v \neq 0$$

gdje su u , v i w pomaci u smjeru x , y i z .

Kažemo da se ovako deformirano elastično tijelo nalazi u **stanju ravninske deformacije**. U tim slučajevima se javljaju deformacije u samo dva smjera, dok je u trećem smjeru deformacija jednaka nuli, stoga možemo reći da su deformacije samo unutar jedne ravnine. Postoje mnoge konstrukcije ili dijelovi konstrukcija koje se deformiraju na ovakav ili sličan način; na primjer dugi tuneli, cijevi ukopane u stijenu, dugi valjci između ravnih ploča, široki svodovi itd.

Ako analiziramo takav način deformiranja, Hookeov zakon daje:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$
$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

Prema tome, pojavljuje se komponenta naprezanja u smjeru z , jer je očito da su σ_x i σ_y različiti od nule. Iz toga proizlazi:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x - \nu^2\sigma_y]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x(1 - \nu^2) - \nu\sigma_y(1 + \nu)] = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_y \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu^2\sigma_x - \nu^2\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y(1 - \nu^2) - \nu\sigma_x(1 + \nu)] = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_x \right]$$

Te dvije jednadžbe mogu se pisati i u ovom obliku:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} [\sigma_x - \nu_1 \cdot \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1} [\sigma_y - \nu_1 \cdot \sigma_x],$$

gdje je

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Modul posmika G_1 ostaje jednak modulu posmika G što se vidi iz slijedećeg:

$$G_1 = \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} = \frac{\frac{E}{1-\nu^2}}{2\left(1+\frac{\nu}{1-\nu}\right)} = \frac{\frac{E}{1-\nu^2}}{2\left(\frac{1-\nu+\nu}{1-\nu}\right)} = \frac{\frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)}}{2 \cdot \frac{1}{(1-\nu)}} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = G = \mu$$

Prema tome, oblik jednadžbi kojima se izražava Hookeov zakon ostaje jednak onome u prostornih problema samo se mijenja veličina elastičnih konstanta kad se deformacije izražavaju naprezanjima.

Dakako da to vrijedi za izotropna tijela.

Promotrimo sada drugu grupu Hookeovih jednadžbi

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \Delta_1$$

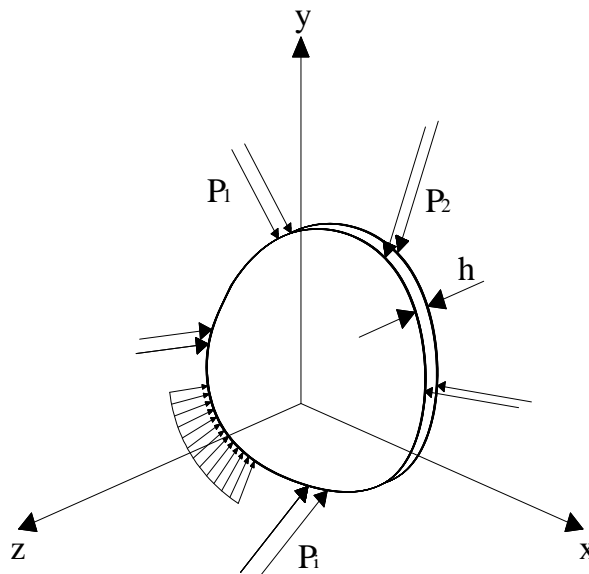
gdje je

$$\Delta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

jer je

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Kako se vidi, Laméove konstante elastičnosti ne mijenjaju se i oblik jednadžbi ostaje jednak onome u prostornih problema. Odsječeni disk koji je bio predmet promatranja može se promotriti na slici 2.



Slika 2. Promatrani isječak (disk)

Drugu vrstu ravninskih problema nalazimo kod ravnih, tankih ploča u kojih opterećenje djeluje u ravnini ploče. Pretpostavlja se da opterećenje djeluje linijski po širini ploče h . Ako se koordinatni sustav x, y, z smjesti tako da ishodište bude u sredini debljine ploče a osi x i y u srednjoj ravnini, onda će pod djelovanjem opterećenja sve tri komponente pomaka u, v, w biti različite od nule. Iznimku čine točke u srednjoj ravnini za koju je zbog simetrije $w = 0$. Kako pomaci u smjeru osi z nisu spriječeni, a u tom smjeru ne djeluje vanjsko opterećenje, očito je na pobočkama ploče za $z = \pm \frac{h}{2}$

$$\sigma_z = 0$$

dok su druga dva smjera naprezanja zavisna od kordinata x, y i z , tj.

$$\sigma_x \neq 0 \qquad \sigma_y \neq 0$$

Ako je debljina ploče mala, može se bez velike pogreške uzeti da veličine σ_x i σ_y ne zavise od koordinate z , već su predstavljene prosječnom veličinom

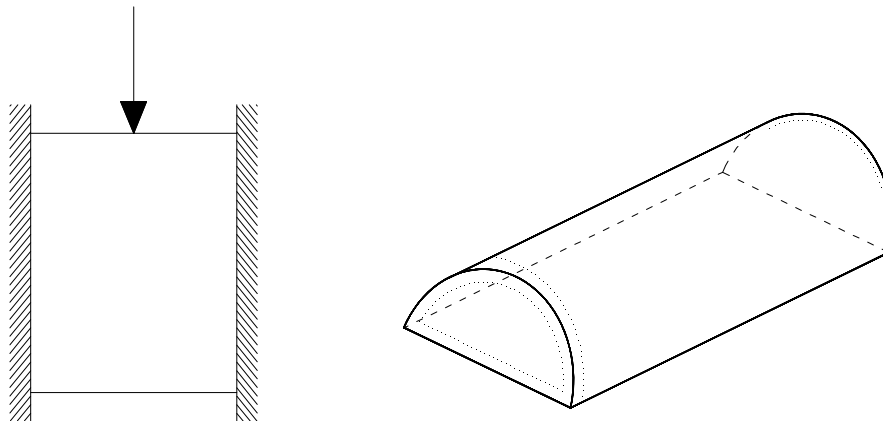
$$\sigma_x = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'_x dh \qquad \text{i} \qquad \sigma_y = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'_y dh$$

te da je i treća komponenta normalnog naprezanja po čitavoj debljini ploče

$$\sigma_z = 0.$$

Takvo stanje naziva se **stanje ravninskog naprezanja**. Analogno stanju ravninskih deformacija, gdje je jedan smjer deformacija bio nula, ovdje su naprezanja u jednom smjeru nula, dok u druga dva smjera imamo naprezanja, stoga i možemo reći da se naprezanja nalaze u jednoj ravnini.

Mnogi dijelovi konstrukcija nalaze se u takvom stanju deformiranja, kao npr. visokostijeni nosači, tzv. dijafragme u prostornih konstrukcija itd. Primjer takvih konstrukcija može se promotriti na slici 3.



Slika 3. Neke konstrukcije sa ravninskim stanjem naprezanja

Hookeove jednadžbe za stanje ravninskog napreznja imaju ovaj oblik:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu}{E} \cdot [\sigma_x + \sigma_y]$$

jer je $\sigma_z = 0$.

Napreznja izražena deformacijama su ovakva:

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_z = 0.$$

Iz posljednje jednadžbe dobije se:

$$\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_z = 0$$

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_z = 0$$

$$\lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \lambda \cdot \varepsilon_z + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (\lambda + 2 \cdot \mu) \cdot \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Prva invarijanta deformacija sad se može izraziti ovako:

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{(\lambda + 2\mu) \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\lambda + 2\mu} =$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1$$

pa je

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x = \lambda \cdot \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x = \frac{2 \cdot \mu \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y = \lambda \cdot \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y = \frac{2\mu \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

to se može pisati i ovako:

$$\sigma_x = \lambda_1 \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda_1 \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

gdje imamo novu konstantu:

$$\lambda_1 = \frac{2\mu \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu}.$$

Kako se vidi, i ovdje jednadžbe kojima se izražava Hookeov zakon po obliku ostaju jednake onima u prostoru, a u nekih se samo mijenjaju veličine elastičnih konstanta. Modul posmika i ovdje ne mijenja svoje veličine.

Ništa do sada nije rečeno o posmičnim komponentama u stanju ravninske deformacije ili ravninskog naprezanja.

Očito je da se u jednom i u drugom slučaju u ravnini xy pojavljuju posmične komponente deformacije a time i posmična naprezanja koja su međusobno vezana odnosom:

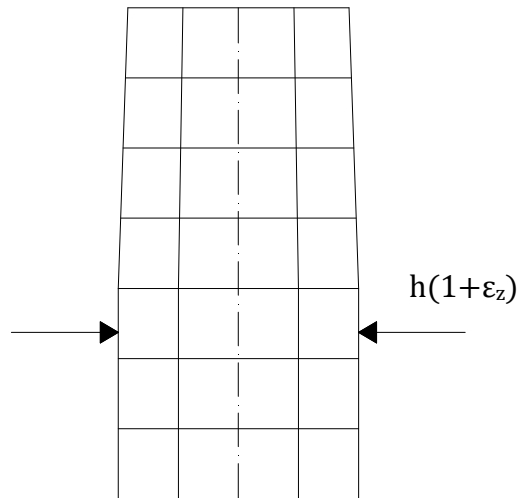
$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}.$$

Lako se može zaključiti da u stanju ravninske deformacije nema posmičnih deformacija u ravnini xz i yz , jer svi pravci unutar prizmatičnog ili cilindričnog tijela paralelni s osi tog tijela ostaju paralelni s osi i nakon deformiranja, budući da se svi diskovi na koje smo zamislili razrezano tijelo deformiraju na jednak način a ravnine prereza ostaju normalne na te pravce.

Drugačije se deformira jedna ploča opterećena jednolično po debljini silama u ravnoteži koje su paralelne s ravninom ploče. Ploča se slobodno deformira u smjeru z , normalnom na ravninu ploče, i relativna je deformacija:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{E} \cdot \Theta_1$$

No prva invarijanta naprezanja Θ_1 od mjesta do mjesta se mijenja pa se mijenja i debljina ploče $h \cdot (1 + \varepsilon_z)$, a zbog toga se pojavljuju posmične deformacije ε_{xz} i ε_{yx} . Ovo se može primjetiti na slici 4.



Slika 4. Promjena debljine ploče

Uz to se pretpostavlja da su deformacije ε_x i ε_y konstantne po debljini ploče h .

Približnu veličinu posmičnih deformacija u stanju ravninskog naprezanja možemo približno odrediti uz neka pojednostavljenja. Pretpostavimo najprije da su na jednemu mjestu ploče deformacije ε_x i ε_y po debljini ploče konstantne. Onda se bez veće pogreške može uzeti da je i deformacija u trećem smjeru z također konstantna, tj. $\varepsilon_z = -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$, a isto tako posmična deformacija ε_{xy} . Uvjeti kontinuiteta

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}$$

u tom slučaju dobivaju ovakav oblik:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$C_1 = \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}$$

Uvrštavanjem te jednakosti u jednadžbu dobije se:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + C_1 \right)$$

No kako ε_z nije funkcija od z zaključujemo da je

$$\frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + C_2 = \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}$$

i isto tako

$$\frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + C_3 = \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}$$

Integriraju li se te dvije jednadžbe, prva po x , druga po y , imamo

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} + C_2 x + d_1$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} + C_3 y + d_2$$

Kako je

$$\varepsilon_{yz} = 0 \quad \text{za} \quad z = 0$$

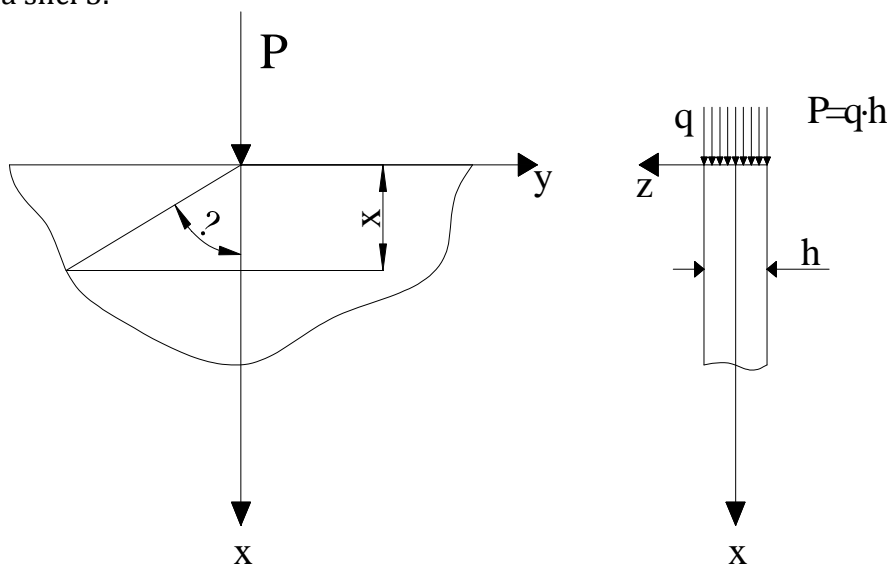
$$\varepsilon_{zx} = 0 \quad \text{za} \quad z = 0,$$

Proizlazi da je

$$C_2 = 0 \quad d_1 = 0$$

$$C_3 = 0 \quad d_2 = 0.$$

Da bi se mogla ocijeniti veličina posmičnih naprezanja τ_{yz} i τ_{zx} koja se pojavljuju zbog opisanih deformacija ε_{yz} i ε_{zx} , usporedit ćemo ta posmična naprezanja s posmičnim naprezanjima τ_{xy} za slučaj kad koncentrirana sila djeluje na rubu poluravnine. Ovo je prikazano na slici 5.



Slika 5. Koncentrirana sila na rubu poluravnine

Za takav način opterećenja ta sekundarna posmična naprezanja razmjerno su veća nego u drugih stanja ravninskog naprezanja. Teorija nam daje jednadžbe

Θ

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi x} \cdot \cos^4 \Theta$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi x} \cdot \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi x} \cdot \sin \Theta \cos^3 \Theta.$$

Zamjenom komponenata deformacija s komponentama naprezanja u jednadžbi dobiva se za $\Theta = 0$

$$\tau_{zx} = -\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{z}{x^2}.$$

Najveće je naprezanje τ_{zx} za $z = \frac{h}{2}$ ili

$$\max \tau_{zx} = 0,032 \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^2 q$$

Ako je jednolično podijeljeno opterećenje $q = \frac{P}{h}$ i Poissonov koeficijent $\nu = 0,25$.

No najveće naprezanje τ_{xy} na udaljenosti x od ruba pod kutom je $\Theta = 30^\circ$ ili

$$\max \tau_{xy} = 0,206 \cdot \left(\frac{h}{x}\right) \cdot q$$

Prema tome, uz sam rub za $h = x$ omjer tih posmičnih naprezanja je oko 6,5 a s povećanjem x posmično naprezanje τ_{zx} znatno se brže smanjuje nego τ_{xy} tako da je već na udaljenosti $x = 10h$ taj omjer oko 65.

Zbog toga i kod stanja ravninskog naprezanja uzima se da je:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Čime se sustav diferencijalnih uvjetnih jednadžbi smanjuje i svodi na jednak broj kao i za stanje ravninske deformacije.

Da ponovimo:

a) kod stanja ravninske deformacije:
komponenta pomaka w ili komponenta deformacije ε_z i posmična komponenta deformacija i naprezanja ε_{yz} , ε_{zx} , τ_{yz} i τ_{zx} jednake su nuli;
sve ostale komponente deformacija i naprezanja različite su od nule i funkcije su samo koordinata x i y .

b) kod stanja ravninskog naprezanja:
u smjeru okomitom na ravninu ploče normalna komponenta naprezanja σ_z jednaka je nuli, a uzima se da su i posmične komponente deformacija i naprezanja ε_{yz} , ε_{zx} , τ_{yz} i τ_{zx} također jednake nuli;

različite su od nule sve ostale komponente deformacija i pomaka.

Jednadžbe koje povezuju komponente deformacija s komponentama naprezanja, i obratno, za stanje ravninske deformacije i ravninskog naprezanja ostaju iste po obliku samo se u nekih koeficijenti elastičnosti mijenjaju.

Laméove jednadžbe:

Sustav jednadžbi ravnoteže koji je prvi izveo Lamé izgleda ovako:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = 0$$

ili ako se prva jednadžba pomnoži sa \vec{i} , druga sa \vec{j} , treća sa \vec{k} i zatim zbroje, dobiju se iste jednadžbe u vektorskom obliku

$$(\lambda + \mu) \text{grad} \Delta + \mu \nabla^2 \vec{p} + \vec{K} = 0,$$

gdje je $\vec{p} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}$ vektor pomaka, $\vec{K} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$ vektor zapreminske sile a $\Delta = \text{div } p$, tako da se jednadžba može pisati i u ovom obliku:

$$\left[(\lambda + \mu) \text{grad div} + \mu \nabla^2 \right] \cdot \vec{p} + \vec{K} = 0$$

Opće diferencijalne jednadžbe Laméa i Michella jednake su za obje vrste ravninskih problema po obliku, a razlikuju se jedino po elastičnim konstantama. No za jednu, vrlo široku, skupinu problema u kojih su zapreminske sile konstantne ili ih uopće nema elastične konstante uopće ne ulaze u diferencijalne jednadžbe pa se rješenja diferencijalnih jednadžbi mogu primjeniti na obje vrste problema i sporedno je od kojeg stanja u tom slučaju u izvodima polazimo.

Da bi to dokazali, primjenjujemo npr. Laméove jednadžbe ravnoteže tako da prvu deriviramo po x, drugu po y i treću po z te sve tri zbrojimo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X \right] = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y \right] = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z \right] = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

zbrojeno daje

$$(\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right] + \mu \nabla^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] = 0$$

$$(\lambda + \mu) \nabla^2 \Delta + \mu \nabla^2 \Delta + \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0.$$

Uzmimo, nadalje, da je zapreminska sila

$$\vec{K} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k} = \text{grad } \varphi,$$

gdje je φ neka skalarna funkcija od x, y, z .

Tada je

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

te

$$\text{div } \vec{K} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi.$$

Uvrstimo li sada to u prethodnu jednadžbu dobit ćemo:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \nabla^2 \varphi = 0$$

a stanje ravninske deformacije je

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Delta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

jer je $\varepsilon_z = 0$, pa se odmah dobije

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

pri čemu je dakako $Z = 0$.

Ista se jednačba može pisati pomoću komponentata naprežanja ako se ima u vidu da je

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z + \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_z + \sigma_z - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y]$$

$$\Delta = \frac{1}{E} \cdot [(1-2\nu) \cdot \sigma_x + (1-2\nu) \cdot \sigma_y + (1-2\nu) \cdot \sigma_z]$$

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

kako je zbog $\varepsilon_z = 0$

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

Dobivamo tada

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot [\sigma_x + \sigma_y + \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot [(1+\nu) \cdot \sigma_x + (1+\nu) \cdot \sigma_y] = \frac{(1-2\nu) \cdot (1+\nu)}{E} \cdot [\sigma_x + \sigma_y]$$

$$\Delta = \frac{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

gdje je

$$\Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

Uvrsti li se posljednji izraz u gore navedenu jednačbu, te uzme u obzir da je

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

dobijemo:

$$\left[\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + 2 \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} \right] \nabla^2 \Delta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\left[\frac{\nu \cdot E + (1-2\nu) \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \nabla^2 \Delta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\left[\frac{(1-\nu) \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \nabla^2 \Delta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\nabla^2 \Delta_1 + \frac{1}{1-\nu} \cdot \nabla^2 \varphi = 0$$

ili

$$\nabla^2 \Delta_1 + \frac{1}{1 - \frac{\nu_1}{1+\nu_1}} \cdot \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla^2 \Delta_1 + \frac{1}{\frac{(1+\nu_1) - \nu_1}{1+\nu_1}} \cdot \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla^2 \Delta_1 + (1+\nu_1) \cdot \nabla^2 \varphi_1 = 0,$$

gdje iz jednadžbe proizlazi $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \Rightarrow \nu_1 - \nu_1 \nu = \nu \Rightarrow \nu(1+\nu_1) = \nu_1 \Rightarrow \nu = \frac{\nu_1}{1+\nu_1}$.

Za stanje ravninskog naprezanja dobijemo na sličan način:

$$\sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_z = 0$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1$$

te

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \nabla^2 \varphi = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 \right) + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \cdot \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \cdot \nabla^2 \Delta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$2\mu \cdot \nabla^2 \Delta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0,$$

Odnosno ista jednadžba izražena komponentama naprezanja, ako se uzme u obzir da je:

$$\Delta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\nu}{E} \cdot \Theta_1$$

tada jednačica izgleda:

$$2 \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \nabla^2 \left(\frac{1-\nu}{E} \cdot \Theta_1 \right) + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{1-\nu}{E} \cdot \nabla^2 \Theta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \nabla^2 \Theta_1 + \nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad / : \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right)$$

$$\nabla^2 \Theta_1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

Kao što se vidi iz gornjih jednačica, razlikuju se samo po konstantama uz pojedine članove.

Ako je skalarna funkcija φ_1 harmonijska funkcija, tj.

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

za oba stanja dobivamo

$$\nabla^2 \Delta_1 = 0$$

$$\nabla^2 \Theta_1 = 0,$$

Drugim riječima: invarijante deformacija i naprezanja u ravninskim problema moraju u tom slučaju biti harmonijske funkcije.

Uvjet $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ zadovoljen je u svim slučajevima kad je zapreminska sila \vec{K} u ravnini xy konstantna ili kad je jednaka nuli, a to i jest najčešće u praksi kod statičkih opterećenja.

Do istih zaključaka možemo, dakako doći i iz Michellovih jednačica ako se, na primjer, tri jednačice zbroje i za razna ravninska stanja uvrste odgovarajući odnosi između invarijante deformacija i naprezanja.

Jedna od gornjih jednačica predstavlja za određeno stanje deformiranja i određen način djelovanja zapreminskih sila samo jednu od tri jednačice potrebne za određivanje triju nepoznatih veličina σ_x , σ_y i τ_{xy} . Ostale su dvije jednačice ravnoteže, tako da bi potpun sustav diferencijalnih jednačica koje treba riješiti bio u slučaju $\nabla^2 \varphi_1 = 0$:

$$\nabla^2 \Theta_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

2.2. AIRYJEVA FUNKCIJA NAPREZANJA

Sustavi diferencijalnih jednačbi rješavaju se obično tako da se ponovljenim diferenciranjem svedu na manji broj diferencijalnih jednačbi viših redova. Tako se dolazi do općih jednačbi kojima su zadovoljene sve jednačbe jednog sustava.

Airy je 1862. došao do jednačbe kojom su zadovoljene tri jednačbe ravnoteže. Sustav od tri diferencijalne jednačbe koje treba zadovoljiti da bi se postigla ravnoteža i odredile veličine σ_x , σ_y i τ_{xy} :

$$\nabla^2 \Theta_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Prema Airyju, jednačbe ravnoteže su zadovoljene ako se pretpostavi da je $X = Y = 0$, te da je

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

odnosno

$$\sigma_y = \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}$$

Za τ_{xy} dobili smo dva izraza koja izjednačena daju novu diferencijalnu jednačbu

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

koja je zadovoljena ako se uzme

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \chi = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

drugim riječima, diferencijalne jednačbe ravnoteže zadovoljene su kad je

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Funkcija ϕ koja povezuje komponente naprezanja naziva se **Airyjevom funkcijom naprezanja**.

Treća diferencijalna jednačba izgleda sada ovako:

$$\nabla^2 \Theta_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

gdje je

$$\Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y$$

ili

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0$$

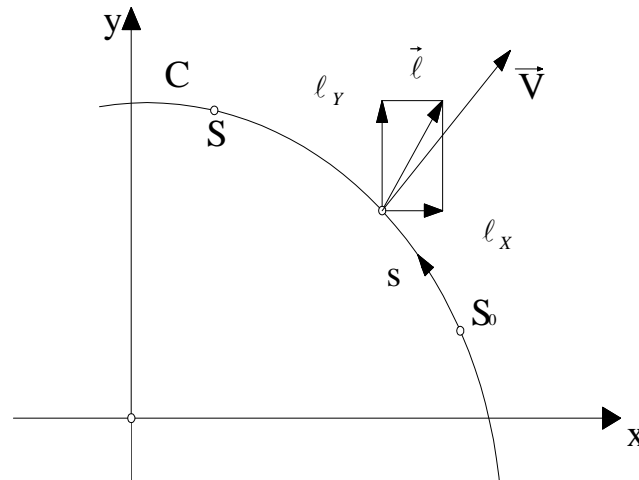
Ta *Maxwellova parcijalna diferencijalna jednačba četvrtog reda* zadovoljava uvjete ravnoteže i neprekinutosti. Funkcije koje zadovoljavaju tu jednačbu nazivaju se biharmonijskim funkcijama; ima ih mnogo i različitih tipova, tako da ima velik broj mogućih rješenja od kojih je, dakako, samo ono ispravno u kojega su zadovoljeni uvjeti na rubovima.

U tome se i u ravninskim problemima ponovno pokazuje poteškoća jer treba istodobno zadovoljiti uvjete na konturi i Maxwellovu diferencijalnu jednačbu u području ograničenom konturom. Uvjeti na konturi mogu biti zadani ili vrijednostima same funkcije ϕ (zadaća *Dirichleta*) ili njezinim derivacijama po raznim smjerovima (zadaća *Neumanna*). Ako su vrijednosti funkcije naprezanja u području ograničenom konturom i na konturi određene tako da su gornji uvjeti ispunjeni, lako se odrede komponente naprezanja u svim točkama područja, zatim i komponente deformacije ili pomaka.

Funkcija naprezanja ima dimenziju sile.

2.3. AIRYJEVA FUNKCIJA I UVJETI NA KONTURI. LEVYJEVE JEDNADŽBE

Rješavanje ravninskih problema mnogo se olakšava ako se uvjeti na konturi izraze pomoću Airyjeve funkcije, jer se u nekim slučajevima i nekim postupcima mogu i izravnim putem jednoznačno odrediti njezine vrijednosti u čitavom području ograničenom konturom.



Slika 6. Promatrana kontura

Krivulja C neka predstavlja dio konture kojom je ograničeno područje u kojem treba odrediti vrijednosti Airyjeve funkcije. Uzmimo najprije da se radi o problemu kod kojeg su uvjeti na konturi dani komponentama napreznjanja (fundamentalni problem I vrste), na primjer normalnim σ_x i tangencijalnim τ_{xy} s obzirom na konturu. Komponente punog napreznjanja dane su izrazima

$$\begin{aligned} \ell_x &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m \\ \ell_y &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{aligned}$$

gdje su sada

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

zatim

$$l = \frac{dy}{ds} = \cos a \quad m = \frac{dx}{ds} = \sin a,$$

tako da prijašnje jednadžbe sada glase:

$$\ell_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\ell_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds}$$

ili

$$\ell_x = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad \ell_y = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

Integriramo li te izraze po dužini luka konture s od neke proizvoljno odabrane točke S_0 , dobije se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_{s_0}^s \ell_x \cdot ds + A \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\int_{s_0}^s \ell_y ds + B$$

Ovdje su konstante A i B vrijednosti koje imaju $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ i $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ u točki S_0 konture. Kako se položaj te točke odabire proizvoljno, trebalo bi poznavati barem u jednoj točki konture te dvije vrijednosti, što je u određenim slučajevima moguće. Kako nas kao rezultat tih analiza zanimaju veličine komponenta napreznja σ_x , σ_y i τ_{xy} , a one su dane kao druge derivacije funkcije napreznja jednadžbama. Očito je da konstante A i B , prema tome i izbor položaja točke S_0 , neće imati utjecaja na te veličine pa se može uzeti

$$A = 0 \qquad B = 0$$

Integrali na desnim stranam jednadžbe predstavljaju, prema tome, zbroj projekcija svih sila koje djeluju na konturi C u smjeru osi x i y i to od točke S_0 do S . Pri tom treba voditi računa o pozitivnom smjeru kretanja po konturi C , koji je u skladu s odnosima:

$$l = \frac{dy}{ds} \qquad m = -\frac{dx}{ds}$$

tj. u smjeru od pozitivnog dijela osi x prema pozitivnom dijelu osi y .

Poznavajući parcijalne derivacije funkcije napreznja na konturi, koje su dane jednadžbama, već se može stvoriti neka predodžba o njezinom karakteru. Ipak bolju predodžbu dobijemo ako se na konturi odrede parcijalne derivacije funkcije napreznja u smjeru normale n i tangente t u točki S što se dobije iz ovih izraza:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = \left(\int_{s_0}^s \ell_y ds \right) \cdot m + \left(\int_{s_0}^s \ell_x ds \right) \cdot l = T(s)$$

gdje su l i m kosinusi kutova što ih zatvara normala na krivulji C u točki S .

Posljednji izraz predstavlja zbroj projekcija svih sila koje djeluju na konturi C od točke S_0 do točke S projiciranih u smjer normale u točki S . Ta veličina odgovara potpuno pojmu poprečne sile T koji je poznat iz teorije linijskih nosača.

Isto je tako

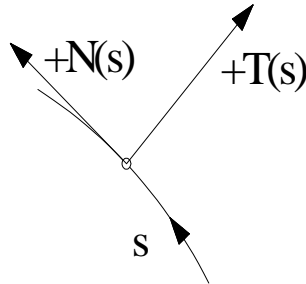
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = -\left(\int_{s_0}^s \ell_y ds \right) \cdot l + \left(\int_{s_0}^s \ell_x ds \right) \cdot m = -N(s)$$

jer je

$$l = \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn} \qquad m = -\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn}$$

Taj izraz predstavlja zbroj projekcija svih sila u smjeru tangente u točki S na krivulji C ili veličinu koja odgovara pojmu uzdužne sile u teoriji linijskih nosača.

Predznaci od $T_{S_0}^S$ i $N_{S_0}^S$ odabrani su u jednadžbama tako da se pozitivni smjerovi tih sila podudaraju s pozitivnim smjerovima tangente i normale na konturi C .



Slika 7. Predznaci normale i tangente

Moguće je odrediti i vrijednost funkcija naprezanja na konturi. Izraz za totalni diferencijal ima ovaj oblik:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot dy = -\left(\int_{S_0}^S \ell_y ds\right) dx + \left(\int_{S_0}^S \ell_x ds\right) dy$$

Integrira li se desna strana parcijalno, dobije se

$$\begin{aligned} \phi &= -x \cdot \left(\int_{S_0}^S \ell_y ds\right) + \int_{S_0}^S x \cdot \ell_y ds + y \cdot \left(\int_{S_0}^S \ell_x ds\right) - \int y \cdot \ell_x ds = \\ &= \int_{S_0}^S [(y_s - y) \cdot \ell_x - (x_s - x) \cdot \ell_y] ds = -M(s) \end{aligned}$$

Ishodište koordinatnog sustava smješteno je u S_0 .

Posljednji izraz u uglatoj zagradi predstavlja moment sila koje djeluju na dijelu konture S_0 do S i to s obzirom na točku S . Taj moment odgovara momentu savijanja u teoriji linijskih nosača, što se vidi i iz ovoga izraza:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = T_{S_0}^S = -\frac{\partial M_s}{\partial t}$$

Time su sve osnovne karakteristike funkcije naprezanja na konturi određene do točnosti konstante.

Prema tome, da se odrede spomenute karakteristike funkcije naprezanja ϕ na konturi dovoljno je zatvorenu konturu C zamisliti prerezanu na povoljno odabranom mjestu S_0 te odrediti $T_{S_0}^S$, $N_{S_0}^S$ i $M_{S_0}^S$. Iz toga se također vidi da funkcija ima značenje

momenta što odgovara onome što je gore rečeno o njezinoj dimenziji jer se sile uzimaju na jedinicu debljine.

2.4. HARMONIJSKE I BIHARMONIJSKE FUNKCIJE

Harmonijske funkcije su one funkcije koje zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu

$\Delta = \nabla^2 f = 0$, gdje je $f = f(x, y, z)$.

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Harmonijske funkcije mogu biti polinomi svih stupnjeva uz određene uvjete, dok su polinomi do isključivo 1.stupnja uvijek harmonijske funkcije. Kod polinoma viših stupnjeva konstante uz pojedine nezavisne varijable moraju stajati u određenim odnosima koji su dani uvjetnim jednadžbama kako bi oni bili harmonijske funkcije, na primjer za polinom trećeg stupnja:

$$f = a_0xyz + a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4y^3 + a_5y^2z + a_6y^2x + a_7z^3 + a_8z^2x + a_9z^2y$$

$$\Delta = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (a_0yz + 3a_1x^2 + 2a_2xy + 2a_3xz + 0 + 0 + a_6y^2 + 0 + a_8z^2 + 0) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 + 6a_1x + 2a_2y + 2a_3z + 0 + 0 = 6a_1x + 2a_2y + 2a_3z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (a_0xz + 0 + a_2x^2 + 0 + 3a_4y^2 + 2a_5yz + 2a_6yx + 0 + 0 + a_9z^2) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 + 0 + 6a_4y + 2a_5z + 2a_6x + 0 = 6a_4y + 2a_5z + 2a_6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (a_0xy + 0 + 0 + a_3x^2 + 0 + a_5y^2 + 0 + 3a_7z^2 + 2a_8zx + 2a_9zy) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 + 0 + 0 + 6a_7z + 2a_8x + 2a_9y = 6a_7z + 2a_8x + 2a_9y$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6a_1x + 2a_2y + 2a_3z + 6a_4y + 2a_5z + 2a_6x + 6a_7z + 2a_8x + 2a_9y$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = 0 = (6a_1 + 2a_6 + 2a_8) \cdot x + (6a_4 + 2a_9 + 2a_2) \cdot y + (6a_7 + 2a_3 + 2a_5) \cdot z$$

Kako su x, y i z nezavisne varijable, gornja jednačba je zadovoljena samo ako su izrazi u zagradi jednaki nuli. U tom slučaju dobivaju se tri dodatna uvjeta iz kojih se određuju tri koeficijenta, dok se veličine ostalih šest koeficijenata biraju po volji. Ili, na primjer sa dvije nezavisne varijable

$$f = a_1x^4 + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4x^2y + a_5x^3 + a_6xy^2$$

$$\Delta = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4a_1x^3 + 2a_2xy^2 + a_3y^3 + 2a_4xy + 3a_5x^2 + a_6y^2) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12a_1x^2 + 2a_2y^2 + 0 + 2a_4y + 6a_5x + 0 = 12a_1x^2 + 2a_2y^2 + 2a_4y + 6a_5x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (0 + 2a_2x^2y + 3a_3xy^2 + a_4x^2 + 0 + 2a_6xy) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_2x^2 + 6a_3xy + 0 + 2a_6x = 2a_2x^2 + 6a_3xy + 0 + 2a_6x$$

$$\Delta = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12a_1x^2 + 2a_2y^2 + 2a_4y + 6a_5x + 2a_2x^2 + 6a_3xy + 0 + 2a_6x = 0$$

$$(12a_1 + 2a_2)x^2 + (6a_5 + 2a_6)x + 2a_2y^2 + 2a_4y + 6a_3xy = 0$$

Dobiju se ove uvjetne jednačbe:

$$6a_1 + a_2 = 0$$

$$3a_5 + a_6 = 0$$

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Prema tome navedeni polinom postaje harmonijska funkcija

$$f = a_5 x^3 - 3a_5 xy^2$$

Filon i *Ribière* nezavisno jedan od drugoga su pokazali da su umnošci trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija harmonijske funkcije.

Ako se odabere ovakav oblik funkcije

$$f = XY,$$

gdje je $X = X(x)$ a $Y = Y(y)$ Laplaceova jednadžba izgleda ovako:

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

Posljednja jednadžba može biti zadovoljena samo ako je

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

gdje je λ neka konstanta jer izrazi $\frac{X''}{X}$ i $\frac{Y''}{Y}$ moraju biti nezavisni pošto je pretpostavljeno da je X samo funkcija od x , a Y funkcija samo od y .

$$X'' + \lambda^2 \cdot X = 0$$

$$k^2 + \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm i\lambda$$

$$X_1 = e^{k_1} = e^{i\lambda x}$$

$$X_2 = e^{k_2} = e^{-i\lambda x}$$

$$X = A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 = A_1 \cdot e^{i\lambda x} + A_2 \cdot e^{-i\lambda x} = A_1 \cdot (\cos \lambda x + i \cdot \sin \lambda x) + A_2 \cdot (\cos(-\lambda x) + i \cdot \sin(-\lambda x))$$

$$X = A_1 \cdot \cos \lambda x + A_1 \cdot i \cdot \sin \lambda x + A_2 \cdot \cos \lambda x - A_2 \cdot i \cdot \sin(-\lambda x) = B_1 \cdot \cos \lambda x + B_2 \cdot i \cdot \sin \lambda x$$

$$Y'' - \lambda^2 \cdot Y = 0$$

$$k^2 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm \lambda$$

$$Y_1 = e^{k_1} = e^{\lambda y}$$

$$Y_2 = e^{k_2} = e^{-\lambda y}$$

$$X = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2 = C_1 \cdot e^{\lambda y} + C_2 \cdot e^{-\lambda y} = D_1 \operatorname{sh} \lambda y + D_2 \operatorname{ch} \lambda y$$

Diferencijalne jednadžbe imaju ova rješenja:

$$X = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} = B_1 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x$$

$$Y = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y} = D_1 \operatorname{sh} \lambda y + D_2 \operatorname{ch} \lambda y$$

Prema tome, funkcije i ovih oblika su harmonijske

$$\sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda y, \quad \cos \lambda x e^{\lambda y}, \quad e^{\lambda x} \sin \lambda y, \quad \text{itd.}$$

I trostruki umnoški eksponencijalnih, trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija mogu biti harmonijske funkcije. Uzmimo ovaj oblik takvog umnoška pa zadovoljimo Laplaceovu jednadžbu

$$f = e^{ax + \beta y + \gamma z}$$

$$\nabla^2 f = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

ili

$$a = \pm i \sqrt{\beta^2 + \gamma^2},$$

tako da su harmonijske funkcije

$$\begin{aligned} & \sin \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cdot x \cdot e^{\gamma z} \cdot e^{\beta y} \\ & e^{\alpha x} \cdot \cos \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} y \cdot \operatorname{sh} y z \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Pokazano je da sve funkcije koje zadovoljavaju Cauchy-Riemanove uvjete zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu, jer ove dvije jednadžbe derivirane po x i po y zatim zbrojene daju (*)

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \nabla^2 f_1 = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \nabla^2 f_2 = 0$$

Tako su, na primjer, u ravnini u, v realni i imaginarni dio funkcije kompleksne varijable harmonijske funkcije. Uzmimo kao primjer:

$$f = \ln z \quad z = x + i y = r \cdot e^{i(\Theta + 2n\pi)}$$

$$f = \ln [r \cdot e^{i(\Theta + 2n\pi)}] = \ln r + i \cdot (\Theta + 2n\pi)$$

Prema tome je $\ln r$ i $(\Theta + 2n\pi)$ harmonijska funkcija; pri tom je

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Isto je tako harmonijska funkcija

$$\ln r^2, \quad \ln \left[(x+c)^2 + y^2 \right] \quad \text{itd.}$$

Biharmonijske funkcije su one funkcije koje zadovoljavaju Maxellovu jednadžbu

$$\Delta^2 = \nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0$$

U prvom redu sve harmonijske funkcije ujedno su i biharmonijske funkcije, ali to ne vrijedi obratno. Nadalje, od harmonijskih funkcija vrlo lako se tvore biharmonijske funkcije ako se množe s nezavisnim varijablama ili sa zbrojem njihovih kvadrata, Lako se dokaže

$$\nabla^2(x\phi) = 2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

ako je $\nabla^2 \phi = 0$.

Isto tako je

$$\nabla^4(x\phi) = \nabla^2 \nabla^2(x\phi) = \nabla^2 \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = 0.$$

Prema tome, ako je ϕ harmonijska funkcija, onda su $x\phi$, $y\phi$ i $z\phi$ biharmonijske funkcije. Isto tako je za

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

te za

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \phi \right) = 3\phi + 2\vec{r} \operatorname{grad} \phi$$

Drugi član je harmonijska funkcija jer je

$$\nabla^2(\vec{r} \operatorname{grad} \phi) = \nabla^2 \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0$$

Prema tome je

$$\nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \phi \right) = 0,$$

što je trebalo i dokazati.

Prema tome je biharmonijska funkcija

$$\phi = \phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3 + r^2\phi_4$$

ako su $\phi_0 \dots \phi_4$ harmonijske funkcije.

Filon-Ribièrovo rješenje prošireno na biharmonijske funkcije izgleda u ravninskim problema ovako:

$$\begin{aligned} X &= X(x) \\ f &= X Y \\ Y &= Y(y) \end{aligned}$$

Maxwellova jednažba može se svesti na ovaj oblik:

$$\frac{X^{IV}}{X} + 2 \frac{X''}{X} \cdot \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{IV}}{Y} = 0$$

Ako se pojedini članovi u posljednjoj jednažbi deriviraju po y , dobije se

$$2 \frac{X''}{X} \cdot \left(\frac{Y''}{Y} \right)' + \left(\frac{Y^{IV}}{Y} \right)' = 0.$$

Da bi se zadovoljila početna pretpostavka, da funkcija X i Y nisu zavisne jedna od druge, rješenja diferencijalne jednažbe za X i Y moraju dati nezavisne funkcije, a to je moguće ako je

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 = \text{konst.}$$

Rješenje te jednažbe je

$$X = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x.$$

Kako je

$$X^{IV} = \lambda^4 \cdot X,$$

Jednažbu možemo pisati i u ovom obliku:

$$Y \cdot \lambda^4 - 2 \cdot \lambda^2 \cdot Y'' + Y^{IV} = 0.$$

Ako se uzme $Y = e^{\ell y}$, dobije se karakteristična jednačina

$$(\lambda^2 - \ell^2)^2 = 0$$

odakle je

$$\ell_{1,2} = +\lambda \qquad \ell_{3,4} = -\lambda,$$

gdje su $\ell_{1,2}$ i $\ell_{3,4}$ dvostruki korijeni za koje su rješenja

$$Y = B_1 \cdot ch\lambda y + B_2 \cdot sh\lambda y + y \cdot B_3 \cdot ch\lambda y + y \cdot B_4 \cdot sh\lambda y.$$

Prema tome, biharmonijske funkcije su i

$$y_0 \cdot \sin \lambda x \cdot ch\lambda y, \qquad r^2 \cdot \sin \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cdot x \cdot e^{\beta y} \cdot ch\gamma z \qquad \text{itd.}$$

Polinomi do uključivo trećeg stupnja uvijek su biharmonijske funkcije, dok su polinomi viših stupnjeva samo onda ako koeficijenti zadovoljavaju uvjetne jednačine koje proizlaze iz Maxwellove jednačine. To je pokazano za harmonijske funkcije.

Funkcija koje zadovoljavaju Laplaceovu ili Maxwellovu jednačinu ima mnogo, tako da bi trebalo očekivati da je lako naći rješenja za razne probleme teorije elastičnosti u prostoru i ravnini. No poteškoće se javljaju pri zadovoljavanju konturnih uvjeta, jer kod problema u praksi obično dolaze složene, nepravilne konture i isto takva opterećenja ili deformacije, pa je razmjerno mali broj problema riješen matematički u zatvorenom obliku.

(*) Analitičke funkcije su jednoznačne kontinuirane funkcije u jednom području kojih su derivacije po promjenljivoj Z u svim smjerovima jednake. Teorija analitičkih funkcija odnosi se većim dijelom na funkcije kompleksne varijable za koju je gornji uvjet ispunjen. Ako je $z = x + i \cdot y$ kompleksna varijabla i $w(z)$ funkcija kompleksne varijable, onda se jednom može derivirati po smjeru x a drugi put po smjeru y , no derivacije moraju biti jednake.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{i \partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

No funkcija w sastoji se također od realnog i imaginarnog dijela

$$w = u + iv$$

tako da je

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{i \partial y} = \frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Ako je w analitička funkcija, onda realni i imaginarni dijelovi na lijevoj i desnoj strani moraju biti jednaki, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

To su *Cauchy-Riemanovi uvjeti* koje analitičke funkcije moraju zadovoljavati. Ako se gornje jednakosti ponovno deriviraju i zbroje, dobijemo jedan put

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \nabla^2 v = 0$$

i drugi put dobiju

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0.$$

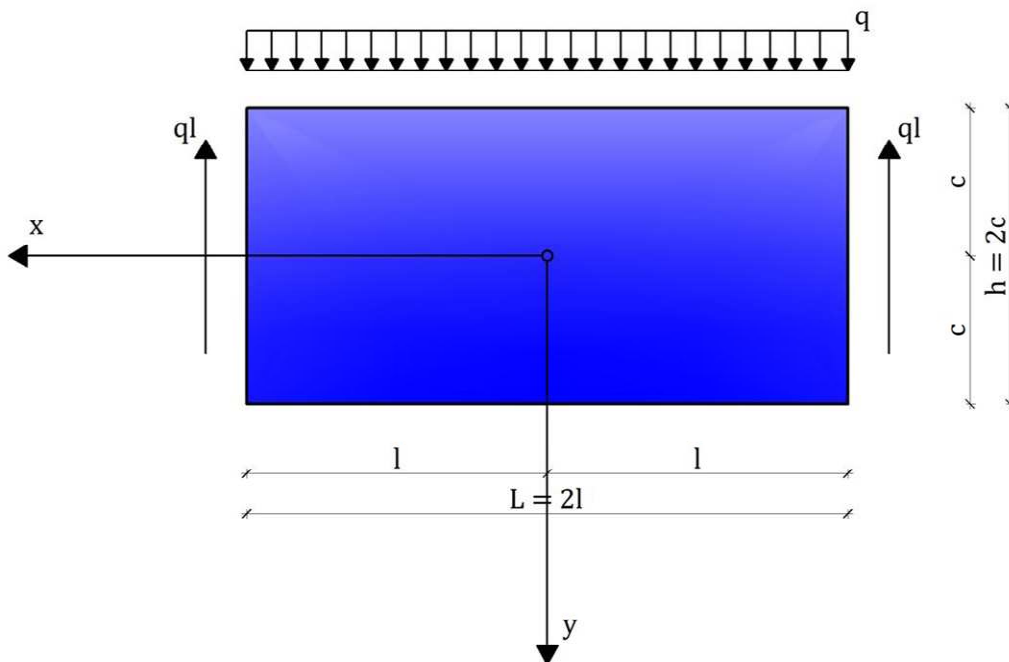
Iz toga proizlazi da je realni i imaginarni dio analitičke funkcije harmonijska funkcija koja zadovoljava Laplaceovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu.

Kako u mnogim problemima teorije elastičnosti treba odrediti oblik nekih funkcija koje zadovoljavaju *Laplaceovu jednačinu*, ili *Poissonovu jednačinu*, ili slične parcijalne jednačine *drugog reda*, homogene ili nehomogene, sigurno je da su analitičke funkcije ili pojedini njihovi dijelovi klasa funkcija koje predstavljaju djelomično ili opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednačine. Konačan izbor funkcija zavisiće, dakako, od konturnih uvjeta. Na tome se zasnivaju neka rješenja problema torzije koja je dao St. Venant.

3. VISOKOSTIJNI NOSAČI

3.1. MODEL VISOKOSTIJENOG NOSAČA

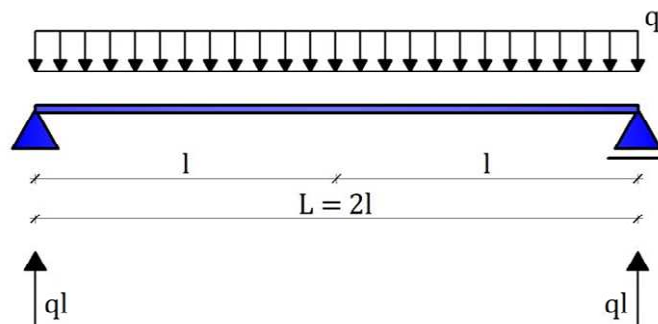
3.1.1. PROMATRANI MODEL VISOKOSTIJENOG NOSAČA



Slika 8. Visokostijeni gredni nosač

Promatra se visokostijeni nosač prikazan na slici 8., odnosno razmjerno uski i visoki nosač na koji djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje u ravnini nosača. Visokostijeni gredni nosač u tekstu se također negdje naziva i visoka greda ili pločasti nosač. Razmatra se problem savijanja takvog nosača kontinuiranim opterećenjem.

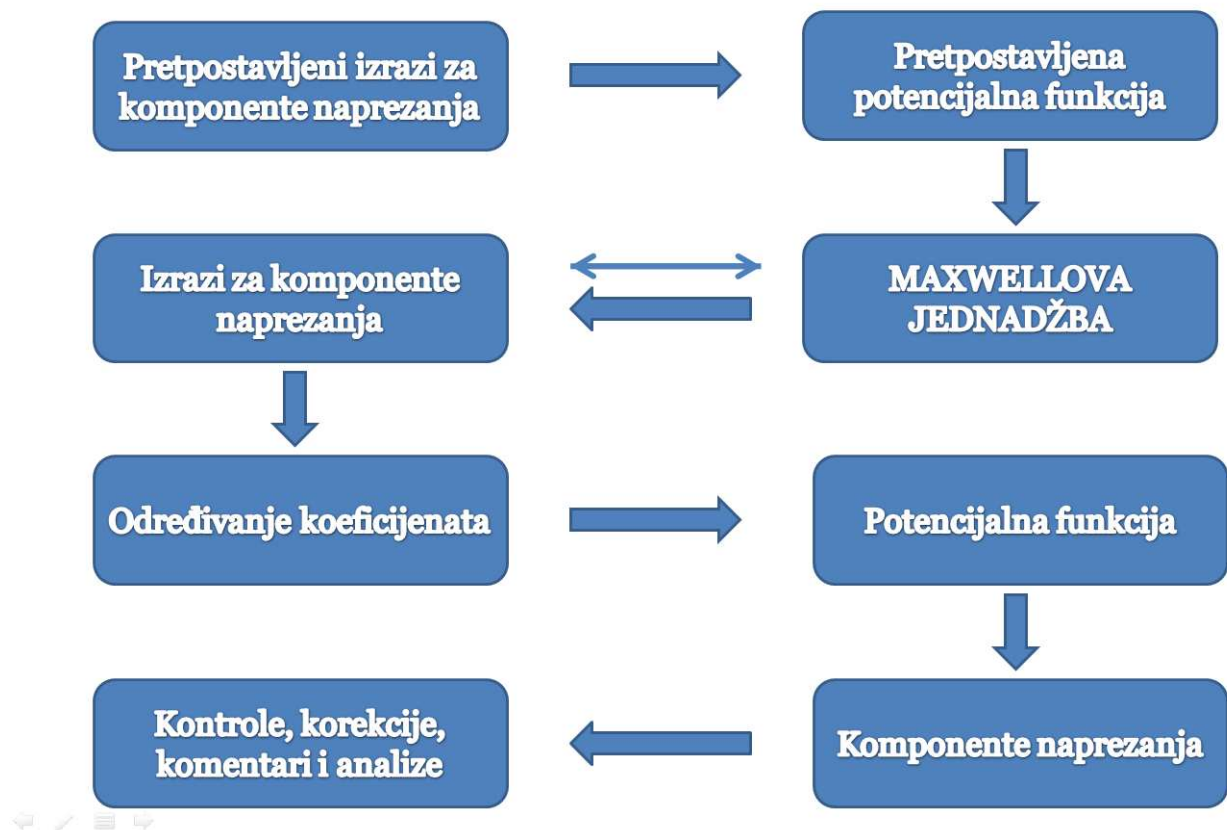
3.1.2. STATIČKI SUSTAV I RUBNI UVJETI



Slika 9. Statički sustav visokostijenog nosača

Rubni uvjeti zadani su raspodijeljenim prihvatom posmičnih napreznaja po visini rubova kao i vertikalnim pomakom u sredini rubnih presjeka jednakim nuli. Drugim riječima, statički sustav visoke grede je jednostavno oslonjeni nosač (prosta greda) što je prikazano na slici 9.

Zadatak se rješava poluobratnim postupkom tako da je odabrana potencijalna funkcija koja zadovoljava rubne uvjete a potom su zadovoljavani ostali uvjeti, odnosno pretpostavlja se određena raspodjela napreznaja za koju su zadovoljeni uvjeti na konturi te provjerava da li su zadovoljene i ostale jednadžbe. Detaljniji postupak proračuna prikazan je shemom na slici 10.



Slika 10. Shema postupka proračuna

3.1.3. IZRAZI ZA KOMPONENTE NAPREZANJA

Pretpostavit ćemo da je, kao i u teoriji pravih štapova, raspodjela normalnih napreznaja u smjeru osi x linearna a raspodjela posmičnih napreznaja parabolična. Kako bismo zadovoljili prethodno navedene rubne uvjete, izrazi za komponente napreznaja moraju imati ovaj oblik:

- normalno napreznaje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = d_1(l^2 - x^2)y$$

- posmično naprezanje:

$$\tau_{xy} = d_2(c^2 - y^2)x$$

- normalno naprezanje u smjeru osi y:

$$\sigma_y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

Također su poznate veličine normalnog naprezanja u smjeru osi y na rubovima koje iznose:

$$\sigma_y(y = +c) = 0$$

$$\sigma_y(y = -c) = -q$$

3.2. POTENCIJALNA FUNKCIJA I MAXWELLOVA JEDNADŽBA

3.2.1. POTENCIJALNA FUNKCIJA

Iz prethodno navedenih izraza za komponente naprezanja vidi se da Airyjeva funkcija za taj problem mora sadržavati članove trećeg i petog stupnja, budući da su članovi u navedenim izrazima prvog i trećeg stupnja, a naprezanja su druge derivacije te funkcije. Dakle, potencijalna funkcija ima oblik:

$$\Phi = a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

3.2.2. MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Zadovoljavajući Maxwellovu jednadžbu

$$\nabla^4\Phi = 0$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} = 0$$

uvrštavajući prethodno određenu Airyjevu funkciju dobivamo:

$$24 \cdot (5a_1x + a_2y + a_3x + a_4y + a_5x + 5a_6y) = 0$$

$$(5a_1 + a_3 + a_5) \cdot x + (a_2 + a_4 + 5a_6) \cdot y = 0$$

te se izjednačavanjem koeficijenata posebno uz x te posebno koeficijenata uz y dobivaju dvije jednadžbe:

$$5a_1 + a_3 + a_5 = 0$$

$$a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$$

3.3. KORIŠTENJE IZRAZA ZA KOMPONENTE NAPREZANJA ZA DOBIVANJE IZRAZA ZA KOEFICIJENTE

Uspoređivanjem članova Maxwellove jednadžbe, tj. korištenjem izraza za naprezanja mogu se uspostaviti odnosi između koeficijenata a i d .

3.3.1. IZRAZ ZA NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI X

Izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x (σ_x):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x$$

uz, naravno, uvrštenje pretpostavljene potencijalne funkcije, daje:

$$2a_3x^3 + 6a_4x^2y + 12a_5xy^2 + 20a_6y^3 + 2a_9x + 6a_{10}y = d_1(l^2 - x^2)y$$

$$2a_3x^3 + 6a_4x^2y + 12a_5xy^2 + 20a_6y^3 + 2a_9x + 6a_{10}y = d_1l^2y - d_1x^2y$$

Budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, koeficijenti s lijeve strane jednadžbe koji nemaju pripadne članove s jednakim kombinacijama umnoška varijabli x i y s desne strane jednadžbe jednaki su nuli. Ti koeficijenti su:

$$a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = 0$$

Dakle, dobivamo:

$$6a_4x^2y + 6a_{10}y = -d_1x^2y + d_1l^2y$$

odnosno, iz toga dvije jednadžbe koje daju izraze za koeficijente:

$$6a_4x^2y = -d_1x^2y \qquad 6a_{10}y = d_1l^2y$$

$$6a_4 = -d_1 \qquad 6a_{10} = d_1l^2$$

$$d_1 = -6a_4 \qquad a_{10} = \frac{l^2}{6}d_1$$

3.3.2. IZRAZ ZA POSMIČNO NAPREZANJE

Izraz za posmično naprezanje (τ_{xy}):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}$$

uz, naravno, uvrštenje pretpostavljene potencijalne funkcije, daje:

$$4a_2x^3 + 6a_3x^2y + 6a_4xy^2 + 4a_5y^3 + 2a_8x + 2a_9y = -d_2(c^2 - y^2)x$$

$$4a_2x^3 + 6a_3x^2y + 6a_4xy^2 + 4a_5y^3 + 2a_8x + 2a_9y = d_2xy^2 - d_2c^2x$$

Budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, koeficijenti s lijeve strane jednadžbe koji nemaju pripadne članove s jednakim kombinacijama umnoška varijabli x i y s desne strane jednadžbe jednaki su nuli. Ti koeficijenti su:

$$a_2 = a_3 = a_5 = a_9 = 0$$

Dakle, dobivamo:

$$6a_4xy^2 + 2a_8x = d_2xy^2 - d_2c^2x$$

odnosno, iz toga dvije jednadžbe koje daju izraze za koeficijente:

$$6a_4xy^2 = d_2xy^2 \qquad 2a_8x = -d_2c^2x$$

$$6a_4 = d_2 \qquad 2a_8 = -d_2c^2$$

$$a_4 = \frac{d_2}{6} \qquad a_8 = -\frac{c^2}{2}d_2$$

3.3.3. MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Ako se vratimo u prvu jednadžbu dobivenu iz Maxwellove jednadžbe:

$$5a_1 + a_3 + a_5 = 0$$

uz već zaključeno:

$$a_3 = a_5 = 0$$

slijedi

$$a_1 = 0$$

Iz druge jednadžbe dobivene iz Maxwellove jednadžbe

$$a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$$

zaključujemo ako je

$$a_4 \neq 0$$

onda ili a_2 ili a_6 (za koje smo prije dobili da su nula) također mora biti različito od nule ili oboje.

3.3.4. IZRAZ ZA NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI Y

Odnos za treću komponentu naprezanja, normalno naprezanje u smjeru osi y (σ_y):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$

uz, naravno, uvrštenje pretpostavljene potencijalne funkcije, daje:

$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3c^3 - d_3y^3 + d_4c - d_4y$$

Budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, koeficijenti s lijeve strane jednadžbe koji nemaju pripadne članove s jednakim kombinacijama umnoška varijabli x i y s desne strane jednadžbe jednaki su nuli. Ti koeficijenti su:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$$

Vidimo da iz izraza za normalno naprezanje u smjeru osi y (desna strana jednadžbe) dobivamo i članove

$$d_3c^3 + d_4c$$

koje trebamo izjednačiti s drugom derivacijom po x umnoška dodatnog koeficijenta i određene varijable potencijalne funkcije. Dodatni koeficijent je koeficijent a_{11} dok ta određena varijabla mora biti takva da druga derivacija po y i mješovita derivacija po x i po y budu jednake nuli dok druga derivacija po x mora biti različita od nule. Takva varijabla je x^2 .

Dokažimo navedeno:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} x^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} x^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 = 2 \neq 0$$

Slijedi:

$$\frac{\partial^2(a_{11}x^2)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(a_{11}x^2)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2(a_{11}x^2)}{\partial x^2} = 2a_{11}$$

Dakle, dobivamo:

$$2a_4y^3 + 2a_8y + 2a_{11} = -d_3y^3 - d_4y + d_3c^3 + d_4c$$

odnosno, iz toga tri jednadžbe koje daju izraze za koeficijente:

$$2a_4y^3 = -d_3y^3$$

$$2a_8y = -d_4y$$

$$2a_{11} = d_3c^3 + d_4c$$

$$d_3 = -2a_4$$

$$d_4 = -2a_8$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(d_3c^3 + d_4c)$$

3.3.5. MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Iz prijašnjih izraza (iz izraza za normalno naprežanje u smjeru osi x i posmično naprežanje) proizlazi:

$$a_4 \neq 0$$

$$a_8 \neq 0$$

Prema tome druga jednadžba dobivena iz Maxwellove jednadžbe

$$a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$$

je zadovoljena ako je

$$a_2 = 0$$

odnosno, sada možemo iz te jednadžbe izraziti koeficijent a_6

$$a_4 + 5a_6 = 0$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5}$$

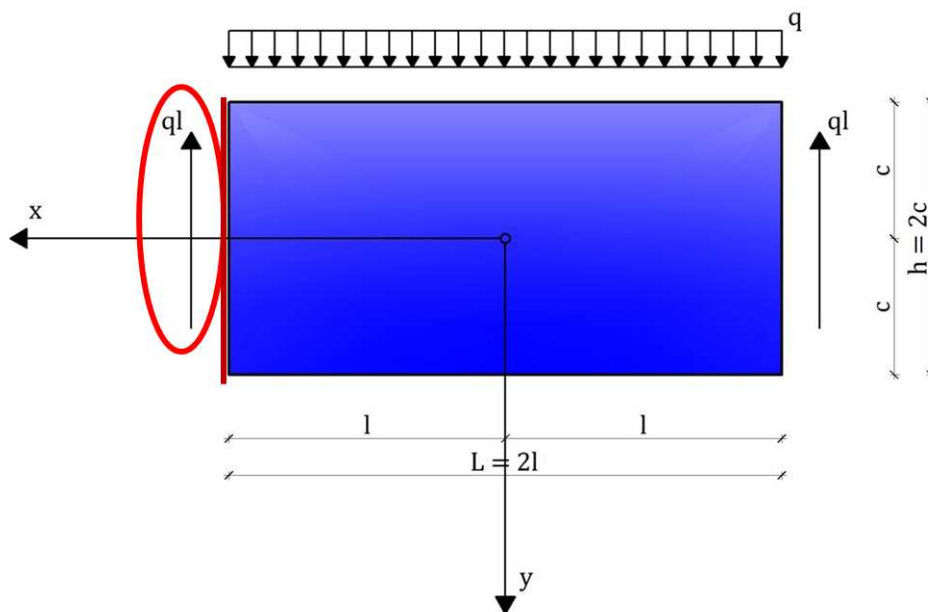
i zbog toga se u izrazu za pojavljuje još jedan član koji se u teoriji pravih štapova ne pojavljuje.

3.4. ODREĐIVANJE POTREBNIH KOEFICIJENATA

Pri određivanju konstanta a i d krenimo redom.

3.4.1. KORIŠTENJE UVJETA NA RUBU $x=+L$

Integral posmičnog naprežanja po dužini ruba $x = +l$ mora biti jednak poprečnoj sili na istom mjestu, odnosno reakciji ležaja budući da se na upravo na tom mjestu nalazi ležaj. Iz te ćemo jednakosti izraziti koeficijent d_2 . Navedeno je vidljivo na slikama 8. i 9. te slici 11.



Slika 11. Rub $x = +l$ visokostijenog nosača

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = ql$$

$$\int_{-c}^c d_2 l (y^2 - c^2) dy = -ql$$

$$d_2 = -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3}$$

3.4.2. KORIŠTENJE PRETHODNO DOBIVENIH IZRAZA ZA OSTALE KOEFICIJENTE

Kroz do sada proveden proračun dobili smo izraze za potrebne koeficijente. Sada ih možemo redom izračunati kako bismo ih mogli uvrstiti u izraz za potencijalnu funkciju kasnije. Dakle,

$$a_4 = \frac{d_2}{6} = \frac{1}{6} \left(-\frac{3q}{4c^3} \right) = -\frac{1q}{8c^3}$$

$$a_8 = -d_2 \frac{c^2}{2} = - \left(-\frac{3q}{4c^3} \right) \frac{c^2}{2} = \frac{3q}{8c}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{1q}{40c^3}$$

$$d_1 = -6a_4 = -6 \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{3q}{4c^3}$$

$$a_{10} = \frac{l^2}{6} d_1 = \frac{l^2}{6} \frac{3q}{4c^3} = \frac{l^2 q}{8c^3}$$

$$d_3 = -2a_4 = -2 \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{1q}{4c^3}$$

$$d_4 = -2a_8 = -2 \frac{3q}{8c} = -\frac{3q}{4c}$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} (d_3 c^3 + d_4 c) = \frac{1}{2} \left(\frac{1q}{4c^3} c^3 - \frac{3q}{4c} c \right) = -\frac{q}{4}$$

3.5. IZRAŽENA POTENCIJALNA FUNKCIJA

3.5.1. OPĆI IZRAZ ZA POTENCIJALNU FUNKCIJU

Izraziti ćemo potencijalnu funkciju Φ te pritom nećemo zaboraviti dodati i član $a_{11}x^2$ na osnovno pretpostavljenu potencijalnu funkciju pa će potencijalna funkcija izgledati:

$$\Phi = a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^2$$

3.5.2. IZRAŽENA POTENCIJALNA FUNKCIJA

Uvrštavanjem svih potrebnih i poznatih koeficijenata u izraz za potencijalnu funkciju dobivamo:

$$\Phi = a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^2$$

$$\Phi = 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4y + 0 \cdot x^3y^2 + \left(-\frac{1}{8} \frac{q}{c^3}\right) x^2y^3 + 0 \cdot xy^4 + \frac{1}{40} \frac{q}{c^3} y^5 + 0 \cdot x^3 + \frac{3}{8} \frac{q}{c} x^2y + 0 \cdot xy^2 + \frac{l^2}{8} \frac{q}{c^3} y^3 + -\frac{q}{4} x^2$$

$$\Phi = -\frac{qx^2}{4} + \frac{3qx^2y}{8c} + \frac{l^2qy^3}{8c^3} - \frac{qx^2y^3}{8c^3} + \frac{qy^5}{40c^3}$$

3.6. IZRAŽENE KOMPONENTE NAPREZANJA

Uvodimo izraz koji ćemo koristiti u ostalim izrazima radi pojednostavljenja:

$$I = \frac{2}{3} c^3$$

3.6.1. IZRAŽENA NORMALNA NAPREZANJA U SMJERU OSI X

Već poznati izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

Normalno naprezanje u smjeru osi x izračunat ćemo koristeći prethodni izraz na način da ćemo prvo računati desnu stranu a zatim lijevu stranu izraza.

Desna strana izraza za normalno naprezanje u smjeru osi x dobiva se dvostrukim deriviranjem potencijalne funkcije po y (sa svim uvrštenim poznatim koeficijentima):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{3l^2qy}{4c^3} - \frac{3qx^2y}{4c^3} + \frac{qy^3}{2c^3}$$

Uvrštenjem izraza za I i pojednostavljenjem izraza dobivamo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{6} \frac{qy}{I} (3l^2 - 3x^2 + 2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

Lijeva strana izraza za normalno naprezanje u smjeru osi x dobivena preko na početku pretpostavljenog izraza za raspodjelu naprezanja (sa uvrštenim poznatim koeficijentom):

$$\sigma_x = d_1(l^2 - x^2)y$$
$$\sigma_x = \frac{3q(l^2 - x^2)y}{4c^3}$$

Uvrštenjem izraza za I i pojednostavljenjem izraza dobivamo:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y$$

Razlika izraza dobivenih posebnim računanjem lijeve i desne strane

$$\frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

leži upravo u naknadno dodanom potrebnom članu potencijalne funkcije.

Dakle, izraz za naprezanje u smjeru osi x je:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

3.6.2. IZRAŽENA POSMIČNA NAPREZANJA

Već poznati izraz za posmično naprezanje:

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Posmično naprezanje izračunat ćemo koristeći prethodni izraz na način da ćemo prvo računati desnu stranu a zatim lijevu stranu izraza.

Desna strana izraza za posmično naprezanje dobiva se deriviranjem potencijalne funkcije po x i po y (sa svim uvrštenim poznatim koeficijentima):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = - \frac{3qx}{4c} + \frac{3qxy^2}{4c^3}$$

Uvrštenjem izraza za I i pojednostavljenjem izraza dobivamo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x$$

Lijeva strana izraza za posmično naprezanje preko na početku pretpostavljenog izraza za raspodjelu naprezanja (sa uvrštenim poznatim koeficijentom):

$$\tau_{xy} = d_2 (c^2 - y^2)x$$
$$\tau_{xy} = -\frac{3qx(c^2 - y^2)}{4c^3}$$

Uvrštenjem izraza za I i pojednostavljenjem izraza dobivamo:

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x$$

Obe strane izraza su jednake što potvrđuje njihovu točnost.

3.6.3. IZRAŽENA NORMALNA NAPREZANJA U SMJERU OSI Y

Već poznati izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Normalno naprezanje u smjeru osi y izračunat ćemo koristeći prethodni izraz na način da ćemo prvo računati desnu stranu a zatim lijevu stranu izraza.

Desna strana izraza za normalno naprezanje u smjeru osi y dobiva se dvostrukim deriviranjem potencijalne funkcije po x (sa svim uvrštenim poznatim koeficijentima):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{q}{2} + \frac{3qy}{4c} - \frac{qy^3}{4c^3}$$

Uvrštenjem izraza za I i pojednostavljenjem izraza dobivamo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

Lijeva strana izraza za normalno naprezanje u smjeru osi y dobivena preko na početku pretpostavljenog izraza za raspodjelu naprezanja (sa uvrštenim poznatim koeficijentima):

$$\sigma_y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$\sigma_y = -\frac{3q(c - y)}{4c} + \frac{q(c^3 - y^3)}{4c^3}$$

Uvrštenjem izraza za I i pojednostavljenjem izraza dobivamo:

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

Obe strane izraza su jednake što potvrđuje njihovu točnost.

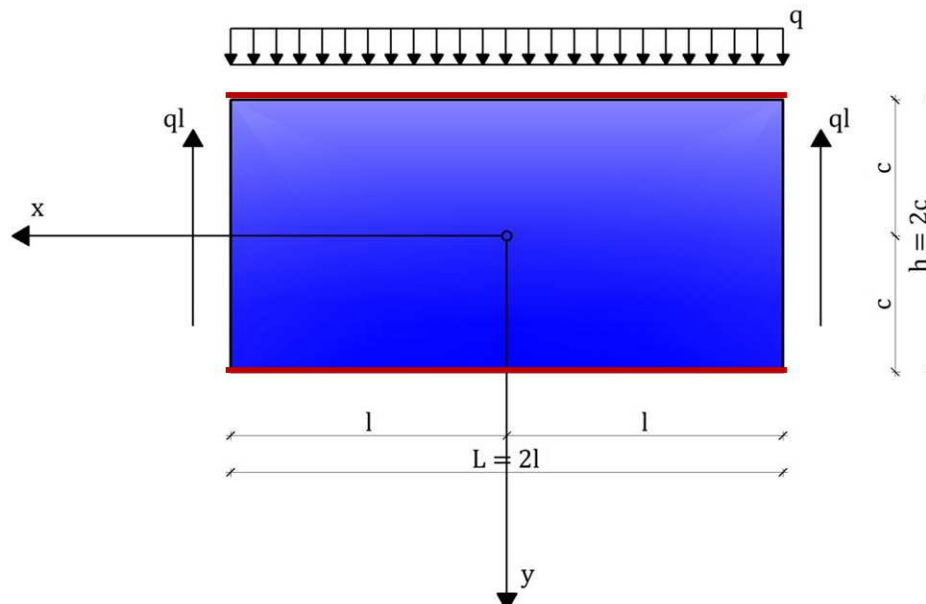
3.6.4. KONTROLA IZRAZA ODREĐENIM UVJETIMA

Napravit ćemo dvije kontrole dobivenih izraza za naprezanje. Prva kontrola biti će kontrola izraza za naprezanje u smjeru osi y , a druga kontrola obuhvatit će sve izraze za naprezanje uvrštavajući ih u Maxwellovu jednadžbu.

Na početku smo postavili očite poznate rubne uvjete (na rubovima prikazanima na slici 12.) za normalno naprezanje u smjeru osi y koje iznose:

$$\sigma_y(y = +c) = 0$$

$$\sigma_y(y = -c) = -q$$



Slika 12. Rubovi $y=+c$ i $y=-c$ visokostijenog nosača

U opći izraz za naprezanje u smjeru osi y

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

uvrstit ćemo navedene y koordinate i tako provjeriti sam izraz:

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - c)^2 (2c + c) = 0$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - (-c))^2 (2c + (-c)) = -q$$

Vidimo da su rubni uvjeti zadovoljeni te tako i da je izraz ispravan. Uz to, također smo provjerili ekstremne vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi y , tj. vidimo da to naprezanje na mjestu unosa opterećenja ima maksimalnu dok na dnu nosača ima minimalnu vrijednost.

Maxwellova jednažba

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

uz korištenje poznatih relacija

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

može se napisati kao

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \sigma_x + 2 \cdot (-\tau_{xy}) \cdot (-\tau_{xy}) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \sigma_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \sigma_x + 2 \cdot (\tau_{xy})^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \sigma_y = 0$$

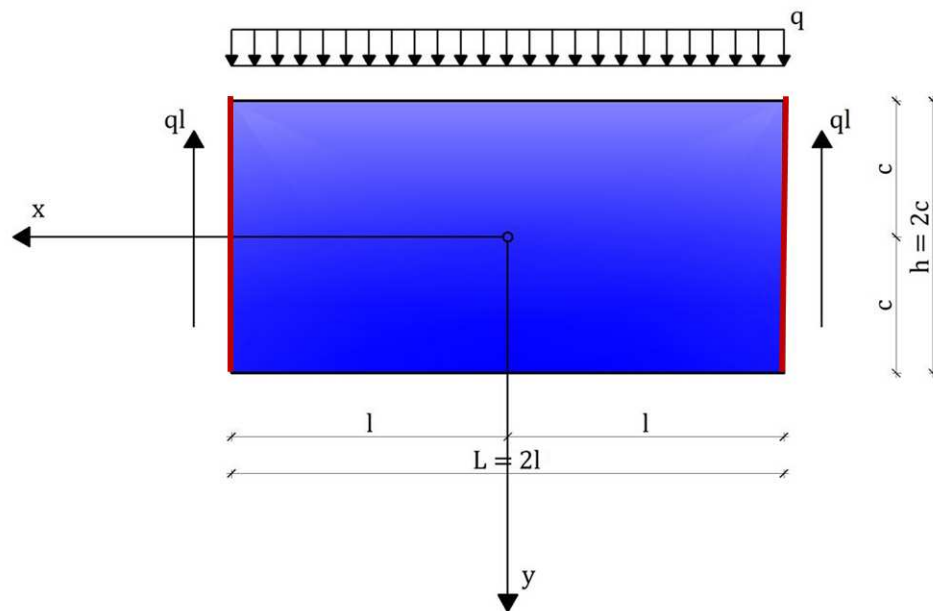
Uvrštavanjem izraza za naprezanja te deriviranjem dokazujemo da je jednakost točna.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 \right] + 2 \cdot \left[\frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x \right]^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \left[\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y) \right] = 0$$

Time smo dokazali točnost izraza za naprezanja (vrijedi jednakost).

3.6.5. KOREKCIJA IZRAZA ZA NORMALNA NAPREZANJA U SMJERU OSI X

Svi rubni uvjeti su zadovoljeni osim uvjet na rubu $x = \pm l$ za normalno naprezanje (slika 13.).



Slika 13. Rubovi $x=+l$ i $x=-l$

Ako u izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x uvrstimo $x = \pm l$, prvi član izraza jednak je nuli no drugi član ostaje i jednak je:

$$\sigma_x = \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

iz čega se dobije moment

$$M_1 = \int_{-c}^{+c} \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 \cdot y \cdot dy$$

$$M_1 = \frac{2}{15} \frac{c^5 q}{I}$$

Djelovanjem tog momenta koji daje nelinearnu raspodjelu naprezanja na rubu $x = \pm l$ može se u određenoj mjeri ukloniti ako se na istim rubovima priloži moment jednake veličine no s linearnom raspodjelom naprezanja. Za takav je moment (čisto savijanje) $\sigma_y = 0$ i $\tau_{xy} = 0$.

Drugim riječima, možemo izjednačiti:

$$M_1 = d_5 I$$

a iz toga možemo dobiti koeficijent

$$d_5 = \frac{c^2 q}{5I}$$

Normalno naprezanje u smjeru osi x sada je:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 - d_5 y$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

dok ostale komponente naprezanja ostaju nepromijenjene.

3.6.6. KOMENTAR IZRAZA ZA NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI X

Kao što je vidljivo, točno se rješenje razlikuje od onog koje daje teorija pravih štapova. Prvi član u izrazu za normalno naprezanje u smjeru osi x odgovara Bernoulli-Navierovoj hipotezi ravnih poprečnih presjeka, dok je drugi član posljedica postojanja normalnog naprezanja u smjeru osi y koje se u teoriji pravih štapova ne uzima u obzir. Za uobičajene dimenzije nosača na dva ležaja taj je utjecaj neznatan te se u praksi može zanemariti što se vidi iz omjera drugog i prvog člana za $x = 0$ i $y = c$.

Drugi član:

$$\frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y = \frac{1}{3} \frac{q}{I} (c^2 - \frac{3}{5} c^2)c = \frac{2}{15} \frac{q}{I} c^3$$

Prvi član:

$$\frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - 0^2)c = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 c$$

Omjer drugog i prvog člana:

$$\frac{\frac{2}{15} \frac{q}{I} c^3}{\frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 c} = \frac{4}{15} \left(\frac{c}{l}\right)^2$$

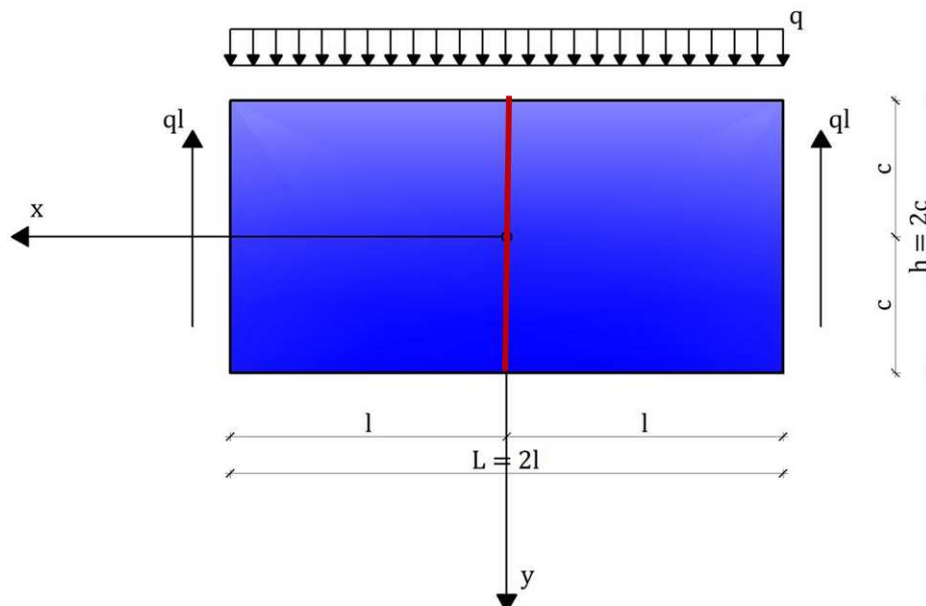
Već za omjer

$$\frac{c}{l} < \frac{1}{5}$$

razlika između točnog rješenja i onog prema hipotezi ravnih presjeka nije veća od 1,1%.

Treba, međutim, reći da i to rješenje problema savijanja visokostijenog nosača nije sasvim točno jer je na rubu $x = l$ poništeno djelovanje momenta M_c , no ipak na istom rubu preostaje razlika naprezanja između raspodjele naprezanja po linearnom zakonu i po paraboli trećeg stupnja.

3.6.7. ANALIZA IZRAZA ZA NORMALNA NAPREZANJA U SMJERU OSI X



Slika 14. Srednji uspravni presjek visokostijenog nosača

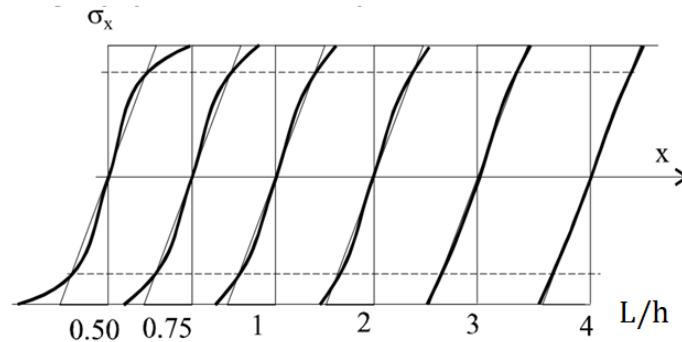
Važno je uočiti normalno naprezanje u smjeru osi x u srednjem uspravnom presjeku nosača (slika14.). Tako sukladno izrazu za normalno naprezanje u smjeru osi x uz uvrštenje $x = 0$ to dobivamo:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - 0^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

što je grafički prikazano na slici 15. u relativnom mjerilu za pojedine omjere dimenzija nosača. Prvi član daje linearnu raspodjelu napreznja po visini, onu koju daje teorija malih pomaka štapova izloženih savijanju, dok drugi član pokazuje utjecaj strože teorije elastičnosti primijenjen na ravninsko stanje.



Slika 15. Normalna napreznja u smjeru osi x u ovisnosti o omjeru dužine i visine visokostijenog nosača

Već smo spomenuli omjer

$$\frac{c}{l} < \frac{1}{5}$$

kod kojeg razlika između točnog rješenja i onog prema hipotezi ravnih presjeka nije veća od 1,1%.

Taj omjer možemo prikazati i omjerom dužine (L) i visine visokostijenog nosača (h) budući da znamo:

$$c = h/2$$

$$l = L/2$$

Spomenuti omjer je dakle:

$$L/h > 5$$

Važan podatak o stanju napreznja su i ekstremne vrijednosti normalnog napreznja u smjeru osi x. Razlikujemo najveće normalno napreznje koje se javlja na

dnu srednjeg presjeka i koje je pozitivno od najvećeg normalnog naprezanja koje se javlja na vrhu srednjeg presjeka i koje je negativnog predznaka. Najveće normalno naprezanje pozitivnog predznaka nazivamo maksimalno vlačno naprezanje dok ono negativnog predznaka nazivamo maksimalno tlačno naprezanje.

Maksimalno vlačno naprezanje dobiva se tako da se u prethodnu relaciju uvrsti $y = c$ a ono iznosi:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2) y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 c + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (c^2 - \frac{3}{5} c^2) c$$

$$\sigma_{x,\max,vl} = \frac{q}{I} c \left(\frac{l^2}{2} + \frac{2}{15} c^2 \right)$$

Maksimalno tlačno naprezanje dobiva se tako da se u prethodnu relaciju uvrsti $y = -c$ a ono iznosi:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2) y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 (-c) + \frac{1}{3} \frac{q}{I} ((-c)^2 - \frac{3}{5} c^2) (-c)$$

$$\sigma_{x,\max,tl} = -\frac{q}{I} c \left(\frac{l^2}{2} + \frac{2}{15} c^2 \right)$$

Uočavamo da su maksimalno vlačno naprezanje i maksimalno tlačno naprezanje istog iznosa samo suprotnog predznaka.

3.6.8. ANALIZA IZRAZA ZA POSMIČNA NAPREZANJA

Bitno je također znati ekstremne vrijednosti posmičnog naprezanja. Razlikujemo maksimalno posmično naprezanje, dakle posmično naprezanje pozitivnog predznaka i minimalno posmično naprezanje odnosno posmično naprezanje negativnog predznaka. Vidjeti ćemo da su maksimalno i minimalno posmično naprezanje istog iznosa samo suprotnog predznaka.

Izraz za maksimalno posmično naprezanje dobit ćemo ako u opći izraz za posmično naprezanje uvrstimo $x = l$ i $y = 0$ pa dobivamo:

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (c^2 - 0^2)l$$

$$\tau_{xy,\max} = \frac{ql}{2I} c^2$$

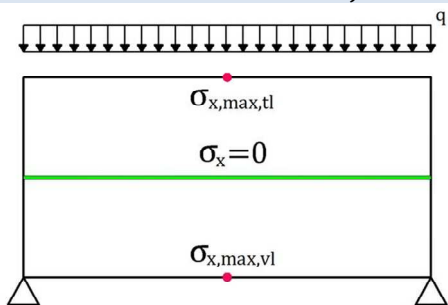
Izraz za minimalno posmično naprezanje dobit ćemo ako u opći izraz za posmično naprezanje uvrstimo $x = -l$ i $y = 0$ pa dobivamo:

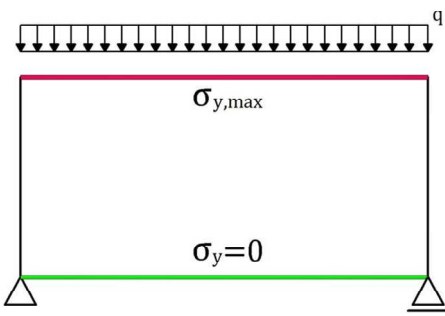
$$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x$$

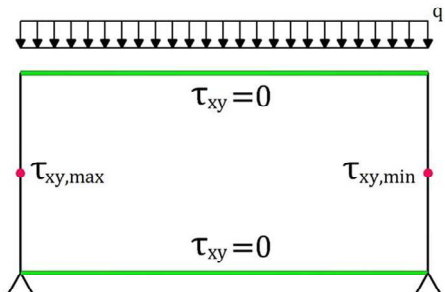
$$\tau_{xy,\min} = -\frac{ql}{2I} c^2$$

3.6.9. SISTEMATIZACIJA IZRAZA ZA NAPREZANJA

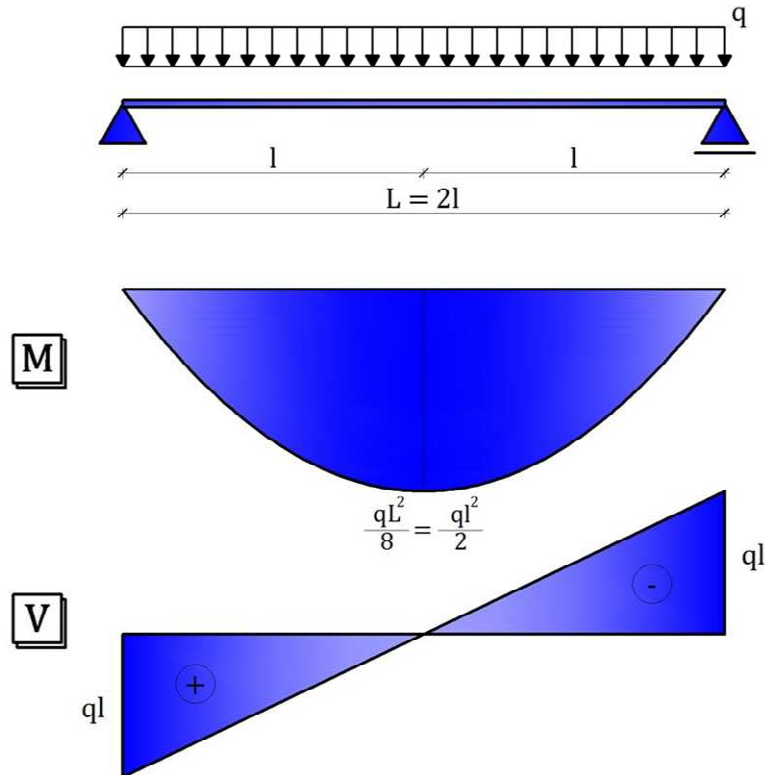
Preglednosti radi, navode se na jednom mjestu svi izrazi za naprezanja te skice s položajima ekstremnih vrijednosti naprezanja u obliku tablica.

Izrazi za normalno naprezanje u smjeru osi x		
Opća točka nosača	$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$	
Ekstremne vrijednosti naprezanja	Izraz za naprezanje	
	Maksimalno vlačno naprezanje	$\sigma_{x,\max,vl} = \frac{q}{I} c \left(\frac{l^2}{2} + \frac{2}{15} c^2 \right)$
	Maksimalno tlačno naprezanje	$\sigma_{x,\max,tl} = -\frac{q}{I} c \left(\frac{l^2}{2} + \frac{2}{15} c^2 \right)$
Slika nosača s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja		
		

Izrazi za normalno naprezanje u smjeru osi y		
Opća točka nosača	$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$	
Ekstremne vrijednosti naprezanja	Izraz za naprezanje	
	Maksimalno naprezanje	$\sigma_{y,max} = -q$
	Minimalno naprezanje	$\sigma_{y,min} = 0$
	Slika nosača s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja	
		

Izrazi za posmično naprezanje		
Opća točka nosača	$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x$	
Ekstremne vrijednosti naprezanja	Izraz za naprezanje	
	Maksimalno pozitivno naprezanje	$\tau_{xy,max} = \frac{ql}{2I} c^2$
	Maksimalno negativno naprezanje	$\tau_{xy,min} = -\frac{ql}{2I} c^2$
	Slika nosača s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja	
		

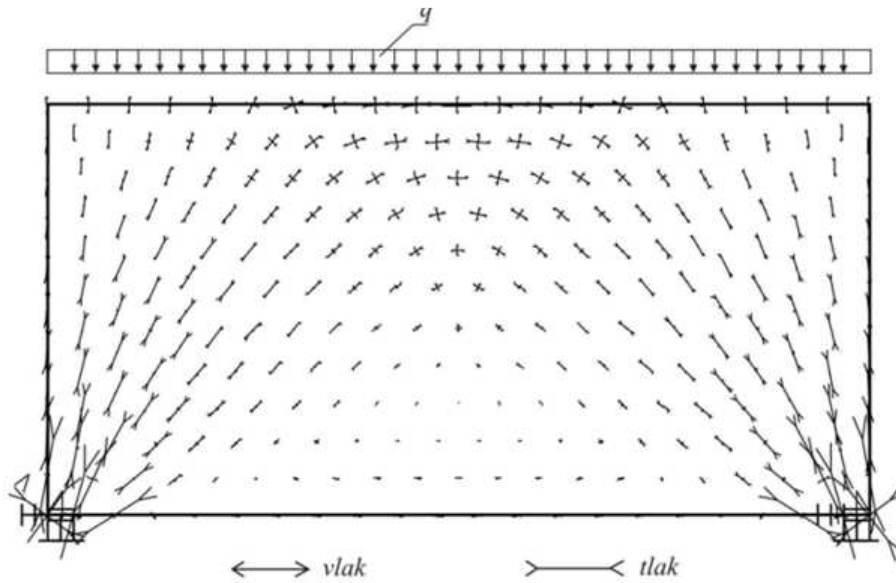
Mjesta na nosaču s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja poklapaju se, naravno, s mjestima maksimalnih vrijednosti unutrašnjih sila prikazanim na slici 16.



Slika 16. Dijagrami unutrašnjih sila visokostijenog nosača

3.6.10. TRAJEKTORIJE GLAVNIH NAPREZANJA

Uz sva izračunata naprezanja (normalno naprezanje u smjeru osi x, normalno naprezanje u smjeru osi y te posmično naprezanje) uz poznavanje osnovnih izraza teorije otpornosti materijala moguće je izračunati glavna naprezanja. Podsjetimo se, glavnim naprezanjima nazivamo normalna naprezanja ekstremnih vrijednosti koja djeluju na glavnim ravninama, tj. u ravninama u kojima ne djeluje posmično naprezanje. Trajektorije takvih naprezanja za visokostijeni nosač statičkog sustava jednostavno oslonjene grede prikazana su na slici 17.



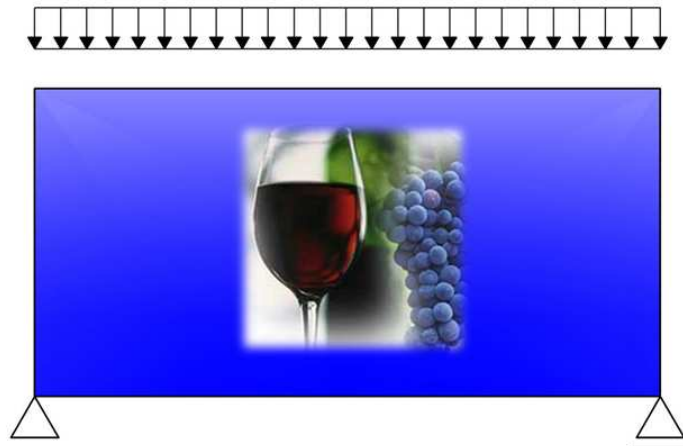
Slika 17. Trajektorije glavnih naprezanja viskostiženog nosača

3.7. IZVOD IZRAZA ZA NAPREZANJA U „MATHEMATICI“

Sav ovdje provedeni dokaz također je napravljen, odnosno proveden radi kontrole i smanjenja ručnog proračuna i u programu „Mathematica“ a sve je to prikazano i dano u prilogu 6.1. kao ispis Mathematica Notebooka.

4. PROGRAM „VINO“

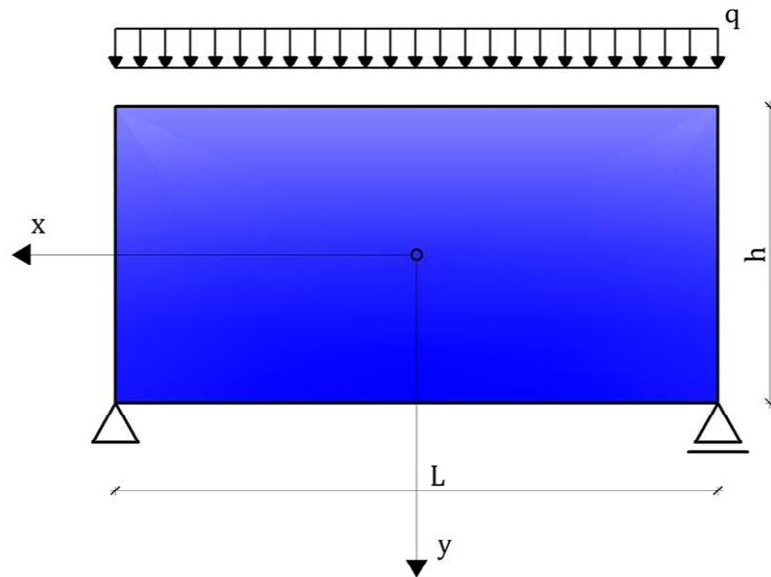
Za potrebe proračuna naprezanja visokostijenog nosača napravljen je mali program u programu „Mathematici“ naziva „VINO“ (slika 18.).



Slika 18. Logo programa „VINO“

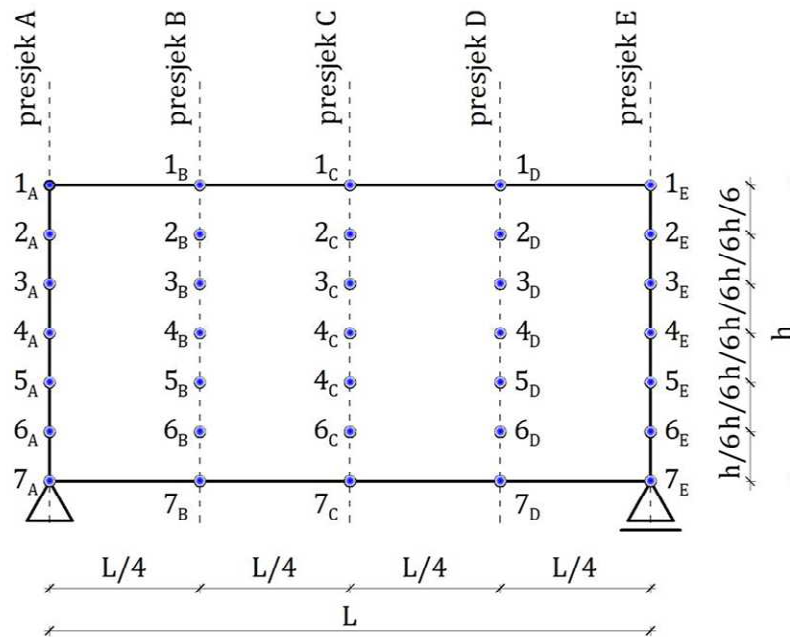
4.1. OPIS PROGRAMA „VINO“

Program „VINO“ računa normalna naprezanja u smjeru osi x , normalna naprezanja u smjeru osi y te posmična naprezanja za visokostijeni nosač, odnosno razmjerno uski i visoki nosač na koji djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje u ravnini nosača pod uvjetom da je statički sustav visoke grede jednostavno oslonjeni nosač (prosta greda). Vidi sliku 19.



Slika 19. Visokostijeni nosač

Program nudi izračun naprezanja za (četvrtinske) presjeke, odnosno točke prikazane na slici 20.



Slika 20. Presjeci i točke u kojima se računaju naprezanja visokostijenog nosača

4.2. INPUT PROGRAMA „VINO“

Kako bi program „VINO“ mogao izračunati sva naprezanja potrebno je zadati sljedeće podatke (slika 19.):

- dužina visokostijenog nosača, L
- visina visokostijenog nosača, h
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje, q

4.3. KOD PROGRAMA „VINO“

Kod programa „VINO“ relativno je jednostavan. Programu „Mathematica“ zadane su formule za proračun naprezanja dobivene izvodom te prema njima on računa naprezanja u točkama. Drugim riječima, u prvom dijelu računalni program „Mathematica“ služi kao svojevrsni kalkulator za proračun naprezanja u pojedinim točkama te tako dobivene rezultate prikazuje u obliku tablice. U drugom dijelu dan je grafički prikaz svih naprezanja po poprečnim presjecima na dva načina. Prvi način prikaza naprezanja po pojedinom poprečnom presjeku prikaz je kojim se izračunate vrijednosti naprezanja po točkama pojedinih presjeka spajaju približno krivuljom, dok se u drugom načinu prikaza te točke spajaju pravcima. Dva načina prikaza dana su radi razvidnijeg razmatranja svih dijagrama naprezanja a posebice normalnog naprezanja u smjeru osi x .

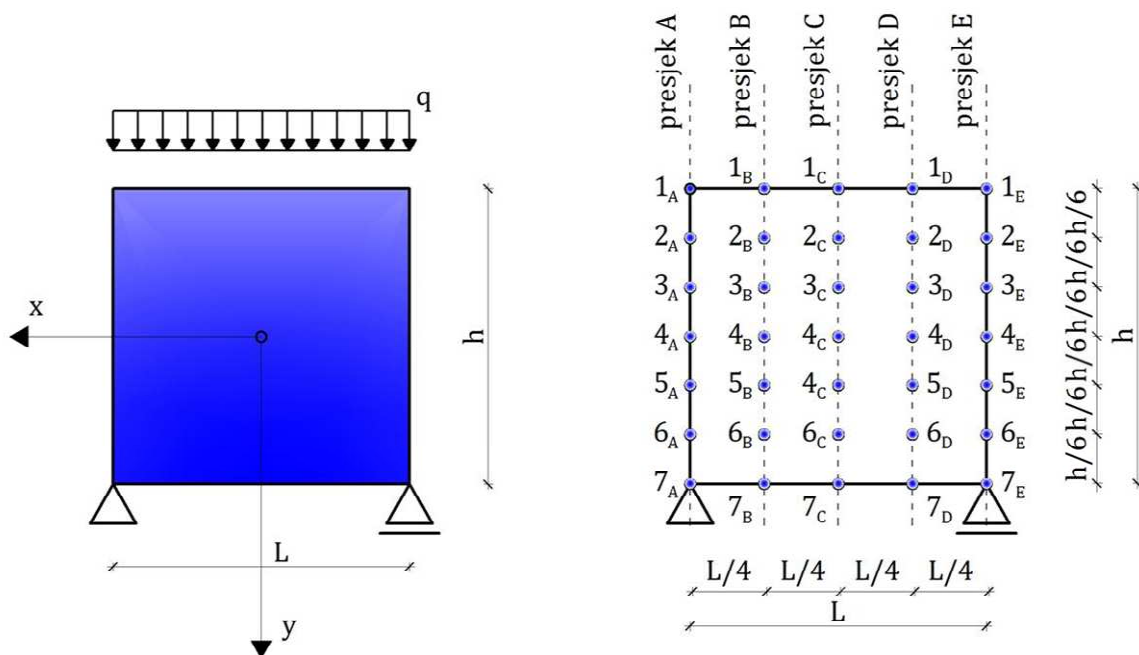
Sam kod programa „VINO“ dan je u odvojenom *Mathematica notebooku* od *notebooka* u kojem je korisničko sučelje. *Notebook* u kojem se nalazi kod nazvan je „JEZGRA“, dok je *notebook* u kojem se nalazi korisničko sučelje nazvan „PROGRAM“. Razlog za to odvajanje leži u tome da se ne dogodi da korisnik slučajnom pogreškom promijeni kod a i radi preglednijeg unosa potrebnih podataka i ispisa rezultata.

Objašnjenje koda dano je i unutar samog koda (notebook „JEZGRA“) prikazanog u prilogu 6.2. dok se u prilogu 6.3. prikazuje sam „PROGRAM“.

5. PRIMJERI VISOKOSTIJIENOG NOSAČA

5.1. ZADATAK 1. - VISOKOSTIJIENI NOSAČ

Potrebno je izračunati sva naprezanja (normalno naprezanje u smjeru osi x , normalno naprezanje u smjeru osi y i posmično naprezanje) za visokostijeni nosač prikazan na slici 21. u točkama zadanim na istoj slici te skicirati dijagrame svih naprezanja.



Slika 21. Zadani visokostijeni nosač

Zadane su veličine:

- dužina visokostijeniog nosača: $L = 1 \text{ m}$
- visina visokostijeniog nosača: $h = 1 \text{ m}$
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje: $q = 1 \text{ kN/m}$

5.2. RJEŠENJE ZADATKA 1. - VISOKOSTIJENI NOSAČ - RUČNO

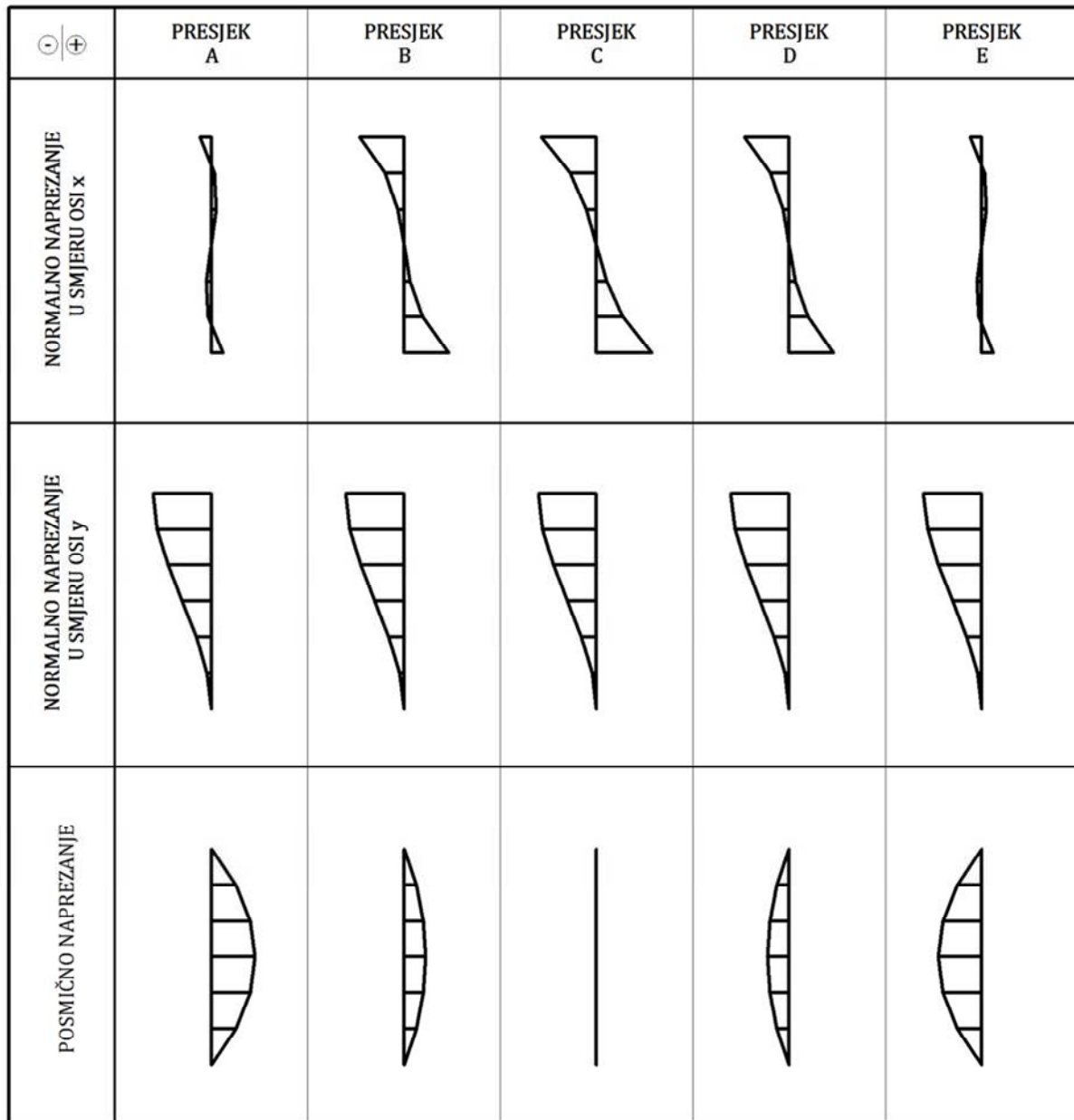
Sva naprezanja ovog visokostijenog nosača izračunata su ručno te su tablično prikazana nakon toga ta su naprezanja „ručno“ nacrtana u AutoCADu. Cijeli taj proračun nije zahtjevan u smislu znanja ali je zamarajući pa će se kasnije prikazati proračun koristeći *Mathematicu*.

Normalno naprezanje u smjeru osi x					
točka/presjek	A	B	C	D	E
1	- 0,2000	- 0,7625	- 0,9500	- 0,7625	- 0,2000
2	0,0519	- 0,3231	- 0,4481	- 0,3231	0,0519
3	0,0815	- 0,1060	- 0,1685	- 0,1060	0,0815
4	0	0	0	0	0
5	- 0,0815	0,1060	0,1685	0,1060	- 0,0815
6	- 0,0519	0,3231	0,4481	0,3231	- 0,0519
7	0,2000	0,7625	0,9500	0,7625	0,2000

Normalno naprezanje u smjeru osi y					
točka/presjek	A	B	C	D	E
1	- 1,0000	- 1,0000	- 1,0000	- 1,0000	- 1,0000
2	- 0,9259	- 0,9259	- 0,9259	- 0,9259	- 0,9259
3	- 0,7407	- 0,7407	- 0,7407	- 0,7407	- 0,7407
4	- 0,5000	- 0,5000	- 0,5000	- 0,5000	- 0,5000
5	- 0,2593	- 0,2593	- 0,2593	- 0,2593	- 0,2593
6	- 0,0741	- 0,0741	- 0,0741	- 0,0741	- 0,0741
7	0	0	0	0	0

Posmično naprezanje					
točka/presjek	A	B	C	D	E
1	0	0	0	0	0
2	0,4167	0,2083	0	- 0,2083	- 0,4167
3	0,6667	0,3333	0	- 0,3333	- 0,6667
4	0,7500	0,3750	0	- 0,3750	- 0,7500
5	0,6667	0,3333	0	- 0,3333	- 0,6667
6	0,4167	0,2083	0	- 0,2083	- 0,4167
7	0	0	0	0	0

Radi preglednosti i jednostavnosti naprezanja će se skicirati oblikom bez unošenja brojevanih iznosa na dijagrame jer se oni lako mogu pratiti i očitavati iz tablica.



Slika 22. Dijagrami naprezanja

5.3. RJEŠENJE ZADATKA 1. - VISOKOSTIJENI NOSAČ - „VINO“

Sva naprezanja ovog visokostijenog nosača izračunata i grafički prikazana programom „VINO“. Cijeli taj proračun i grafički prikaz dan je u prilogu 6.4.



5.4. ZADATAK 2. - VISOKOSTIJENI NOSAČ

Potrebno je izračunati sva naprezanja (normalno naprezanje u smjeru osi x , normalno naprezanje u smjeru osi y i posmično naprezanje) za visokostijeni nosač u točkama četvrtinskih presjeka te nacrtati dijagrame svih naprezanja.

Zadane su veličine:

- dužina visokostijenog nosača: $L = 1 \text{ m}$
- visina visokostijenog nosača: $h = 2 \text{ m}$
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje: $q = 1 \text{ kN/m}$

5.5. RJEŠENJE ZADATKA 2. - VISOKOSTIJENI NOSAČ - „VINO“

Sva naprezanja ovog visokostijenog nosača izračunata i grafički prikazana programom „VINO“. Cijeli taj proračun i grafički prikaz dan je u prilogu 6.5.



6. PRILOZI



6.1. IZVOD IZRAZA ZA NAPREZANJA U „MATHEMATICI“

VISOKOSTIJNI NOSAČ

Izvod rješenja problema visokostijenog nosača pomoću Maxwellove jednačbe

Model visokostijenog nosača

- Slika modela
- Statički sustav i rubni uvjeti
- Izrazi za komponente naprezanja

Potencijalna funkcija i Maxwellova jednačba

- Potencijalna funkcija
- Maxwellova jednačba

Korištenje izraza za komponente naprezanja za dobivanje izraza za koeficijente

- Izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x
- Izraz za posmično naprezanje
- Maxwellova jednačba
- Izraz za normalno naprezanje u smjeru osi y
- Maxwellova jednačba

Određivanje potrebnih koeficijenata

- Korištenje uvjeta na rubu $x=+l$
- Korištenje prethodno dobivenih izraza za ostale koeficijente

Izražena potencijalna funkcija

- Opći izraz za potencijalnu funkciju
- Izražena potencijalna funkcija

Izražene komponente naprezanja

- Izražena normalna naprezanja u smjeru osi x
- Izražena posmična naprezanja
- Izražena normalna naprezanja u smjeru osi y
- Kontrola izraza određenim uvjetima
- Korekcija izraza za normalna naprezanja u smjeru osi x
- Komentar izraza za normalno napreznje u smjeru osi x
- Analiza izraza za normalno naprezanje u smjeru osi x
- Analiza izraza za posmično naprezanje

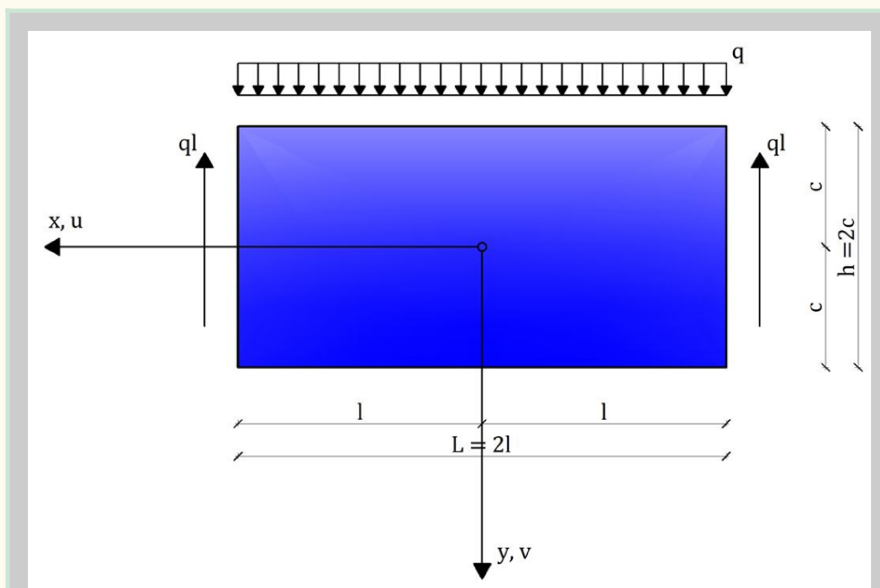
VISOKOSTIJNI NOSAČ

Izvod rješenja problema visokostijenog nosača pomoću Maxwellove jednadžbe

Model visokostijenog nosača

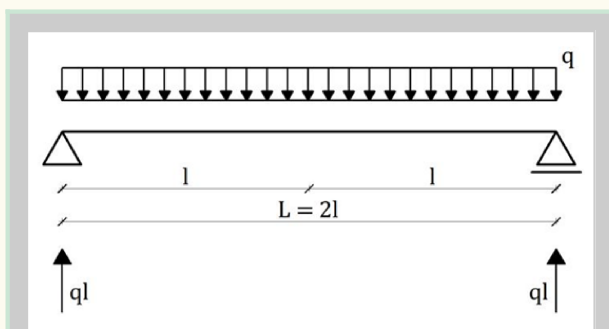
■ Slika modela

Promatra se visokostijeni nosač prikazan na slici x, odnosno razmjerno uski i visoki nosač na koji djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje u ravlini nosača. Visokostijeni gredni nosač u tekstu se također negdje naziva i visoka greda ili pločasti nosač. Razmatra se problem savijanja takvog nosača kontinuiranim opterećenjem.



■ Statički sustav i rubni uvjeti

Rubni uvjeti zadani su raspodijeljenim prihvatom posmičnih naprezanja po visini rubova kao i vertikalnim pomakom u sredini rubnih presjeka jednakim nuli. Drugim riječima, statički sustav visoke grede je jednostavno oslonjeni nosač (prosta greda).



Zadatak se rješava poluobratnim postupkom tako da je odabrana potencijalna funkcija koja zadovoljava rubne uvjete a potom su zadovoljavani ostali uvjeti, odnosno pretpostavlja se određena raspodjela naprezanja za koju su zadovoljeni uvjeti na konturi te provjerava da li su zadovoljene i ostale jednadžbe.

■ Izrazi za komponente naprezanja

Pretpostavit ćemo da je, kao i u teoriji pravih štapova, raspodjela normalnih naprezanja u smjeru osi x linearna a posmičnih parabolična. Kako bismo zadovoljili prethodno navedene rubne uvjete, izrazi za komponente naprezanja moraju imati ovaj oblik:

Normalno naprezanje u smjeru osi x (σ_x):

$$\sigma_x = d_1 y (l^2 - x^2)$$

$$(l^2 - x^2) y d_1$$

Posmično naprezanje (τ_{xy}):

$$\tau_{xy} = d_2 x (c^2 - y^2)$$

$$x (c^2 - y^2) d_2$$

Normalno naprezanje u smjeru osi y (σ_y):

$$\sigma_y = d_3 (c^3 - y^3) + d_4 (c - y)$$

$$(c^3 - y^3) d_3 + (c - y) d_4$$

Također su poznate veličine normalnog naprezanja u smjeru osi y na rubovima koje iznose:

$$\sigma_y(y = +c) = 0$$

$$\sigma_y(y = -c) = -q$$

Potencijalna funkcija i Maxwellova jednadžba

■ Potencijalna funkcija

Iz prethodno navedenih izraza vidi se da Airyjeva funkcija za taj problem mora sadržavati članove petog i trećeg stupnja, tj. da potencijalna funkcija ima oblik:

$$\Phi = a_1 x^5 + a_2 x^4 y + a_3 x^3 y^2 + a_4 x^2 y^3 + a_5 x y^4 + a_6 y^5 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3$$

$$\Phi(x_-, y_-) :=$$

$$a_1 x^5 + a_2 x^4 y + a_3 x^3 y^2 + a_4 x^2 y^3 + a_5 x y^4 + a_6 y^5 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3$$

$$x^5 a_1 + x^4 y a_2 + x^3 y^2 a_3 + x^2 y^3 a_4 + x y^4 a_5 + y^5 a_6 + x^3 a_7 + x^2 y a_8 + x y^2 a_9 + y^3 a_{10}$$

Maxwellova jednađzba

Zadovoljavajući Maxwellovu jednađzbu:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

uvrštavajući prethodno određenu Airyjevu funkciju dobivamo:

$$\text{Simplify} \left[\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x \partial x \partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x \partial x \partial y \partial y} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y \partial y \partial y \partial y} \right]$$

$$24 (5 x a_1 + y a_2 + x a_3 + y a_4 + x a_5 + 5 y a_6)$$

te se izjednačavanjem koeficijenata posebno uz x te posebno koeficijenata uz y dobivaju dvije jednađzbe:

$$\begin{aligned} 5 a_1 + a_3 + a_5 &= 0 \\ a_2 + a_4 + 5 a_6 &= 0 \end{aligned}$$

Korištenje izraza za komponente napreznaja za dobivanje izraza za koeficijente

■ Izraz za normalno napreznaje u smjeru osi x

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x$$

Izračunamo lijevu stranu jednađzbe, tj. $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y \partial y}$$

$$2 x^3 a_3 + 6 x^2 y a_4 + 12 x y^2 a_5 + 20 y^3 a_6 + 2 x a_9 + 6 y a_{10}$$

Izračunamo desnu stranu jednađzbe, tj. izraz za normalno napreznaje u smjeru osi x:

$$\text{Expand}[\sigma_x]$$

$$l^2 y d_1 - x^2 y d_1$$

Uočimo da budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, neki će koeficijenti s lijeve strane jednađzbe biti jednaki nuli s obzirom da nemaju pripadne članove s jednakim kombinacijama umnoška varijabli x i y s desne strane jednađzbe. Ti koeficijenti su:

$$a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = 0$$

Dakle, lijeva strana je:

$$6 a_4 x^2 y + 6 a_{10} y$$

Odnosno, vrijedi:

$$6 a_4 x^2 y + 6 a_{10} y = -d_1 x^2 y + d_1 l^2 y$$

Slijede dvije jednadžbe iz kojih se mogu izraziti koeficijenti različiti od nule.

Iz prve jednadžbe

$$6 a_4 x^2 y = -d_1 x^2 y$$

možemo izraziti koeficijent d_1 .

$$\text{Solve}[6 a_4 x^2 y = -d_1 x^2 y, d_1]$$

$$\{\{d_1 \rightarrow -6 a_4\}\}$$

Iz druge jednadžbe

$$6 a_{10} y = d_1 l^2 y$$

možemo izraziti koeficijent a_{10} .

$$\text{Solve}[6 a_{10} y = d_1 l^2 y, a_{10}]$$

$$\{\{a_{10} \rightarrow \frac{l^2 d_1}{6}\}\}$$

■ Izraz za posmično naprezanje

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau_{x,y}$$

Izračunamo lijevu stranu jednadžbe, tj. $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$4 x^3 a_2 + 6 x^2 y a_3 + 6 x y^2 a_4 + 4 y^3 a_5 + 2 x a_8 + 2 y a_9$$

Izračunamo desnu stranu jednadžbe, tj. izraz za posmično naprezanje:

$$\text{Expand}[-\tau_{xy}]$$

$$-c^2 x d_2 + x y^2 d_2$$

Uočimo da budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, neki će koeficijenti s lijeve strane jednadžbe biti jednaki nuli s obzirom da nemaju pripadne članove s jednakim kombinacijama umnoška varijabli x i y s desne strane jednadžbe. Ti koeficijenti su:

$$a_2 = a_3 = a_5 = a_9 = 0$$

Dakle, lijeva strana je:

$$6 a_4 x y^2 + 2 a_8 x$$

Odnosno, vrijedi:

$$6 a_4 x y^2 + 2 a_8 x = d_2 x y^2 - d_2 c^2 x$$

Slijede dvije jednadžbe iz kojih se mogu izraziti koeficijenti različiti od nule.

Iz prve jednadžbe

$$6 a_4 x y^2 = d_2 x y^2$$

možemo izraziti koeficijent a_4 .

$$\text{Solve}[6 a_4 x y^2 = d_2 x y^2, a_4]$$

$$\left\{ \left\{ a_4 \rightarrow \frac{d_2}{6} \right\} \right\}$$

Iz druge jednadžbe

$$2 a_8 x = -d_2 c^2 x$$

možemo izraziti koeficijent a_8 .

$$\text{Solve}[2 a_8 x = -c^2 d_2 x, a_8]$$

$$\left\{ \left\{ a_8 \rightarrow -\frac{1}{2} c^2 d_2 \right\} \right\}$$

■ Maxwellova jednadžba

Ako se vratimo u prvu jednadžbu dobivenu iz Maxwellove jednadžbe

$$5 a_1 + a_3 + a_5 = 0$$

uz već zaključeno:

$$a_3 = a_5 = 0$$

slijedi

$$a_1 = 0$$

Iz druge jednadžbe dobivene iz Maxwellove jednadžbe

$$a_2 + a_4 + 5 a_6 = 0$$

zaključujemo ako je

$$a_4 \neq 0$$

onda ili a_2 ili a_6 (za koje smo prije dobili da su nula) također mora biti različito od nule ili oboje.

■ Izraz za normalno naprezanje u smjeru osi y

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$

Izračunamo lijevu stranu jednadžbe, tj. $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial x}$$

$$20 x^3 a_1 + 12 x^2 y a_2 + 6 x y^2 a_3 + 2 y^3 a_4 + 6 x a_7 + 2 y a_8$$

Izračunamo desnu stranu jednadžbe, tj. izraz za normalno naprezanje u smjeru osi y:

$$\text{Expand}[\sigma_y]$$

$$c^3 d_3 - y^3 d_3 + c d_4 - y d_4$$

Uočimo da budući da lijeva i desna strana moraju biti jednake, neki će koeficijenti s lijeve strane jednadžbe biti jednaki nuli s obzirom da nemaju pripadne članove s jednakim kombinacijama umnoška varijabli x i y s desne strane jednadžbe. Ti koeficijenti su:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$$

Dakle, lijeva strana je:

$$2 a_4 y^3 + 2 a_8 y$$

Slijede dvije jednadžbe iz kojih se mogu izraziti koeficijenti različiti od nule.

Iz prve jednadžbe

$$2 a_4 y^3 = -d_3 y^3$$

možemo izraziti koeficijent d_3 .

$$\text{Solve}[2 a_4 y^3 = d_3 (-y^3), d_3]$$

$$\{\{d_3 \rightarrow -2 a_4\}\}$$

Iz druge jednadžbe

$$2 a_8 y = -d_4 y$$

možemo izraziti koeficijent d_4 .

$$\text{Solve}[2 a_8 y = d_4 (-y), d_4]$$

$$\{\{d_4 \rightarrow -2 a_8\}\}$$

Vidimo da iz izraza za normalno naprezanje u smjeru osi y (desna strana jednadžbe) dobivamo članove

$$d_3 c^3 + d_4 c$$

koje trebamo izjednačiti s drugom derivacijom po x umnoška dodatnog koeficijenta i određene varijable potencijalne funkcije.

Dodatni koeficijent je koeficijent a_{11} dok ta određena varijabla mora biti takva da druga derivacija po y i mješovita derivacija po x i po y budu jednake nuli dok druga derivacija po x mora biti različita od nule. Takva varijabla je x^2 .

Dokažimo navedeno:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} x^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial y \partial y}$$

$$0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} x^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial x \partial y}$$

$$0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial x \partial x}$$

$$2$$

Dakle, potencijalnoj funkciji potrebno je dodati član

$$a_{11} x^2$$

a druga derivacija tog člana je

$$2 a_{11}$$

iz toga slijedi jednačba

$$2 a_{11} = d_3 c^3 + d_4 c$$

iz koje možemo izraziti koeficijent a_{11}

$$\text{Solve}[2 a_{11} = c^3 d_3 + c d_4, a_{11}]$$

$$\left\{ \left\{ a_{11} \rightarrow \frac{1}{2} (c^3 d_3 + c d_4) \right\} \right\}$$

■ Maxwellova jednačba

Iz prijašnjih izraza (iz izraza za normalno naprezanje u smjeru osi x i posmično naprezanje) proizlazi:

$$a_4 \neq 0$$

$$a_8 \neq 0$$

Prema tome druga jednačba dobivena iz Maxwellove jednačbe

$$a_2 + a_4 + 5 a_6 = 0$$

je zadovoljena ako je

$$a_2 = 0$$

$$a_2 = 0;$$

odnosno, sada možemo iz te jednačbe izraziti koeficijent a_6

$$\text{Solve}[a_2 + a_4 + 5 a_6 = 0, a_6]$$

$$\left\{ \left\{ a_6 \rightarrow -\frac{a_4}{5} \right\} \right\}$$

i zbog toga se u izrazu za pojavljuje još jedan član koji se u teoriji pravih štapova ne pojavljuje.

Određivanje potrebnih koeficijenata

■ Korištenje uvjeta na rubu $x=l$

Integral posmičnog naprezanja po dužini ruba mora biti jednak poprečnoj sili na istom mjestu, odnosno reakciji ležaja budući da se na upravo na tom mjestu nalazi ležaj

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = q l$$

Izračunajmo najprije integral

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy$$

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy$$

$$\frac{4}{3} c^3 \times d_2$$

Vidimo da se u rješenju tog integrala nalazi koeficijent d_2 kojeg ćemo dobiti iz prethodno navedene jednakosti.

$$\text{Solve}\left[\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = l q, d_2\right]$$

$$\left\{\left\{d_2 \rightarrow \frac{3 l q}{4 c^3 x}\right\}\right\}$$

Naravno, uvrštavamo $x=l$

$$x = l$$

$$l$$

Dobivamo izraz za koeficijent d_2

$$d_2 = -\frac{3 l q}{4 c^3 x}$$

$$-\frac{3 q}{4 c^3}$$

Clear[x]

■ Korištenje prethodno dobivenih izraza za ostale koeficijente

Prethodno dobivene izraze za ostale konstante koristimo redom:

$$a_4 = \frac{d_2}{6}$$

$$-\frac{q}{8c^3}$$

$$a_8 = -\frac{1}{2}c^2 d_2$$

$$\frac{3q}{8c}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5}$$

$$\frac{q}{40c^3}$$

$$d_1 = -6a_4$$

$$\frac{3q}{4c^3}$$

$$a_{10} = \frac{d_1 l^2}{6}$$

$$\frac{l^2 q}{8c^3}$$

$$d_3 = -2a_4$$

$$\frac{q}{4c^3}$$

$$d_4 = -2a_8$$

$$-\frac{3q}{4c}$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(c^3 d_3 + c d_4)$$

$$-\frac{q}{4}$$

Izražena potencijalna funkcija

■ Opći izraz za potencijalnu funkciju

Clear[Φ]

Izraziti ćemo potencijalnu funkciju Φ te pritom nećemo zaboraviti dodati i član $a_{11} x^2$ na osnovno pretpostavljenu potencijalnu funkciju pa će potencijalna funkcija Φ izgledati:

$$\Phi = a_1 x^5 + a_2 x^4 y + a_3 x^3 y^2 + a_4 x^2 y^3 + a_5 x y^4 + a_6 y^5 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^2$$

■ Izražena potencijalna funkcija

Uvrstiti ćemo sve (poznate) koeficijente:

$$a_1 = 0;$$

$$a_2 = 0;$$

$$a_3 = 0;$$

$$a_4 = -\frac{q}{8c^3};$$

$$a_5 = 0;$$

$$a_6 = \frac{q}{40c^3};$$

$$a_7 = 0;$$

$$a_8 = \frac{3q}{8c};$$

$$a_9 = 0;$$

$$a_{10} = \frac{l^2 q}{8c^3};$$

$$a_{11} = -\frac{q}{4};$$

$$\Phi(x, y) = a_1 x^5 + a_2 x^4 y + a_3 x^3 y^2 + a_7 x^3 + a_4 x^2 y^3 + a_8 x^2 y + a_{11} x^2 + a_5 x y^4 + a_9 x y^2 + a_6 y^5 + a_{10} y^3$$

$$-\frac{qx^2}{4} + \frac{3qx^2y}{8c} + \frac{l^2 qy^3}{8c^3} - \frac{qx^2y^3}{8c^3} + \frac{qy^5}{40c^3}$$

Izražene komponente naprezanja

U nekima od slijedećih izraza koristit ćemo izraz

$$J = \frac{2}{3} c^3$$

$$J = \frac{2c^3}{3};$$

■ Izražena normalna naprezanja u smjeru osi x

Izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

Izračun preko druge derivacije potencijalne funkcije po y, tj izračun $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y \partial y}$$

$$\frac{3l^2 q y}{4c^3} - \frac{3q x^2 y}{4c^3} + \frac{q y^3}{2c^3}$$

Ako uvrstimo izraz za J i preko njega izrazimo naprezanje:

Simplify[% J]

$$\frac{1}{6} q y (3l^2 - 3x^2 + 2y^2)$$

dobivamo izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = \frac{1}{6} \frac{q y}{J} (3l^2 - 3x^2 + 2y^2)$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} (l^2 - x^2) y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} y^3$$

Izračun preko na početku pretpostavljenog izraza za raspodjelu naprezanja, tj izračun σ_x :

σ_x

$$\frac{3q(l^2 - x^2)y}{4c^3}$$

Ako uvrstimo izraz za J i preko njega izrazimo naprezanje:

% J

$$\frac{1}{2} q (l^2 - x^2) y$$

dobivamo

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} (l^2 - x^2) y$$

Vidimo da preko dva izraza dobivamo različiti rezultat. Razlika u rezultatu je član

$$\frac{1}{3} \frac{q}{J} y^3$$

koji je posljedica uvođenja člana u osnovno pretpostavljenu funkciju.

■ Izražena posmična naprezanja

Izraz za posmično naprezanje:

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Izračun preko mješovite druge derivacije potencijalne funkcije po x i po y, tj izračun $-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$:

$$-\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$-\frac{3 q x}{4 c} + \frac{3 q x y^2}{4 c^3}$$

Ako uvrstimo izraz za J i preko njega izrazimo naprezanje:

Simplify[% J]

$$\frac{1}{2} q x (-c^2 + y^2)$$

dobivamo izraz za posmično naprezanje:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{q}{J} x (y^2 - c^2)$$

Izračun preko na početku pretpostavljenog izraza za raspodjelu naprezanja , tj izračun τ_{xy} :

τ_{xy}

$$-\frac{3 q x (c^2 - y^2)}{4 c^3}$$

Ako uvrstimo izraz za J i preko njega izrazimo naprezanje:

Simplify[% J]

$$-\frac{1}{2} q x (c^2 - y^2)$$

dobivamo

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{q}{J} x(y^2 - c^2)$$

isti rezultat.

■ Izražena normalna naprezanja u smjeru osi y

Izraz za normalno naprezanje u smjeru osi y:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Izračun preko druge derivacije potencijalne funkcije po x, tj izračun $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial x}$$

$$-\frac{q}{2} + \frac{3qy}{4c} - \frac{qy^3}{4c^3}$$

Ako uvrstimo izraz za J i preko njega izrazimo naprezanje:

Simplify[% J]

$$-\frac{1}{6} q (c - y)^2 (2c + y)$$

dobivamo izraz za normalno naprezanje u smjeru osi y:

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{J} (c - y)^2 (2c + y)$$

Izračun preko na početku pretpostavljenog izraza za raspodjelu naprezanja, tj izračun σ_y :

σ_y

$$-\frac{3q(c-y)}{4c} + \frac{q(c^3 - y^3)}{4c^3}$$

Ako uvrstimo izraz za J i preko njega izrazimo naprezanje:

Simplify[% J]

$$-\frac{1}{6} q (c - y)^2 (2c + y)$$

dobivamo

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{J} (c - y)^2 (2c + y)$$

isti rezultat.

■ Kontrola izraza određenim uvjetima

Napravit ćemo dvije kontrole dobivenih izraza za naprezanje. Prva kontrola biti će kontrola izraza za naprezanje u smjeru osi y , a druga kontrola obuhvatit će sve izraze za naprezanje uvrštavajući ih u Maxwellovu jednadžbu.

Na početku smo postavili očite poznate rubne uvjete za normalno naprezanje u smjeru osi y koje iznose:

$$\sigma_y(y = +c) = 0$$

$$\sigma_y(y = -c) = -q$$

U opći izraz za naprezanje u smjeru osi y uvrstit ćemo navedene y koordinate i tako provjeriti sam izraz:

$$y = c;$$

$$\sigma_y = -\frac{q(c-y)^2(2c+y)}{6J}$$

$$0$$

$$y = -c;$$

$$\sigma_y = -\frac{q(c-y)^2(2c+y)}{6J}$$

$$-q$$

Clear[y]

Uvrštavanjem izraza za naprezanja u Maxwellovu jednadžbu te dokazujemo da je jednakost točna.

$$\sigma_x = \frac{qy(l^2 - x^2)}{2J} + \frac{qy^3}{3J};$$

$$\sigma_y = -\frac{q(c-y)^2(2c+y)}{6J};$$

$$\tau_{xy} = \frac{qx(y^2 - c^2)}{2J};$$

$$M(x_, y_) := \sigma_x + 2\tau_{xy} + \sigma_y$$

$$2\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y}$$

$$0$$

Korekcija izraza za normalna naprezanja u smjeru osi x

Clear[J]

Svi rubni uvjeti su zadovoljeni osim uvjet na rubu $x=+l$ i $x=-l$ za normalno naprezanje. Ako u izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x uvrstimo $x=+l$, prvi član izraza jednak je nuli no drugi član ostaje i jednak je:

$$x = l;$$

$$\sigma_x = \frac{q y (l^2 - x^2)}{2 J} + \frac{q y^3}{3 J}$$

$$\frac{q y^3}{3 J}$$

Analogno ako u izraz za normalno naprezanje u smjeru osi x uvrstimo $x=-l$, prvi član izraza jednak je nuli no drugi član ostaje i jednak je:

$$x = -l;$$

$$\sigma_x = \frac{q y (l^2 - x^2)}{2 J} + \frac{q y^3}{3 J}$$

$$\frac{q y^3}{3 J}$$

Clear[x]

što daje moment savijanja

$$M_1 = \int_{-c}^{+c} \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 \cdot y \cdot d y$$

$$\int_{-c}^{+c} \frac{y (q y^3)}{3 J} d y$$

$$\frac{2 c^5 q}{15 J}$$

Djelovanjem tog momenta koji daje nelinearnu raspodjelu naprezanja na spomenutim rubovima može se u određenoj mjeri ukloniti ako se na istim rubovima priloži moment jednake veličine no s linearnom raspodjelom naprezanja. Za takav je moment (čisto savijanje) normalno naprezanje u smjeru osi y i posmično naprezanje jednako nuli.

Drugim riječima, možemo izjednačiti:

$$M_1 = d_5 I$$

i iz toga možemo dobiti koeficijent d_5 :

$$\text{Solve} \left[\frac{2 c^5 q}{15 J} = \frac{2 c^3 d_5}{3}, d_5 \right]$$

$$\left\{ \left\{ d_5 \rightarrow \frac{c^2 q}{5 J} \right\} \right\}$$

Normalno naprezanje u smjeru osi x sada je:

$$\sigma_x = \frac{q y (l^2 - x^2)}{2 J} + \frac{q y^3}{3 J} - d_5 y$$

$$-\frac{c^2 q y}{5 J} + \frac{q (l^2 - x^2) y}{2 J} + \frac{q y^3}{3 J}$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} (l^2 - x^2) y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} \left(y^2 - \frac{3}{5} c^2 \right) y$$

dok ostale komponente napreznja ostaju nepromijenjene.

■ Komentar izraza za normalno napreznje u smjeru osi x

Kao što je vidljivo, točno se rješenje razlikuje od onog koje daje teorija pravih štapova. Prvi član u izrazu za normalno naprezanje u smjeru osi x odgovara Bernoulli-Navierovoj hipotezi ravnih poprečnih presjeka, dok je drugi član posljedica postojanja normalnog napreznja u smjeru osi y koje se u teoriji pravih štapova ne uzima u obzir. Za uobičajene dimenzije nosača na dva ležaja taj je utjecaj neznatan te se u praksi može zanemariti što se vidi iz omjera drugog i prvog člana za $x=0$ i $y=c$.

$$x = 0;$$

$$y = c;$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} (l^2 - x^2) y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} \left(y^2 - \frac{3}{5} c^2 \right) y$$

$$\frac{2 c^3 q}{15 J} + \frac{c l^2 q}{2 J}$$

Drugi član:

$$\frac{2}{15} \frac{q}{J} c^3$$

Prvi član:

$$\frac{1}{2} \frac{q}{J} l^2 c$$

Omjer drugog i prvog člana:

$$\frac{2c^3 q}{15J} / \frac{cl^2 q}{2J}$$

$$\frac{4c^2}{15l^2}$$

Već za omjer

$$\frac{c}{l} < \frac{1}{5}$$

razlika između tačnog rješenja i onog prema hipotezi ravnih presjeka nije veća od 1,1%.

Treba, međutim, reći da i to rješenje problema savijanja visokostijenog nosača nije sasvim tačno jer je na rubu $x=l$ poništeno djelovanje momenta, no ipak na istom rubu preostaje razlika napreznja između raspodjele napreznja po linearnom zakonu i po paraboli trećeg stupnja.

■ Analiza izraza za normalno napreznje u smjeru osi x

Clear[x, y]

Važno je uočiti normalno napreznje u smjeru osi x u srednjem uspravnom presjeku nosača. Tako sukladno izrazu za normalno napreznje u smjeru osi x uz uvrštenje $x=0$ to dobivamo:

Maksimalno vlačno napreznje dobiva se tako da se u prethodnu relaciju uvrsti $y=c$ a ono iznosi:

$$x = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} \left(y^2 - \frac{3}{5} c^2 \right) y$$

$$\frac{l^2 q y}{2J} + \frac{q y \left(-\frac{3c^2}{5} + y^2 \right)}{3J}$$

Važan podatak o stanju napreznja su i ekstremne vrijednosti normalnog napreznja u smjeru osi x. Razlikujemo najveće normalno napreznje koje se javlja na dnu srednjeg presjeka i koje je pozitivno od najvećeg normalnog napreznja koje se javlja na vrhu srednjeg presjeka i koje je negativnog predznaka. Najveće normalno napreznje pozitivnog predznaka nazivamo maksimalno vlačno napreznje dok ono negativnog predznaka nazivamo maksimalno tlačno napreznje.

Maksimalno vlačno napreznje dobiva se tako da se u prethodnu relaciju uvrsti $y=c$ a ono iznosi:

$$y = c;$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} \left(y^2 - \frac{3}{5} c^2 \right) y$$

$$\frac{2c^3 q}{15J} + \frac{cl^2 q}{2J}$$

Maksimalno tlačno naprezanje dobiva se tako da se u prethodnu relaciju uvrsti $y=-c$ a ono iznosi:

$$y = -c;$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{J} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} \left(y^2 - \frac{3}{5} c^2 \right) y$$

$$-\frac{2c^3 q}{15J} - \frac{cl^2 q}{2J}$$

Uočavamo da su maksimalno vlačno naprezanje i maksimalno tlačno naprezanje istog iznosa samo suprotnog predznaka.

■ Analiza izraza za posmično naprezanje

Clear[x, y, J]

Bitno je također znati ekstremne vrijednosti posmičnog naprezanja. Razlikujemo maksimalno posmično naprezanje, dakle posmično naprezanje pozitivnog predznaka i minimalno posmično naprezanje odnosno posmično naprezanje negativnog predznaka. Vidjeti ćemo da su maksimalno i minimalno posmično naprezanje istog iznosa samo suprotnog predznaka.

Izraz za maksimalno posmično naprezanje dobit ćemo ako u opći izraz za posmično naprezanje uvrstimo $x=l$ i $y=0$ pa dobivamo:

$$x = l;$$

$$y = 0;$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2J} (c^2 - y^2) x$$

$$\frac{c^2 l q}{2J}$$

Izraz za minimalno posmično naprezanje dobit ćemo ako u opći izraz za posmično naprezanje uvrstimo $x=-l$ i $y=0$ pa dobivamo:

$$x = -l;$$

$$y = 0;$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2J} (c^2 - y^2) x$$

$$-\frac{c^2 l q}{2J}$$



6.2. KOD PROGRAMA „VINO“ – JEZGRA

(* IZRAZI ZA NAPREZANJA *)

(* Normalno naprezanje u smjeru osi x *)

$$nna = \frac{1}{2} \frac{q}{J} (l^2 - x^2) y + \frac{1}{3} \frac{q}{J} \left(y^2 - \frac{3}{5} c^2 \right) y;$$

(* Normalno naprezanje u smjeru osi y *)

$$nny = -\frac{1}{6} \frac{q}{J} (c - y)^2 (2c + y);$$

(* Posmično naprezanje *)

$$pn = \frac{q x (y^2 - c^2)}{2J};$$

(* OPĆE KARAKTERISTIKE NOSAČA *)

$$l = L/2; c = h/2; J = 2/3 c^3;$$

(* PRORAČUN NAPREZANJA PO KOORDINATAMA TOČAKA SVIH PRESJEKA *)

(* Presjek A – proračun naprezanja po koordinatama točaka *)

$$x = -l;$$

$$y = -c; nna // N; nny // N; pn // N;$$

$$X1A = \{x, y, nna\};$$

$$Y1A = \{x, y, nny\};$$

$$P1A = \{x, y, pn\};$$

$$y = -2/3 c; nna // N; nny // N; pn // N;$$

```

X2A = {x, y, nna};
Y2A = {x, y, nnb};
P2A = {x, y, pn};
y = -c/3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X3A = {x, y, nna};
Y3A = {x, y, nnb};
P3A = {x, y, pn};
y = 0; nna // N; nnb // N; pn // N;
X4A = {x, y, nna};
Y4A = {x, y, nnb};
P4A = {x, y, pn};
y = c/3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X5A = {x, y, nna};
Y5A = {x, y, nnb};
P5A = {x, y, pn};
y = 2/3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X6A = {x, y, nna};
Y6A = {x, y, nnb};
P6A = {x, y, pn};
y = c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X7A = {x, y, nna};
Y7A = {x, y, nnb};
P7A = {x, y, pn};
Clear[x, y];

```

(* Presjek B – proračun naprežanja po koordinatama točaka *)

```

x = -l/2;
y = -c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X1B = {x, y, nna};
Y1B = {x, y, nnb};
P1B = {x, y, pn};
y = -2/3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X2B = {x, y, nna};
Y2B = {x, y, nnb};
P2B = {x, y, pn};
y = -c/3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X3B = {x, y, nna};

```

```

Y3B = {x, y, nnb};
P3B = {x, y, pn};
y = 0; nna // N; nnb // N; pn // N;
X4B = {x, y, nna};
Y4B = {x, y, nnb};
P4B = {x, y, pn};
y = c / 3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X5B = {x, y, nna};
Y5B = {x, y, nnb};
P5B = {x, y, pn};
y = 2 / 3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X6B = {x, y, nna};
Y6B = {x, y, nnb};
P6B = {x, y, pn};
y = c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X7B = {x, y, nna};
Y7B = {x, y, nnb};
P7B = {x, y, pn};
Clear[x, y];

```

(* Presjek C – proračun naprežanja po koordinatama točaka *)

```

x = 0;
y = -c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X1C = {x, y, nna};
Y1C = {x, y, nnb};
P1C = {x, y, pn};
y = -2 / 3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X2C = {x, y, nna};
Y2C = {x, y, nnb};
P2C = {x, y, pn};
y = -c / 3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X3C = {x, y, nna};
Y3C = {x, y, nnb};
P3C = {x, y, pn};
y = 0; nna // N; nnb // N; pn // N;
X4C = {x, y, nna};
Y4C = {x, y, nnb};

```

```

P4C = {x, y, pn};
y = c / 3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X5C = {x, y, nna};
Y5C = {x, y, nnb};
P5C = {x, y, pn};
y = 2 / 3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X6C = {x, y, nna};
Y6C = {x, y, nnb};
P6C = {x, y, pn};
y = c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X7C = {x, y, nna};
Y7C = {x, y, nnb};
P7C = {x, y, pn};
Clear[x, y];

```

(* Presjek D – proračun naprežanja po koordinatama točka *)

```

x = l / 2;
y = -c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X1D = {x, y, nna};
Y1D = {x, y, nnb};
P1D = {x, y, pn};
y = -2 / 3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X2D = {x, y, nna};
Y2D = {x, y, nnb};
P2D = {x, y, pn};
y = -c / 3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X3D = {x, y, nna};
Y3D = {x, y, nnb};
P3D = {x, y, pn};
y = 0; nna // N; nnb // N; pn // N;
X4D = {x, y, nna};
Y4D = {x, y, nnb};
P4D = {x, y, pn};
y = c / 3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X5D = {x, y, nna};
Y5D = {x, y, nnb};
P5D = {x, y, pn};

```



```

y = 2/3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X6D = {x, y, nna};
Y6D = {x, y, nnb};
P6D = {x, y, pn};
y = c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X7D = {x, y, nna};
Y7D = {x, y, nnb};
P7D = {x, y, pn};
Clear[x, y];

```

(* Presjek E – proračun naprežanja po koordinatama točaka *)

```

x = l;
y = -c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X1E = {x, y, nna};
Y1E = {x, y, nnb};
P1E = {x, y, pn};
y = -2/3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X2E = {x, y, nna};
Y2E = {x, y, nnb};
P2E = {x, y, pn};
y = -c/3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X3E = {x, y, nna};
Y3E = {x, y, nnb};
P3E = {x, y, pn};
y = 0; nna // N; nnb // N; pn // N;
X4E = {x, y, nna};
Y4E = {x, y, nnb};
P4E = {x, y, pn};
y = c/3; nna // N; nnb // N; pn // N;
X5E = {x, y, nna};
Y5E = {x, y, nnb};
P5E = {x, y, pn};
y = 2/3 c; nna // N; nnb // N; pn // N;
X6E = {x, y, nna};
Y6E = {x, y, nnb};
P6E = {x, y, pn};
y = c; nna // N; nnb // N; pn // N;

```

```

X7E = {x, y, nna};
Y7E = {x, y, nnb};
P7E = {x, y, pn};
Clear[x, y];

```

(* ISPIS VRIJEDNOSTI NAPREZANJA PO PRESJECIMA *)

(* Normalno naprezanje u smjeru osi x po presjecima *)

```

XNDA = {X1A[[3]], X2A[[3]], X3A[[3]], X4A[[3]], X5A[[3]],
        X6A[[3]], X7A[[3]]};
XNDB = {X1B[[3]], X2B[[3]], X3B[[3]], X4B[[3]], X5B[[3]], X6B[[3]],
        X7B[[3]]};
XNDC = {X1C[[3]], X2C[[3]], X3C[[3]], X4C[[3]], X5C[[3]],
        X6C[[3]], X7C[[3]]};
XNDD = {X1D[[3]], X2D[[3]], X3D[[3]], X4D[[3]], X5D[[3]],
        X6D[[3]], X7D[[3]]};
XNDE = {X1E[[3]], X2E[[3]], X3E[[3]], X4E[[3]], X5E[[3]], X6E[[3]],
        X7E[[3]]};

```

(* Normalno naprezanje u smjeru osi y po presjecima *)

```

YNDA = {Y1A[[3]], Y2A[[3]], Y3A[[3]], Y4A[[3]], Y5A[[3]],
        Y6A[[3]], Y7A[[3]]};
YNDB = {Y1B[[3]], Y2B[[3]], Y3B[[3]], Y4B[[3]], Y5B[[3]], Y6B[[3]],
        Y7B[[3]]};
YNDC = {Y1C[[3]], Y2C[[3]], Y3C[[3]], Y4C[[3]], Y5C[[3]],
        Y6C[[3]], Y7C[[3]]};
YNDD = {Y1D[[3]], Y2D[[3]], Y3D[[3]], Y4D[[3]], Y5D[[3]],
        Y6D[[3]], Y7D[[3]]};
YNDE = {Y1E[[3]], Y2E[[3]], Y3E[[3]], Y4E[[3]], Y5E[[3]], Y6E[[3]],
        Y7E[[3]]};

```

(* Posmično naprezanje po presjecima *)

```

PNDA = {P1A[[3]], P2A[[3]], P3A[[3]], P4A[[3]], P5A[[3]],
        P6A[[3]], P7A[[3]]};

```

```

PNDB = {P1B[[3]], P2B[[3]], P3B[[3]], P4B[[3]], P5B[[3]], P6B[[3]],
        P7B[[3]]};
PNDC = {P1C[[3]], P2C[[3]], P3C[[3]], P4C[[3]], P5C[[3]], P6C[[3]],
        P7C[[3]]};
PNDD = {P1D[[3]], P2D[[3]], P3D[[3]], P4D[[3]], P5D[[3]], P6D[[3]],
        P7D[[3]]};
PNDE = {P1E[[3]], P2E[[3]], P3E[[3]], P4E[[3]], P5E[[3]], P6E[[3]],
        P7E[[3]]};

```

(* TABLIČNI PRIKAZ NAPREZANJA *)

(* Tablica – Normalno naprezanje u smjeru osi x po presjecima *)

```

TablicaX =
Style[TableForm[{XNDA, XNDB, XNDC, XNDD, XNDE},
  TableHeadings →
  {"Naprezanje – Presjek A", "Naprezanje – Presjek B",
   "Naprezanje – Presjek C", "Naprezanje – Presjek D",
   "Naprezanje – Presjek E"},
  {"Tocka 1", "Tocka 2", "Tocka 3", "Tocka 4", "Tocka 5",
   "Tocka 6", "Tocka 7"}}, TableAlignments → Center],
{Blue}, FontFamily → "TimesNewRoman"];

```

(* Tablica – Normalno naprezanje u smjeru osi y po presjecima *)

```

TablicaY =
Style[TableForm[{YNDA, YNDB, YNDC, YNDD, YNDE},
  TableHeadings →
  {"Naprezanje – Presjek A", "Naprezanje – Presjek B",
   "Naprezanje – Presjek C", "Naprezanje – Presjek D",
   "Naprezanje – Presjek E"},
  {"Tocka 1", "Tocka 2", "Tocka 3", "Tocka 4", "Tocka 5",
   "Tocka 6", "Tocka 7"}}, TableAlignments → Center],
{Blue}, FontFamily → "TimesNewRoman"];

```

(* Tablica – Posmično naprezanje po presjecima *)

```

TablicaP =

```

```

Style[TableForm[{PNDA, PNDB, PNDC, PNDD, PNDE},
  TableHeadings →
    {"Naprezanje – Presjek A", "Naprezanje – Presjek B",
      "Naprezanje – Presjek C", "Naprezanje – Presjek D",
      "Naprezanje – Presjek E"},
    {"Tocka 1", "Tocka 2", "Tocka 3", "Tocka 4", "Tocka 5",
      "Tocka 6", "Tocka 7"}}, TableAlignments → Center],
{Blue}, FontFamily → "TimesNewRoman"];

```

(* GRAFIČKI PRIKAZ NAPREZANJA *)

(* Pridruživanje vrijednosti normalnih naprezanja u smjeru osi x koordinatama točaka presjeka *)

```

GXNDA = {X1A, X2A, X3A, X4A, X5A, X6A, X7A};
GXNDB = {X1B, X2B, X3B, X4B, X5B, X6B, X7B};
GXNDC = {X1C, X2C, X3C, X4C, X5C, X6C, X7C};
GXNDD = {X1D, X2D, X3D, X4D, X5D, X6D, X7D};
GXNDE = {X1E, X2E, X3E, X4E, X5E, X6E, X7E};

```

(* Pridruživanje vrijednosti normalnih naprezanja u smjeru osi y koordinatama točaka presjeka *)

```

GYNDA = {Y1A, Y2A, Y3A, Y4A, Y5A, Y6A, Y7A};
GYNDB = {Y1B, Y2B, Y3B, Y4B, Y5B, Y6B, Y7B};
GYNDC = {Y1C, Y2C, Y3C, Y4C, Y5C, Y6C, Y7C};
GYNDD = {Y1D, Y2D, Y3D, Y4D, Y5D, Y6D, Y7D};
GYNDE = {Y1E, Y2E, Y3E, Y4E, Y5E, Y6E, Y7E};

```

(* Pridruživanje vrijednosti posmičnih naprezanja koordinatama točaka presjeka *)

```

GPNDA = {P1A, P2A, P3A, P4A, P5A, P6A, P7A};
GPNDB = {P1B, P2B, P3B, P4B, P5B, P6B, P7B};
GPNDC = {P1C, P2C, P3C, P4C, P5C, P6C, P7C};
GPNDD = {P1D, P2D, P3D, P4D, P5D, P6D, P7D};
GPNDE = {P1E, P2E, P3E, P4E, P5E, P6E, P7E};

```

(* Grafički prikaz točaka vrijednosti normalnih naprezanja u smjeru osi x i koordinata točaka presjeka *)

XPlotTocke =

```
ListPointPlot3D[{GXNDA, GXNDB, GXNDC, GXNDD, GXNDE},
  Filling → Axis, Axes → None, AxesLabel → {"x", "y", "z"},
  TicksStyle → Orange,
  FillingStyle → {Blue, Red, Green, Orange, Purple}, Boxed → False,
  PlotStyle → PointSize[0.01], BoxStyle → Directive[Dashed, Orange],
  BoxRatios → {1, 1, 1}];
```

(* Grafičko definiranje referentne plohe za prikaz točaka vrijednosti normalnih naprezanja u smjeru osi x i koordinata točaka presjeka *)

XPlotPlohe =

```
Graphics3D[{Opacity[0.05], Gray,
  Polygon[{{-l, h/2, 0}, {-l, -h/2, 0}, {l, -h/2, 0}, {l, h/2, 0}}]}];
```

(* Konačni grafički prikaz dijagrama normalnih naprezanja u smjeru osi x *)

XGraf =

```
Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Blue, BSplineCurve[GXNDA],
  Red, AbsolutePointSize[4]}],
  Graphics3D[{Thickness[0.005], Red, BSplineCurve[GXNDB],
  Red, AbsolutePointSize[4]}],
  Graphics3D[{Thickness[0.005], Green, BSplineCurve[GXNDC],
  Red, AbsolutePointSize[4]}],
  Graphics3D[{Thickness[0.005], Orange, BSplineCurve[GXNDD],
  Red, AbsolutePointSize[4]}],
  Graphics3D[{Thickness[0.005], Purple, BSplineCurve[GXNDE],
  Red, AbsolutePointSize[4]}], XPlotTocke, XPlotPlohe,
  BoxRatios → {1, 1, 1}, Boxed → False];
```

(* Grafički prikaz točaka vrijednosti normalnih naprezanja u smjeru osi y i koordinata točaka presjeka *)

YPlotTocke =

```
ListPointPlot3D[{GYNDA, GYNDB, GYNDC, GYNDD, GYNDE},
```

Filling → Axis, Axes → None, AxesLabel → {"x", "y", "z"},
 TicksStyle → Orange,
 FillingStyle → {Blue, Red, Green, Orange, Purple}, Boxed → False,
 PlotStyle → PointSize[0.01], BoxStyle → Directive[Dashed, Orange],
 BoxRatios → {1, 1, 1};

(* Grafičko definiranje referentne plohe za prikaz točaka vrijednosti normalnih napreznja u smjeru osi y i koordinata točaka presjeka *)

YPlotPlohe =
 Graphics3D[{Opacity[0.05], Gray,
 Polygon[{{-l, h/2, 0}, {-l, -h/2, 0}, {l, -h/2, 0}, {l, h/2, 0}}]}];

(* Konačni grafički prikaz dijagrama normalnih napreznja u smjeru osi y *)

YGraf =
 Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Blue, BSplineCurve[GYNDA],
 Red, AbsolutePointSize[4]},
 Graphics3D[{Thickness[0.005], Red, BSplineCurve[GYNDB],
 Red, AbsolutePointSize[4]},
 Graphics3D[{Thickness[0.005], Green, BSplineCurve[GYNDC],
 Red, AbsolutePointSize[4]},
 Graphics3D[{Thickness[0.005], Orange, BSplineCurve[GYNDD],
 Red, AbsolutePointSize[4]},
 Graphics3D[{Thickness[0.005], Purple, BSplineCurve[GYNDE],
 Red, AbsolutePointSize[4]}, YPlotTocke, YPlotPlohe,
 BoxRatios → {1, 1, 1}, Boxed → False];

(* Grafički prikaz točaka vrijednosti posmičnih napreznja koordinata točaka presjeka *)

PPlotTocke =
 ListPointPlot3D[{GPNDA, GPNDB, GPNDC, GPNDD, GPNDE},
 Filling → Axis, Axes → None, AxesLabel → {"x", "y", "z"},
 TicksStyle → Orange,
 FillingStyle → {Blue, Red, Green, Orange, Purple}, Boxed → False,
 PlotStyle → PointSize[0.01], BoxStyle → Directive[Dashed, Orange],

`BoxRatios → {1, 1, 1};`

(* Grafičko definiranje referentne plohe za prikaz točaka vrijednosti posmičnih napreznja i koordinata točaka presjeka *)

`PPlotPlohe =`

`Graphics3D[{Opacity[0.05], Gray,
Polygon[{{-l, h/2, 0}, {-l, -h/2, 0}, {l, -h/2, 0}, {l, h/2, 0}}]}];`

(* Konačni grafički prikaz dijagrama posmičnih napreznja *)

`PosmikGraf =`

`Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Blue, BSplineCurve[GPNDA],
Red, AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Red, BSplineCurve[GPNDB],
Red, AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Green, BSplineCurve[GPNDC],
Red, AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Orange, BSplineCurve[GPNDD],
Red, AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Purple, BSplineCurve[GPNDE],
Red, AbsolutePointSize[4]}], PPlotTocke, PPlotPlohe,
BoxRatios → {1, 1, 1}, Boxed → False];`

(* Konačni grafički prikaz dijagrama normalnih napreznja u smjeru osi x – spajanje vrijednosti napreznja pravcima *)

`XLOMGraf =`

`Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Blue, Line[GXNDA], Red,
AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Red, Line[GXNDB], Red,
AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Green, Line[GXNDC], Red,
AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Orange, Line[GXNDD], Red,
AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Purple, Line[GXNDE], Red,
AbsolutePointSize[4]}], XPlotTocke, XPlotPlohe,
BoxRatios → {1, 1, 1}, Boxed → False];`

(* Konačni grafički prikaz dijagrama normalnih napreznja u smjeru osi y – spajanje vrijednosti napreznja pravcima *)

YLOMGraf =

```
Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Blue, Line[GYNDA], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Red, Line[GYNDB], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Green, Line[GYNDC], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Orange, Line[GYNDD], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Purple, Line[GYNDE], Red,
  AbsolutePointSize[4]}], YPlotTocke, YPlotPlohe,
BoxRatios → {1, 1, 1}, Boxed → False];
```

(* Konačni grafički prikaz dijagrama posmičnih napreznja – spajanje vrijednosti napreznja pravcima *)

PosmikLOMGraf =

```
Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Blue, Line[GPNDA], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Red, Line[GPNDB], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Green, Line[GPNDC], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Orange, Line[GPNDD], Red,
  AbsolutePointSize[4]}],
Graphics3D[{Thickness[0.005], Purple, Line[GPNDE], Red,
  AbsolutePointSize[4]}], PPlotTocke, PPlotPlohe,
BoxRatios → {1, 1, 1}, Boxed → False];
```




6.3. PROGRAM „VINO“

VISOKOSTIJNI NOSAČ

Rješenje problema

Model visokostijenog nosača s karakteristikama

- Opis
- Dimenzije visokostijenog nosača i opterećenje

Normalno naprezanje u smjeru osi x

- Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi x u točkama presjeka
- Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka

Normalno naprezanje u smjeru osi y

- Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi y u točkama presjeka
- Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka

Posmično naprezanje

- Tablica vrijednosti posmičnog naprezanja u točkama presjeka
- Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka

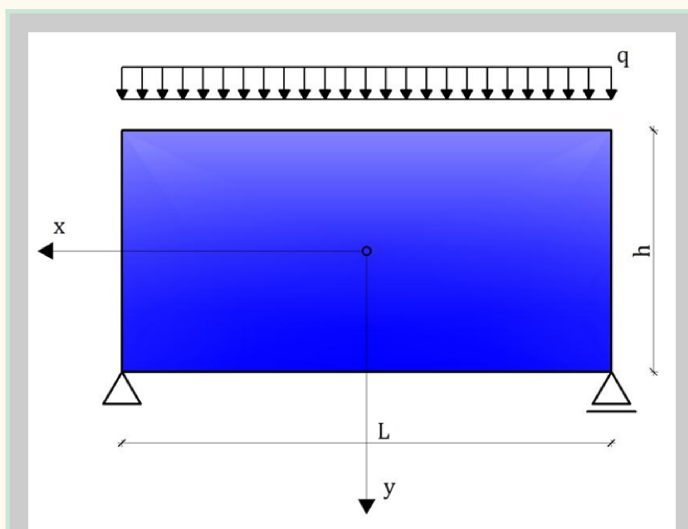
VISOKOSTIJNI NOSAČ

Rješenje problema

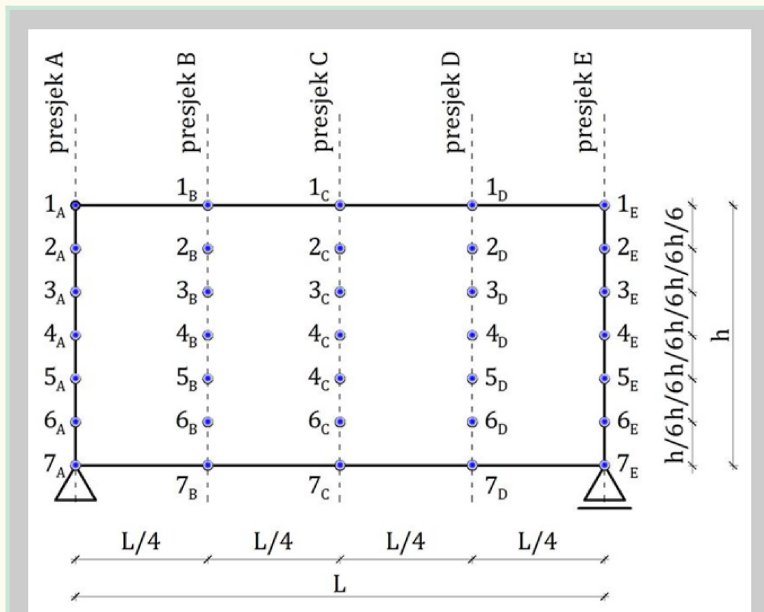
Model visokostijenog nosača s karakteristikama

■ Opis

Sljedeći program računa naprezanja (normalna naprezanja u smjeru osi x , normalna naprezanja u smjeru osi y te posmična naprezanja) za visokostijeni nosač, odnosno razmjerno uski i visoki nosač na koji djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje u ravnini nosača pod uvjetom da je statički sustav visoke grede jednostavno oslonjeni nosač (prosta greda).



Program nudi izračun naprezanja za presjeke, odnosno točke prikazane na slici:



■ Dimenzije viskostijenog nosača i opterećenje

Potrebno je upisati slijedeće podatke:

- dužina viskostijenog nosača, L
- visina viskostijenog nosača, h
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje, q

$L =$;

$h =$;

$q =$;

Normalno naprezanje u smjeru osi x

■ Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi x u točkama presjeka

TablicaX

■ Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka

Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

XGraf

Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

XLOMGraf

Normalno naprezanje u smjeru osi y

- **Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi y u točkama presjeka**

TablicaY

- **Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka**

Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

YGraf

Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

YLOMGraf

Posmično naprezanje

- **Tablica vrijednosti posmičnog naprezanja u točkama presjeka**

TablicaP

- **Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka**

Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

PosmikGraf

Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

PosmikLOMGraf



6.4. RIJEŠEN ZADATAK 1. VISOKOSTIJENOG NOSAČA U PROGRAMU „VINO“

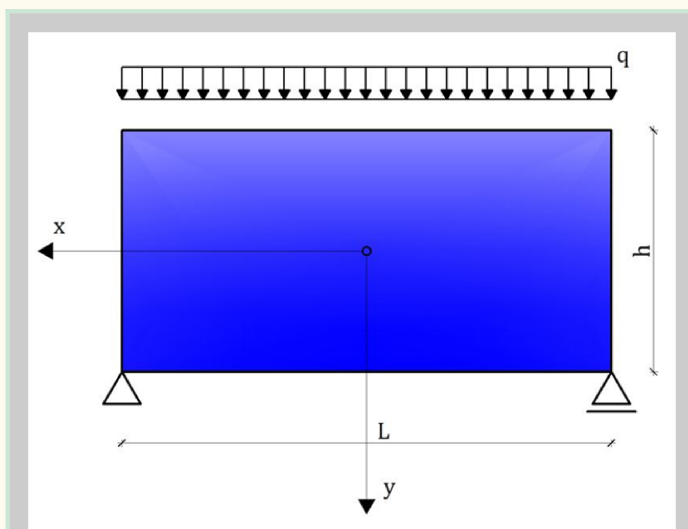
VISOKOSTIJNI NOSAČ

Rješenje problema

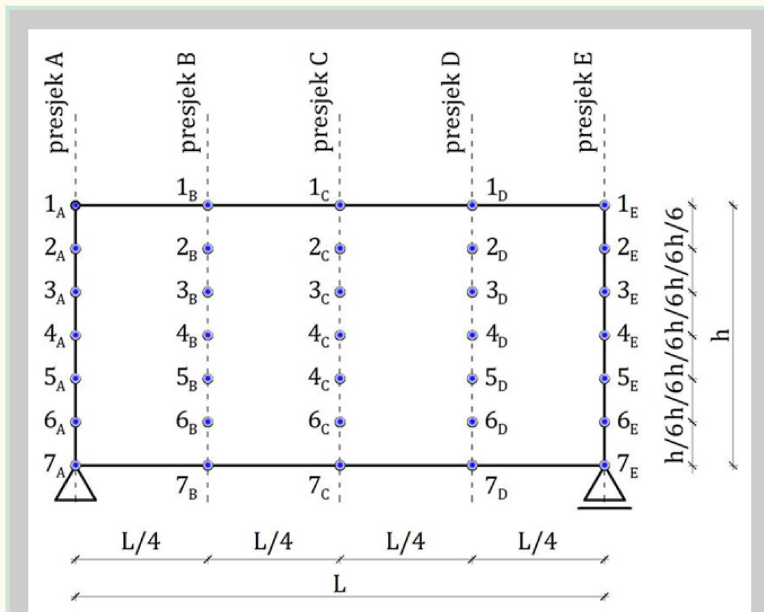
Model visokostijenog nosača s karakteristikama

■ Opis

Sljedeći program računa naprezanja (normalna naprezanja u smjeru osi x , normalna naprezanja u smjeru osi y te posmična naprezanja) za visokostijeni nosač, odnosno razmjerno uski i visoki nosač na koji djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje u ravnini nosača pod uvjetom da je statički sustav visoke grede jednostavno oslonjeni nosač (prosta greda).



Program nudi izračun naprezanja za presjeke, odnosno točke prikazane na slici:



■ Dimenzije viskostijenog nosača i opterećenje

Potrebno je upisati slijedeće podatke:

- dužina viskostijenog nosača, L
- visina viskostijenog nosača, h
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje, q

$$L = 1;$$

$$h = 1;$$

$$q = 1;$$

Normalno naprezanje u smjeru osi x

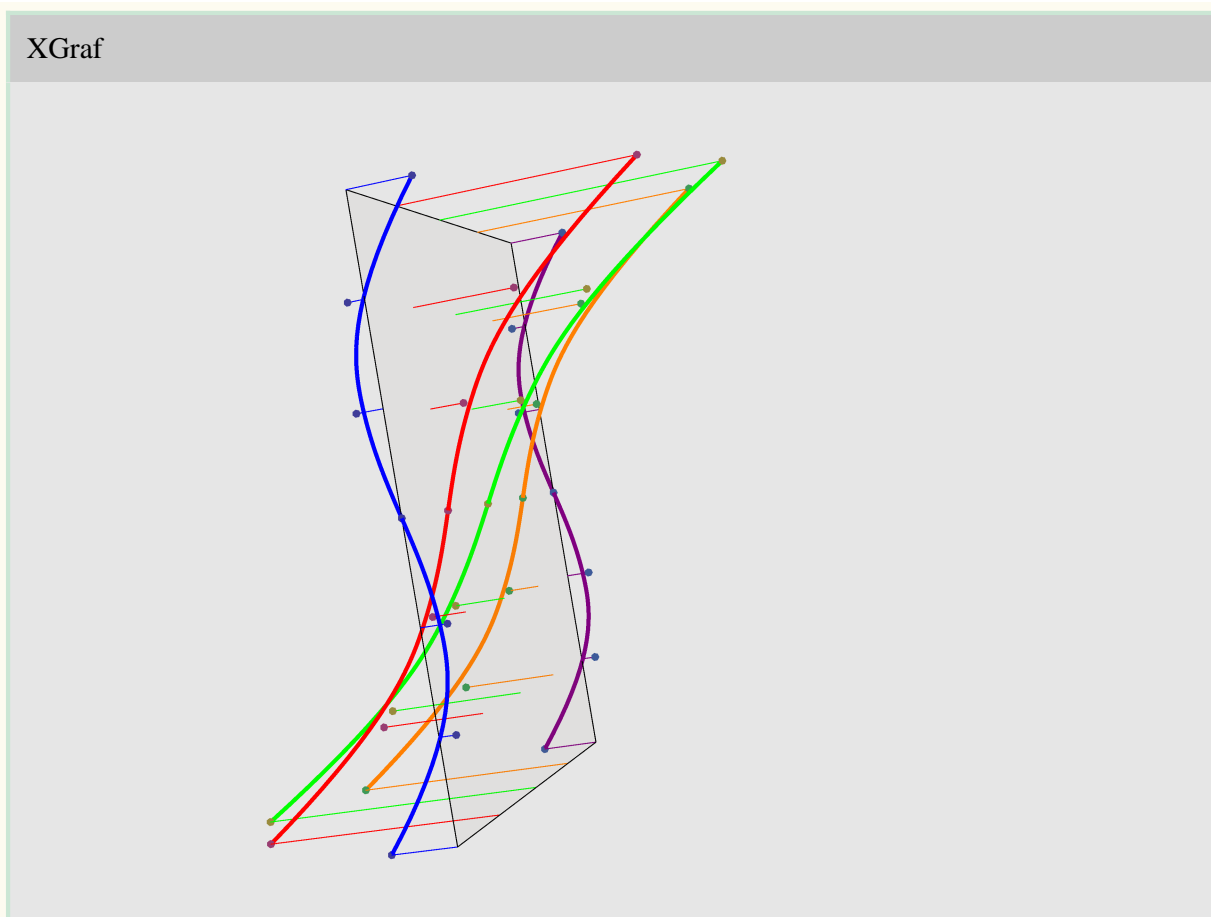
■ Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi x u točkama presjeka

TablicaX

	Točka 1	Točka 2	Točka 3	Točka 4	Točka 5	Točka 6	Točka 7
Naprezanje – Presjek A	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{135}$	$\frac{11}{135}$	0	$-\frac{11}{135}$	$-\frac{7}{135}$	$\frac{1}{5}$
Naprezanje – Presjek B	$-\frac{61}{80}$	$-\frac{349}{1080}$	$-\frac{229}{2160}$	0	$\frac{229}{2160}$	$\frac{349}{1080}$	$\frac{61}{80}$
Naprezanje – Presjek C	$-\frac{19}{20}$	$-\frac{121}{270}$	$-\frac{91}{540}$	0	$\frac{91}{540}$	$\frac{121}{270}$	$\frac{19}{20}$
Naprezanje – Presjek D	$-\frac{61}{80}$	$-\frac{349}{1080}$	$-\frac{229}{2160}$	0	$\frac{229}{2160}$	$\frac{349}{1080}$	$\frac{61}{80}$
Naprezanje – Presjek E	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{135}$	$\frac{11}{135}$	0	$-\frac{11}{135}$	$-\frac{7}{135}$	$\frac{1}{5}$

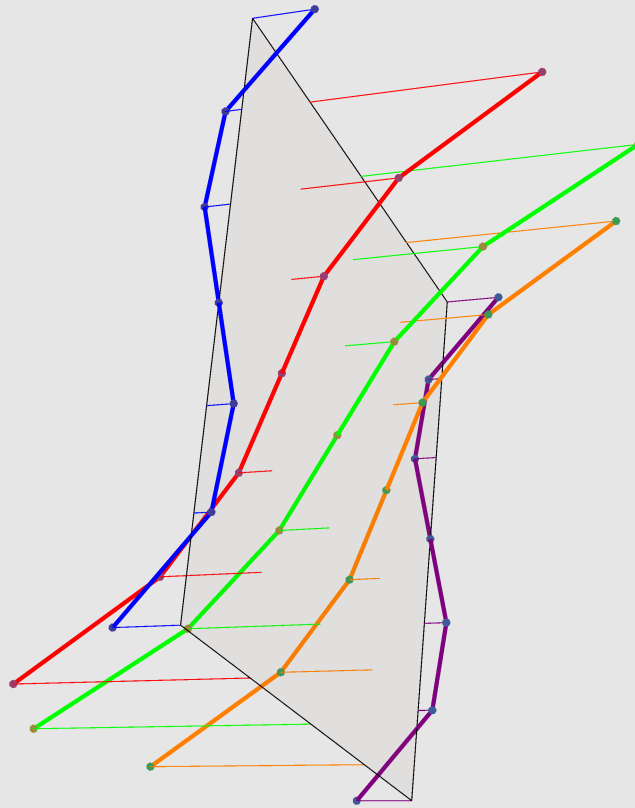
■ Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka

Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:



Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

XLOMGraf



Normalno naprezanje u smjeru osi y

■ Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi y u točkama presjeka

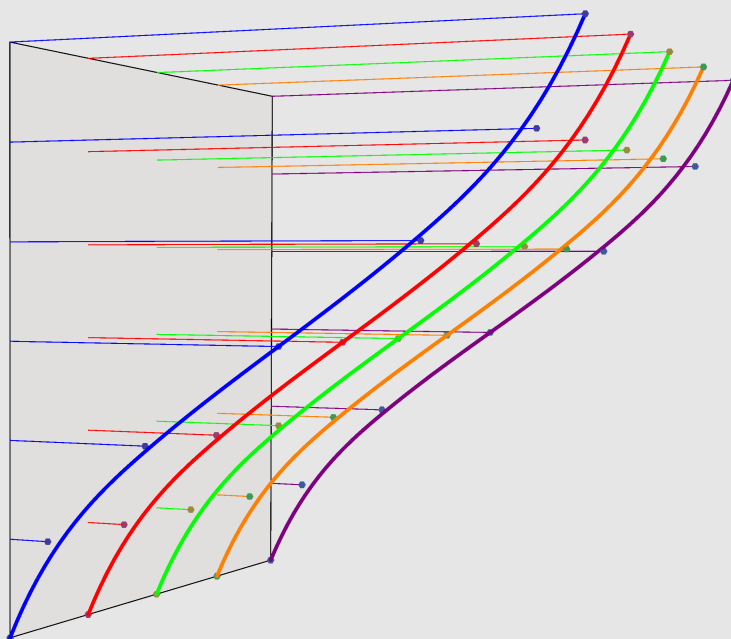
TablicaY

	Točka 1	Točka 2	Točka 3	Točka 4	Točka 5	Točka 6	Točka 7
Naprezanje – Presjek A	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek B	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek C	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek D	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek E	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0

■ Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka

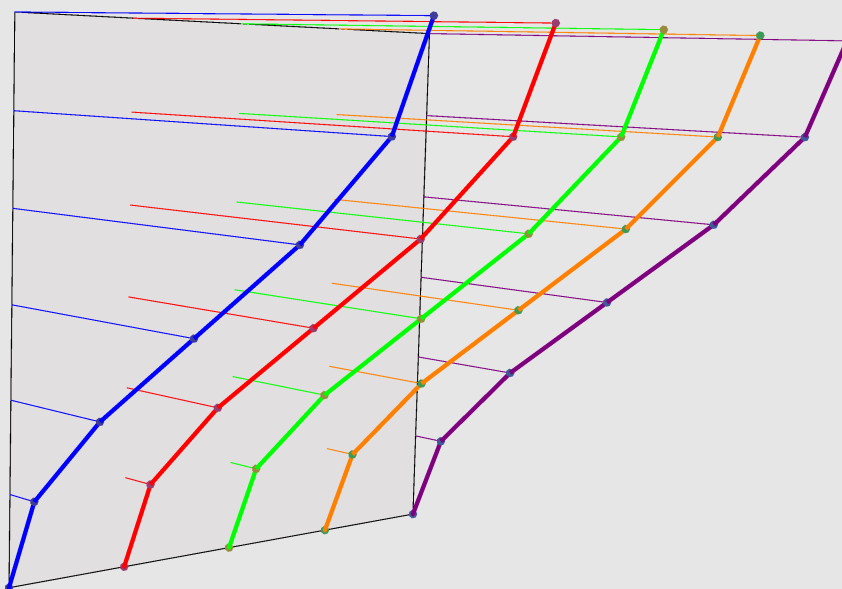
Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

YGraf



Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

YLOMGraf



Posmično naprezanje

■ Tablica vrijednosti posmičnog naprezanja u točkama presjeka

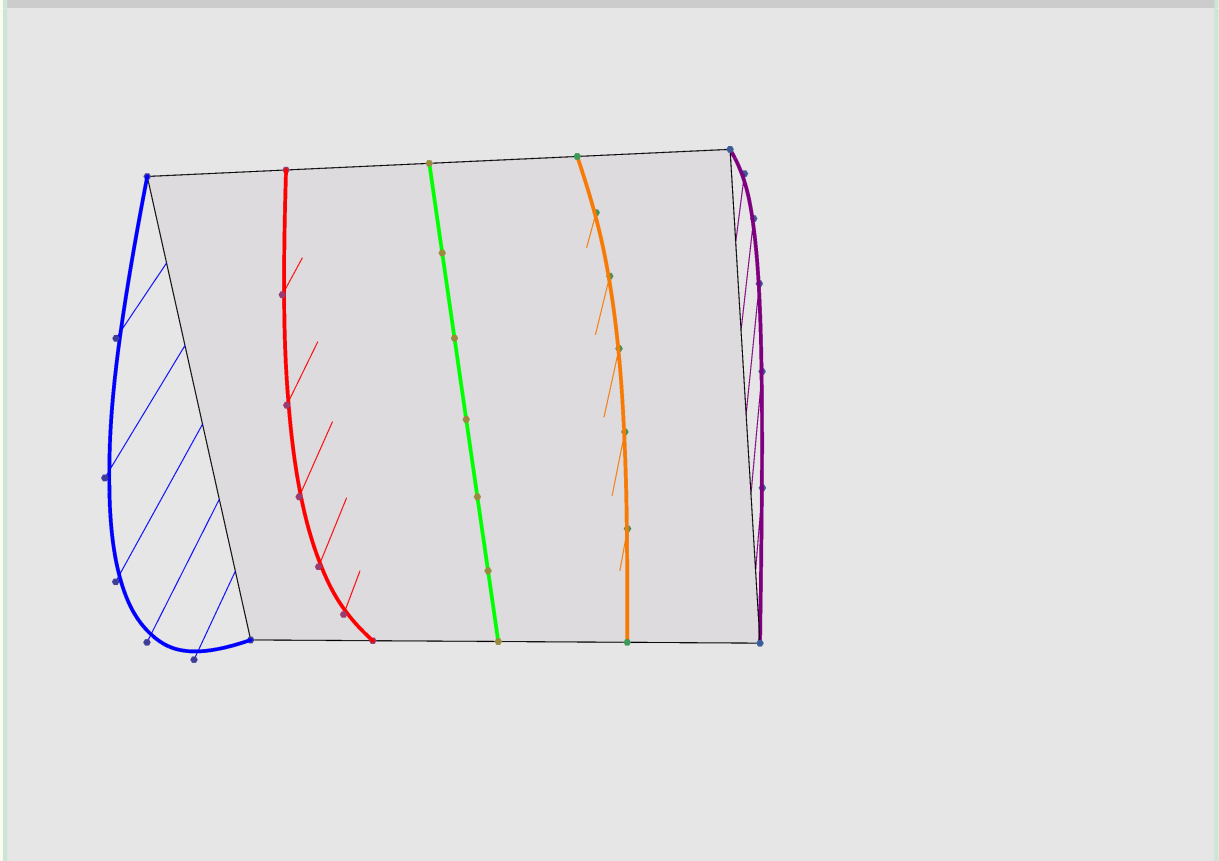
TablicaP

	Točka 1	Točka 2	Točka 3	Točka 4	Točka 5	Točka 6	Točka 7
Naprezanje – Presjek A	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	0
Naprezanje – Presjek B	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	0
Naprezanje – Presjek C	0	0	0	0	0	0	0
Naprezanje – Presjek D	0	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{24}$	0
Naprezanje – Presjek E	0	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$	0

■ Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka

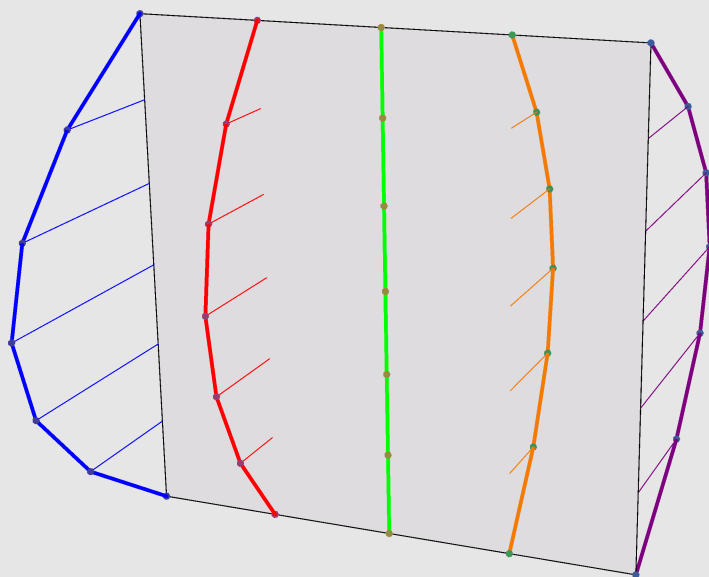
Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

PosmikGraf



Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravicima:

PosmikLOMGraf





6.5. RIJEŠEN ZADATAK 2. VISOKOSTIJENOG NOSAČA U PROGRAMU „VINO“

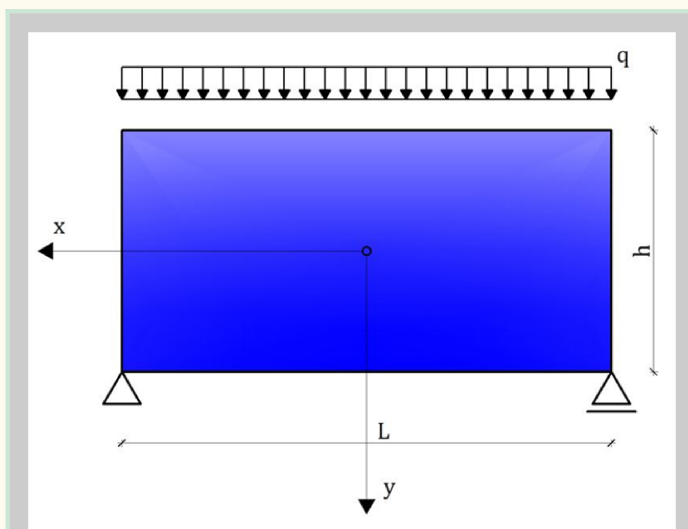
VISOKOSTIJNI NOSAČ

Rješenje problema

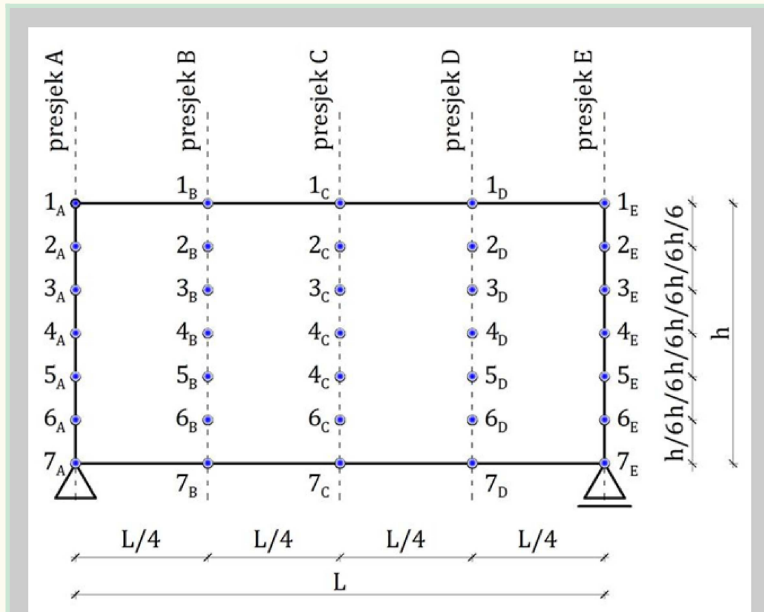
Model visokostijenog nosača s karakteristikama

■ Opis

Sljedeći program računa naprezanja (normalna naprezanja u smjeru osi x , normalna naprezanja u smjeru osi y te posmična naprezanja) za visokostijeni nosač, odnosno razmjerno uski i visoki nosač na koji djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje u ravnini nosača pod uvjetom da je statički sustav visoke grede jednostavno oslonjeni nosač (prosta greda).



Program nudi izračun naprezanja za presjeke, odnosno točke prikazane na slici:



■ Dimenzije visokostijenog nosača i opterećenje

Potrebno je upisati slijedeće podatke:

- dužina visokostijenog nosača, L
- visina visokostijenog nosača, h
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje, q

$$L = 1;$$

$$h = 2;$$

$$q = 1;$$

Normalno naprezanje u smjeru osi x

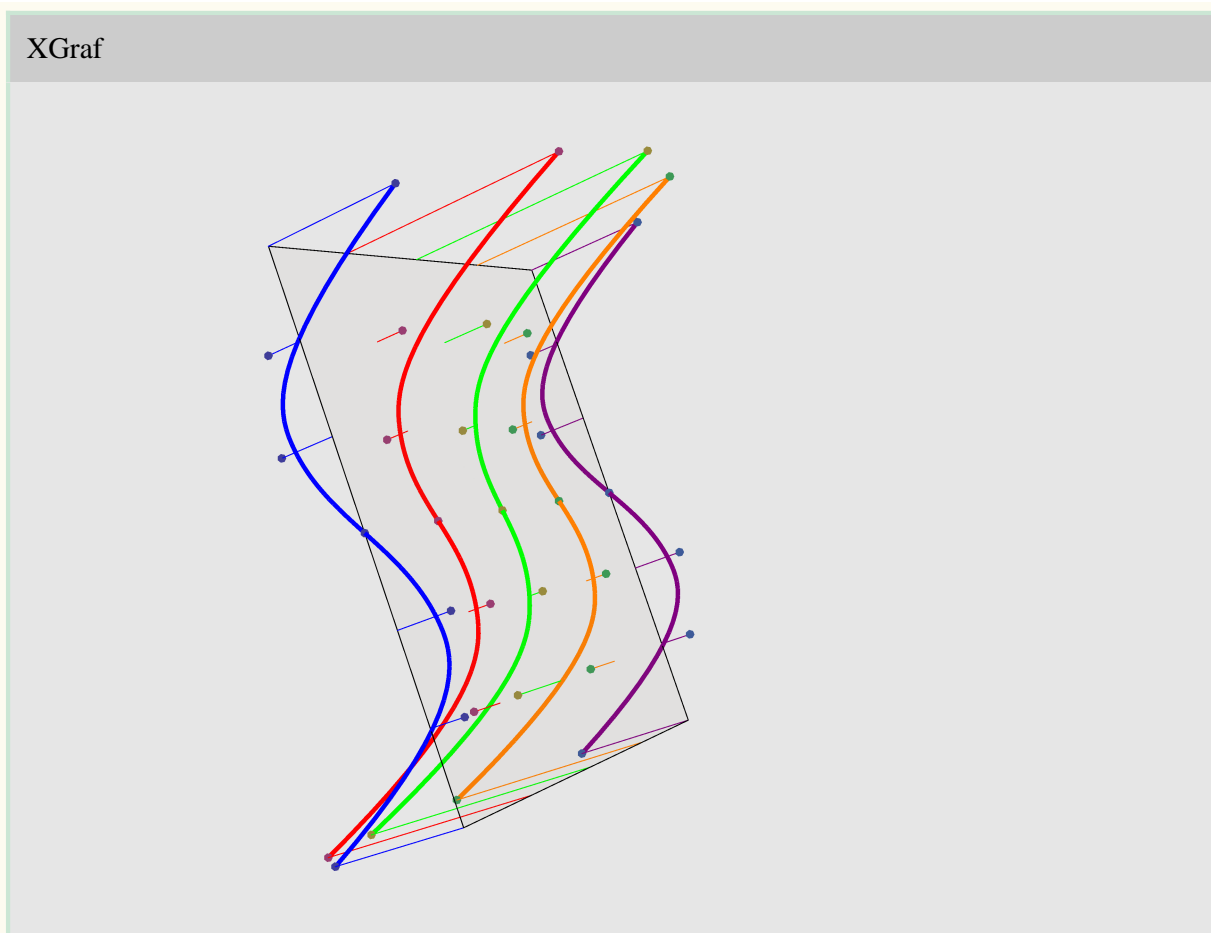
■ Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi x u točkama presjeka

TablicaX

	Točka 1	Točka 2	Točka 3	Točka 4	Točka 5	Točka 6	Točka 7
Naprezanje – Presjek A	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{135}$	$\frac{11}{135}$	0	$-\frac{11}{135}$	$-\frac{7}{135}$	$\frac{1}{5}$
Naprezanje – Presjek B	$-\frac{109}{320}$	$-\frac{181}{4320}$	$\frac{299}{8640}$	0	$-\frac{299}{8640}$	$\frac{181}{4320}$	$\frac{109}{320}$
Naprezanje – Presjek C	$-\frac{31}{80}$	$-\frac{79}{1080}$	$\frac{41}{2160}$	0	$-\frac{41}{2160}$	$\frac{79}{1080}$	$\frac{31}{80}$
Naprezanje – Presjek D	$-\frac{109}{320}$	$-\frac{181}{4320}$	$\frac{299}{8640}$	0	$-\frac{299}{8640}$	$\frac{181}{4320}$	$\frac{109}{320}$
Naprezanje – Presjek E	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{135}$	$\frac{11}{135}$	0	$-\frac{11}{135}$	$-\frac{7}{135}$	$\frac{1}{5}$

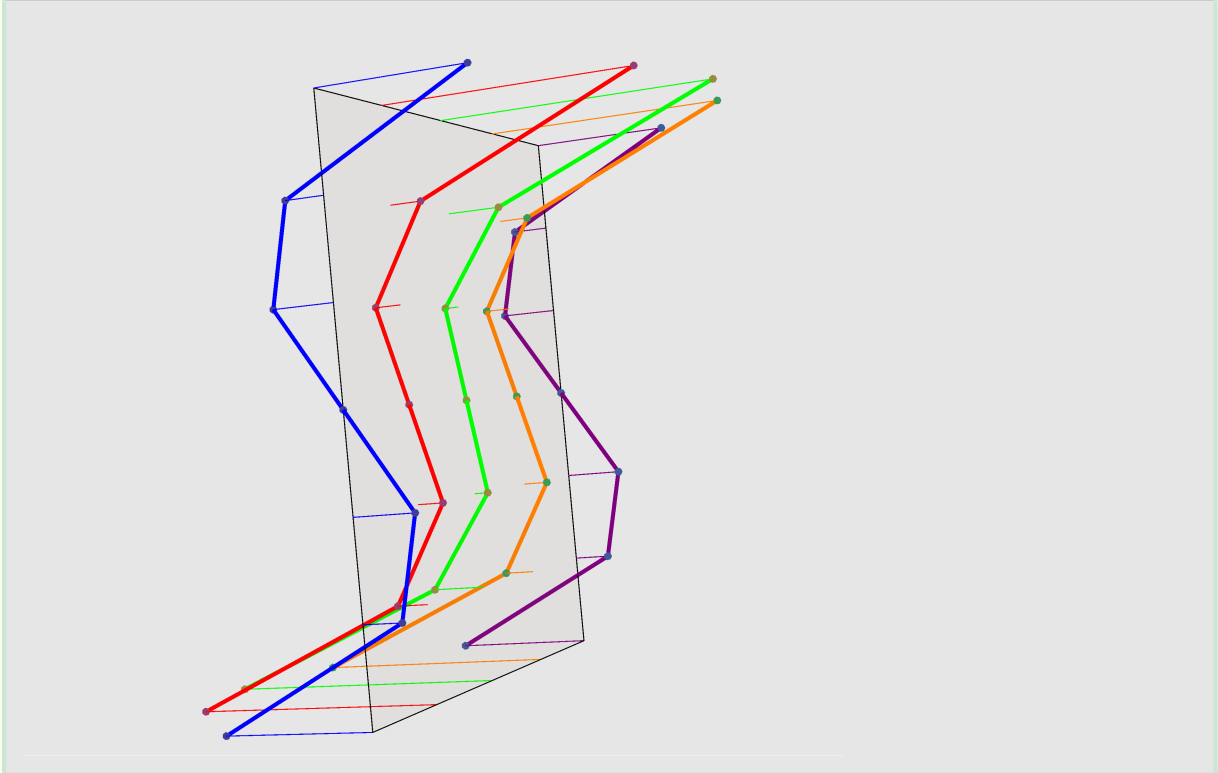
■ Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka

Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:



Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi x po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

XLOMGraf



Normalno naprezanje u smjeru osi y

- Tablica vrijednosti normalnog naprezanja u smjeru osi y u točkama presjeka

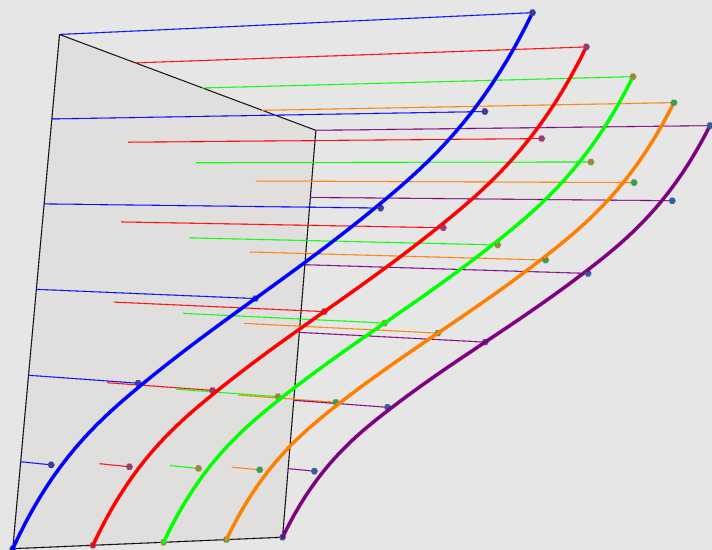
TablicaY

	Točka 1	Točka 2	Točka 3	Točka 4	Točka 5	Točka 6	Točka 7
Naprezanje – Presjek A	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek B	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek C	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek D	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0
Naprezanje – Presjek E	-1	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{20}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{27}$	$-\frac{2}{27}$	0

- Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka

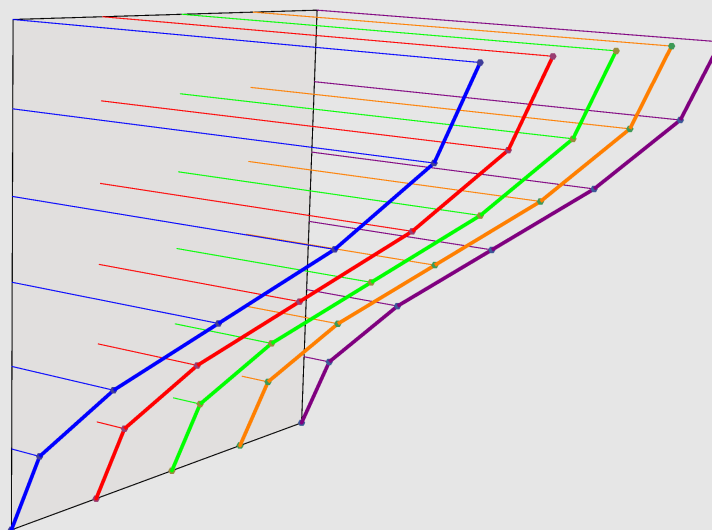
Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

YGraf



Grafički prikaz normalnog naprezanja u smjeru osi y po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravicima:

YLOMGraf



Posmično naprezanje

■ Tablica vrijednosti posmičnog naprezanja u točkama presjeka

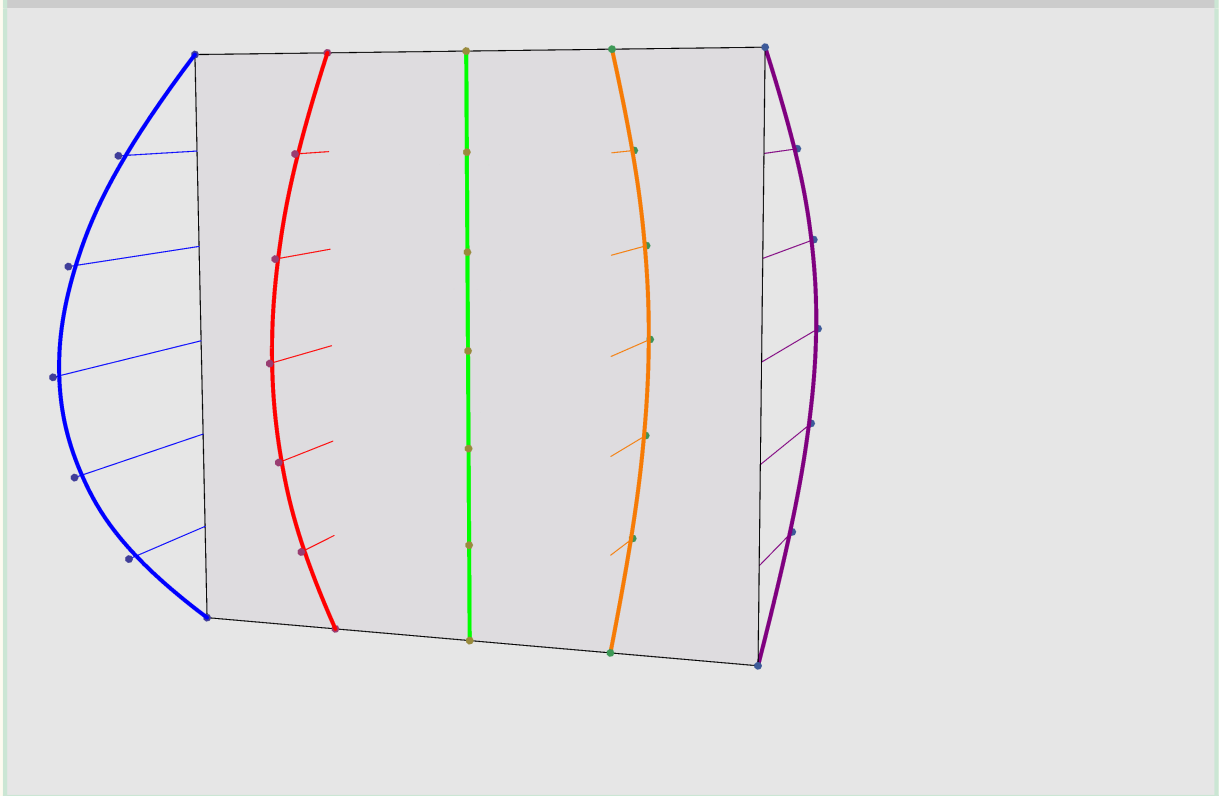
TablicaP

	Točka 1	Točka 2	Točka 3	Točka 4	Točka 5	Točka 6	Točka 7
Naprezanje – Presjek A	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	0
Naprezanje – Presjek B	0	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{48}$	0
Naprezanje – Presjek C	0	0	0	0	0	0	0
Naprezanje – Presjek D	0	$-\frac{5}{48}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{48}$	0
Naprezanje – Presjek E	0	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{24}$	0

■ Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka

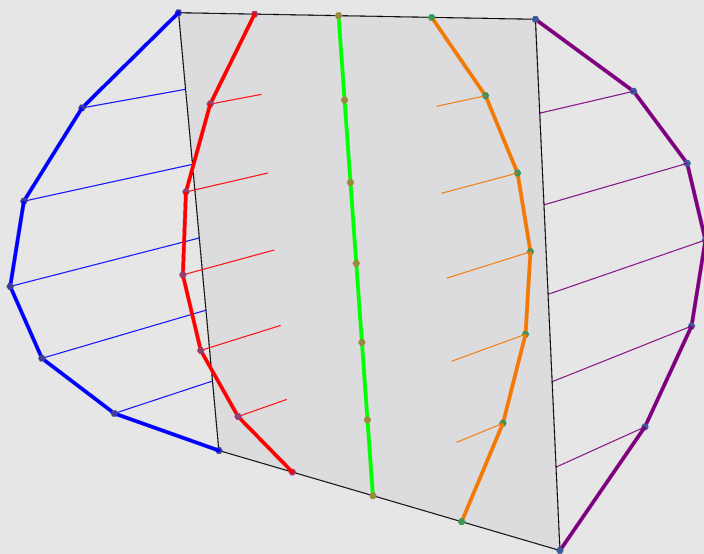
Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja opisane glatkom krivuljom:

PosmikGraf



Grafički prikaz posmičnog naprezanja po točkama presjeka - vrijednosti naprezanja spajane pravcima:

PosmikLOMGraf





6.6. POWER POINT PREZENTACIJA

Primijenjena matematika

SEMINARSKI RAD

MAXWELLOVA JEDNADŽBA

-

VISOKOSTIJENI NOSAČI

Benjamin Medenčević
Ana Šimović

SADRŽAJ

1. MAXWELLOVA JEDNADŽBA
2. VISOKOSTIJENI NOSAČI
3. PROGRAM U MATHEMATICI
4. PRIMJERI VISOKOSTIJENOG NOSAČA
5. ZAKLJUČAK



- Zamislimo najprije jedno cilindrično ili prizmatično tijelo između dva oslonca na stalnom razmaku a , te da opterećenje, itd. stalne veličine djeluje duž izvodnica i nalazi se u ravnoteži tako da nema savijanja
- Ako zamislimo to tijelo razrezano okomito na os z na tanke diskove debljine h , očito je da će se svi diskovi po dužini tog tijela nalaziti u jednakom stanju, tj. da će za sve biti:

$$w = 0 \quad u \neq 0 \quad v \neq 0$$

- gdje su u , v i w pomaci u smjeru x , y i z .
- Kažemo da se ovako deformirano elastično tijelo nalazi u **stanju ravninske deformacije**
- Postoje mnoge konstrukcije ili dijelovi konstrukcija koje se deformiraju na ovakav ili sličan način; na primjer dugi tuneli, cijevi ukopane u stijenu, dugi valjci između ravnih ploča, široki svodovi itd.

- Ako analiziramo takav način deformiranja, Hookeov zakon daje:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

- Prema tome, pojavljuje se komponenta naprezanja u smjeru z, jer je očito da su σ_x i σ_y različiti od nule. Iz toga proizlazi:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x - \nu^2\sigma_y]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x(1 - \nu^2) - \nu\sigma_y(1 + \nu)] = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_y \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu^2\sigma_x - \nu^2\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y(1 - \nu^2) - \nu\sigma_x(1 + \nu)] = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_x \right]$$

- Te dvije jednačbe mogu se pisati i u ovom obliku:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} [\sigma_x - \nu_1 \cdot \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1} [\sigma_y - \nu_1 \cdot \sigma_x]$$

- gdje je

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \qquad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

- Modul posmika ostaje jednak modulu posmika što se vidi iz slijedećeg:

$$G_1 = \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} = \frac{\frac{E}{1 - \nu^2}}{2 \left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \right)} = \frac{\frac{E}{1 - \nu^2}}{2 \left(\frac{1 - \nu + \nu}{1 - \nu} \right)} = \frac{\frac{E}{(1 - \nu)(1 + \nu)}}{2 \cdot \frac{1}{(1 - \nu)}} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = G = \mu$$

- Prema tome, oblik jednadžbi kojima se izražava Hookeov zakon ostaje jednak onome u prostornih problema samo se mijenja veličina elastičnih konstanta kad se deformacije izražavaju naprezanjima (vrijedi za izotropna tijela)
- Promotrimo sada drugu grupu Hookeovih jednadžbi

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \Delta_1$$

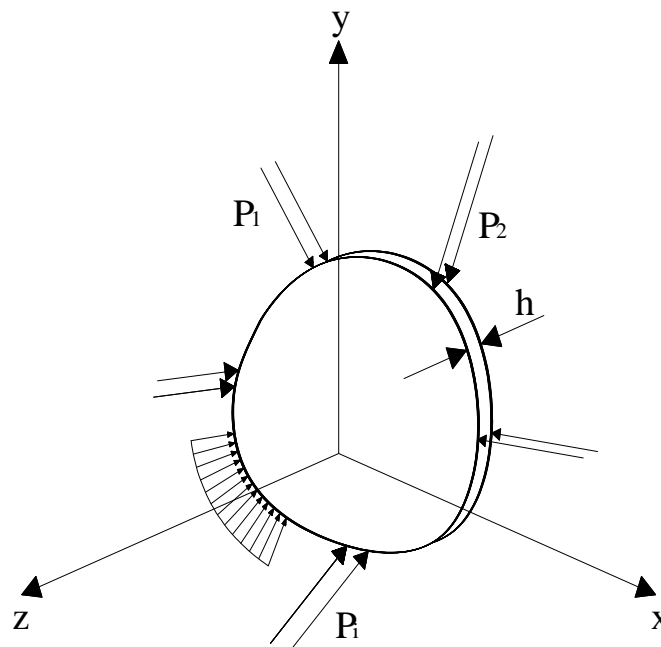
- gdje je:

$$\Delta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

- jer je

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Kako se vidi, Laméove konstante elastičnosti ne mijenjaju se i oblik jednadžbi ostaje jednak onome u prostornih problema
- Odsječeni disk koji je bio predmet promatranja može se promotriti na slici ispod



- Drugu vrstu ravninskih problema nalazimo kod ravnih, tankih ploča u kojih opterećenje djeluje u ravnini ploče
- Pretpostavka je da opterećenje djeluje linijski po širini ploče h
- Ako se koordinatni sustav x, y, z smjestimo tako da ishodište bude u sredini debljine ploče a osi x i y u srednjoj ravnini, onda će pod djelovanjem opterećenja sve tri komponente pomaka u, v, w biti različite od nule (iznimka su točke u srednjoj ravnini za koju je zbog simetrije $w=0$)
- Kako pomaci u smjeru osi z nisu spriječeni, te u tom smjeru ne djeluje vanjsko opterećenje tada je na pobočkama ploče
- Za:

$$z = \pm \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = 0$$

- dok su druga dva smjera naprezanja zavisna od kordinata x, y i z , tj.

$$\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y \neq 0$$

- Ako je debljina ploče mala, može se bez velike pogreške uzeti da veličine σ_x i σ_y ne zavise od koordinate z , već su predstavljene prosječnom veličinom

$$\sigma_x = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'_x dh \qquad \sigma_y = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'_y dh$$

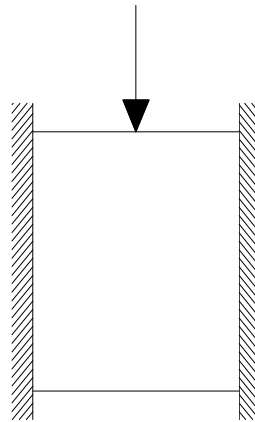
- te da je i treća komponenta normalnog naprezanja po čitavoj debljini ploče

$$\sigma_z = 0$$

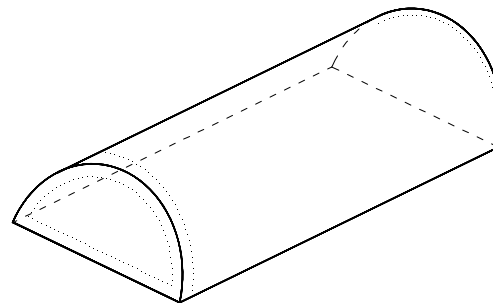
- Takvo stanje naziva se **stanje ravninskog naprezanja**

- Mnogi dijelovi konstrukcija nalaze se u takvom stanju deformiranja, kao npr:

- visokostijeni nosači



- tzv. dijafragme u prostornih konstrukcija itd.



- Hookeove jednađbe za stanje ravninskog naprezanja imaju ovaj oblik:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu}{E} \cdot [\sigma_x + \sigma_y]$$

jer je $\sigma_z = 0$

Naprezanja izražena deformacijama su ovakva:

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_z = 0$$

- Iz posljednje jednačbe dobije se:

$$\lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

- Jer je: $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

- Prva invarijanta deformacija sad se može izraziti ovako:

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{(\lambda + 2\mu) \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\lambda + 2\mu} =$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1$$

- pa je

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x = \lambda \cdot \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x = \frac{2 \cdot \mu \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y = \lambda \cdot \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y = \frac{2\mu \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

- to se može pisati i ovako:

$$\sigma_x = \lambda_1 \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda_1 \cdot \Delta_1 + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_y$$

- gdje imamo novu konstantu:

$$\lambda_1 = \frac{2\mu \cdot \lambda}{\lambda + 2\mu}$$

- Kako se vidi, i ovdje jednadžbe kojima se izražava Hookeov zakon po obliku ostaju jednake onima u prostoru, a u nekih se samo mijenjaju veličine elastičnih konstanta. Modul posmika i ovdje ne mijenja svoje veličine.

• POSMIČNE KOMPONENTE:

- Očito je da se u jednom i u drugom slučaju u ravnini xy pojavljuju posmične komponente deformacije a time i posmična naprezanja koja su međusobno vezana odnosom:

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

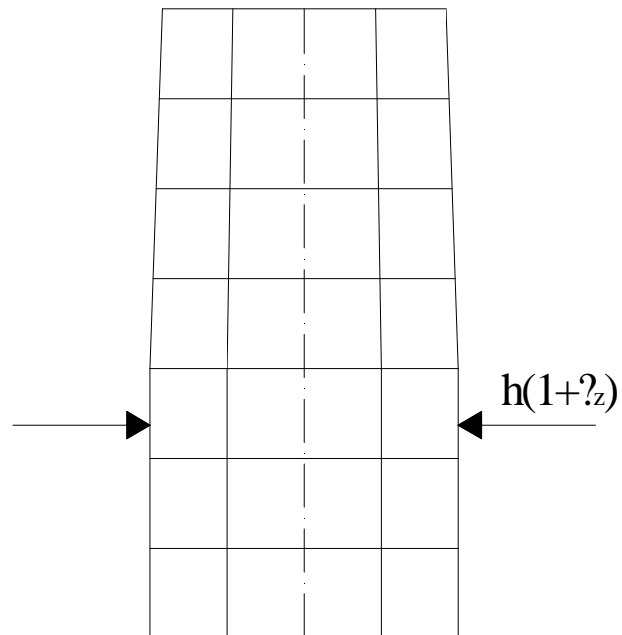
- Lako se može zaključiti da u stanju ravninske deformacije *nema posmičnih deformacija* u ravnini xz i yz , jer svi pravci unutar prizmatičnog ili cilindričnog tijela paralelni s osi tog tijela ostaju paralelni s osi i nakon deformiranja, budući da se svi diskovi na koje smo zamislili razrezano tijelo deformiraju na jednak način a ravnine prereza ostaju normalne na te pravce.

- Drugačije se deformira jedna ploča opterećena jednolično po debljini silama u ravnoteži koje su paralelne s ravninom ploče. Ploča se slobodno deformira u smjeru z, normalnom na ravninu ploče, i relativna je deformacija:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{E} \cdot \Theta_1$$

- No prva invarijanta naprezanja Θ_1 od mjesta do mjesta se mijenja pa se mijenja i debljina ploče $h \cdot (1 + \varepsilon_z)$, a zbog toga se pojavljuju posmične deformacije ε_{xz} i ε_{yx} . Ovo se može primjetiti na slici

- Uz to se pretpostavlja da su deformacije ε_x i ε_y konstantne po debljini ploče h .



- Približnu veličinu posmičnih deformacija u stanju ravninskog naprezanja možemo približno odrediti uz neka pojednostavljenja
- Pretpostavimo najprije da su na jednome mjestu ploče deformacije ε_x i ε_y po debljini ploče konstantne, onda se bez veće pogreške može uzeti da je i deformacija u trećem smjeru z također konstantna, tj. $\varepsilon_z = -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$, a isto tako posmična deformacija ε_{xy} .

Uvjeti kontinuiteta

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

- u tom slučaju dobivaju ovakav oblik:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}$$

$$C_1 = \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)$$

- Uvrštavanjem te jednakosti u jednadžbu dobije se:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + C_1 \right)$$

- No kako ε_z nije funkcija od z zaključujemo da je

$$\frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + C_2 = \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}$$

- i isto tako

$$\frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + C_3 = \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}$$

- Integriraju li se te dvije jednačbe, prva po x , te druga po y , imamo

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} + C_2 x + d_1$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} + C_3 y + d_2$$

- Kako je

$$\varepsilon_{yz} = 0 \quad \text{za} \quad z = 0$$

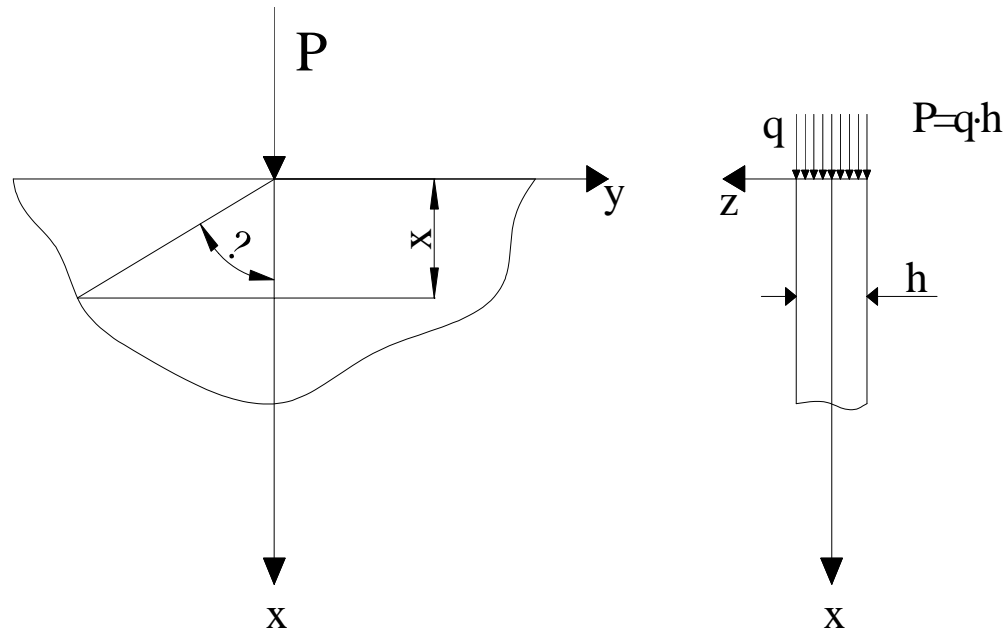
$$\varepsilon_{zx} = 0 \quad \text{za} \quad z = 0$$

Proizlazi da je

$$C_2 = 0 \quad d_1 = 0$$

$$C_3 = 0 \quad d_2 = 0$$

- Da bi se mogla ocijeniti veličina posmičnih naprezanja τ_{yz} i τ_{zx} koja se pojavljuju zbog opisanih deformacija ε_{yz} i ε_{zx} , usporedit ćemo ta posmična naprezanja s posmičnim naprezanjima τ_{xy} za slučaj kad koncentrirana sila djeluje na rubu poluravnine



- Da bi se mogla ocijeniti veličina posmičnih naprezanja τ_{yz} i τ_{zx} koja se pojavljuju zbog opisanih deformacija ε_{yz} i ε_{zx} , usporedit ćemo ta posmična naprezanja s posmičnim naprezanjima τ_{xy} za slučaj kad koncentrirana sila djeluje na rubu poluravnine
- Za takav način opterećenja ta sekundarna posmična naprezanja razmjerno su veća nego u drugim stanja ravninskog naprezanja. Teorija nam daje jednadžbe

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi x} \cdot \cos^4 \Theta$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi x} \cdot \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi x} \cdot \sin \Theta \cos^3 \Theta$$

- Zamjenom komponenata deformacija s komponentama naprezanja u jednadžbi dobiva se za $\Theta = 0$

$$\tau_{zx} = -\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{z}{x^2}$$

- Najveće je naprezanje τ_{zx} za $z = \frac{h}{2}$ ili

$$\max \tau_{zx} = 0,032 \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^2 q$$

- Ako je jednolično podijeljeno opterećenje $q = \frac{P}{h}$ i Poissonov koeficijent $\nu = 0,25$
- No najveće naprezanje τ_{xy} na udaljenosti x od ruba pod kutom je $\Theta = 30^\circ$ ili

$$\max \tau_{xy} = 0,206 \cdot \left(\frac{h}{x}\right) \cdot q$$

- Prema tome, uz sam rub za $x=h$ omjer tih posmičnih napreznja je oko 6,5 a s povećanjem x posmično napreznje τ_{zx} znatno se brže smanjuje nego τ_{xy} tako da je već na udaljenosti $x=10h$ taj omjer oko 65.
- Zbog toga i kod stanja ravninskog napreznja uzima se da je:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

- Čime se sustav diferencijalnih uvjetnih jednažbi smanjuje i svodi na jednak broj kao i za stanje ravninske deformacije.

- Da ponovimo:

- **kod stanja ravninske deformacije:**

komponenta pomaka w ili komponenta deformacije ϵ_z i posmična komponenta deformacija i naprezanja $\epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}, \tau_{yz}$ i τ_{zx} jednake su nuli; sve ostale komponente deformacija i naprezanja različite su od nule i funkcije su samo koordinata x i y .

- **kod stanja ravninskog naprezanja:**

u smjeru okomitom na ravninu ploče normalna komponenta σ_z naprezanja jednaka je nuli, a uzima se da su i posmične komponente deformacija i naprezanja $\epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}, \tau_{yz}$ i τ_{zx} također jednake nuli; različite su od nule sve ostale komponente deformacija i pomaka.

Jednadžbe koje povezuju komponente deformacija s komponentama naprezanja, i obratno, za stanje ravninske deformacije i ravninskog naprezanja ostaju iste po obliku samo se u nekih koeficijenti elastičnosti mijenjaju.

- **Laméove jednadžbe:**

- Sustav jednadžbi ravnoteže koji je prvi izveo Lamé izgleda ovako:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = 0$$

- ili ako se prva jednadžba pomnoži sa \vec{i} , druga sa \vec{j} , treća sa \vec{k} i zatim zbroje, dobiju se iste jednadžbe u vektorskom obliku

$$(\lambda + \mu) \text{grad} \Delta + \mu \nabla^2 \vec{p} + \vec{K} = 0$$

- gdje je $\vec{p} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}$ vektor pomaka, $\vec{K} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$ vektor zapreminske sile a $\Delta = \text{div } p$, tako da se jednadžba može pisati i u ovom obliku:

$$[(\lambda + \mu) \text{grad div} + \mu \nabla^2] \cdot \vec{p} + \vec{K} = 0$$

- Opće diferencijalne jednačbe Laméa i Michella jednake su za obje vrste ravninskih problema po obliku, a razlikuju se jedino po elastičnim konstantama
- No za jednu, vrlo široku, skupinu problema u kojih su zapreminske sile konstantne ili ih uopće nema elastične konstante uopće ne ulaze u diferencijalne jednačbe pa se rješenja diferencijalnih jednačbi mogu primjeniti na obje vrste problema i sporedno je od kojeg stanja u tom slučaju u izvodima polazimo
- Da bi to dokazali, primjenjujemo npr. Laméove jednačbe ravnoteže tako da prvu deriviramo po x, drugu po y i treću po z te sve tri zbrojimo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X \right] = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y \right] = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z \right] = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

- zbrojeno daje

$$(\lambda + \mu)\nabla^2\Delta + \mu\nabla^2\Delta + \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] = 0$$
$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Delta + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0$$

- Uzmimo, nadalje, da je zapreminska sila

$$\vec{K} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k} = \text{grad } \varphi$$

- gdje je φ neka skalarna funkcija od x, y, z .
- Tada je

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- te

$$\text{div } \vec{K} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$$

- Uvrstimo li sada to u prethodnu jednađžu dobit ćemo:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Delta + \nabla^2\varphi = 0$$

- a stanje ravninske deformacije je

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Delta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

- jer je $\varepsilon_z = 0$, pa se odmah dobije

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Delta_1 + \nabla^2\varphi_1 = 0$$

- pri čemu je dakako $Z=0$.

- Ista se jednačba može pisati pomoću komponenata naprežanja ako se ima u vidu da je

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta = \frac{1}{E} \cdot [(1 - 2\nu) \cdot \sigma_x + (1 - 2\nu) \cdot \sigma_y + (1 - 2\nu) \cdot \sigma_z]$$

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

- kako je zbog $\varepsilon_z = 0$

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

- Dobivamo tada

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot [\sigma_x + \sigma_y + \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta = \frac{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

- Gdje je

$$\Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y$$

- Uvrsti li se posljednji izraz u jednadžbu:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Delta_1 + \nabla^2\varphi_1 = 0$$

- te uzme u obzir da je

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- dobijemo:

$$\nabla^2\Delta_1 + \frac{1}{1-\nu} \cdot \nabla^2\varphi = 0$$

- Ili

$$\nabla^2\Delta_1 + (1+\nu_1) \cdot \nabla^2\varphi_1 = 0$$

- gdje iz jednadžbe proizlazi

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \Rightarrow \nu_1 - \nu_1\nu = \nu \Rightarrow \nu(1+\nu_1) = \nu_1 \Rightarrow \nu = \frac{\nu_1}{1+\nu_1}$$

- Za stanje ravninskog naprezanja dobijemo na sličan način:

$$\sigma_z = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_z = 0$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \Delta_1$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Delta + \nabla^2\varphi = 0$$

- Odnosno ista jednađba izražena komponentama naprezanja, ako se uzme u obzir da je:

$$\Delta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\nu}{E} \cdot \Theta_1$$

- tada jednađba izgleda:

$$2\mu \cdot \nabla^2\Delta_1 + \nabla^2\varphi_1 = 0$$

- Kao što se vidi iz gornjih jednađbi, razlikuju se samo po konstantama uz pojedine članove.

$$\nabla^2\Theta_1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \nabla^2\varphi_1 = 0$$

- Ako je skalarna funkcija φ_1 harmonijska funkcija, tj.

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

- za oba stanja dobivamo

$$\nabla^2 \Delta_1 = 0$$

$$\nabla^2 \Theta_1 = 0$$

- Drugim riječima: invarijante deformacija i naprezanja u ravninskim problema moraju u tom slučaju biti harmonijske funkcije
- Uvjet $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ zadovoljen je u svim slučajevima kad je zapreminska sila u ravnini xy konstantna ili kad je jednaka nuli, a to i jest najčešće u praksi kod statičkih opterećenja

- Jedna od gornjih jednađbi predstavlja za određeno stanje deformiranja i određen način djelovanja zapreminskih sila samo jednu od tri jednađbe potrebne za određivanje triju nepoznatih veličina σ_x , σ_y i τ_{xy} . Ostale su dvije jednađbe ravnoteže, tako da bi potpun sustav diferencijalnih jednađbi koje treba riješiti bio u slučaju $\nabla^2 \varphi_1 = 0$:

$$\nabla^2 \Theta_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

AIRYJEVA FUNKCIJA NAPREZANJA

- Sustavi diferencijalnih jednađzbi rješavaju se obično tako da se ponovljenim diferenciranjem svedu na manji broj diferencijalnih jednađzbi viših redova. Tako se dolazi do općih jednađzbi kojima su zadovoljene sve jednađzbe jednog sustava.
- *Airy* je 1862. došao do jednađzbe kojom su zadovoljene tri jednađzbe ravnoteže
- Prema njemu jednađzbe ravnoteže su zadovoljene ako se pretpostavi da je $X=Y=0$, te da je

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Odnosno

$$\sigma_y = \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}$$

- Za τ_{xy} dobili smo dva izraza koja izjednačena daju novu diferencijalnu jednađzbu

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

- Ta jednađba je zadovoljena ako se uzme

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \chi = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

- drugim riječima, diferencijalne jednađbe ravnoteže zadovoljene su kad je

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

- Funkcija ϕ koja povezuje komponente naprezanja naziva se **Airyjevom funkcijom naprezanja**
- Treća diferencijalna jednađba izgleda sada ovako:

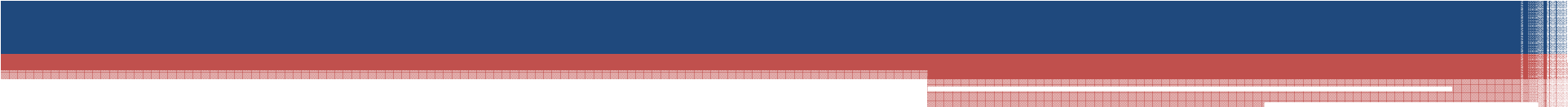
$$\nabla^2 \Theta_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

- ili

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0$$

- Ta **Maxwellova parcijalna diferencijalna jednađzba četvrtog reda** zadovoljava uvjete ravnoteže i neprekinutosti
- Funkcije koje zadovoljavaju tu jednađzbu nazivaju se biharmonijskim funkcijama; ima ih mnogo i različitih tipova, tako da ima velik broj mogućih rješenja od kojih je, dakako, samo ono ispravno u kojega su zadovoljeni uvjeti na rubovima
- U tome se i u ravninskim problemima ponovno pokazuje poteškoća jer treba istodobno zadovoljiti uvjete na konturi i Maxwellovu diferencijalnu jednađzbu u području ograničenom konturom
- Uvjeti na konturi mogu biti zadani ili vrijednostima same funkcije (zadaća *Dirichleta*) ili njezinim derivacijama po raznim smjerovima (zadaća *Neumanna*)

- 
- Ako su vrijednosti funkcije naprezanja u području ograničenom konturom i na konturi određene tako da su gornji uvjeti ispunjeni, lako se odrede komponente naprezanja u svim točkama područja, zatim i komponente deformacije ili pomaka.
 - Airyjeva funkcija naprezanja ima dimenziju sile

- **Harmonijske i biharmonijske funkcije**

- *Harmonijske funkcije su one funkcije koje zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu $\Delta = \nabla^2 f = 0$, gdje je $f = f(x, y, z)$*

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Harmonijske funkcije mogu biti polinomi svih stupnjeva uz određene uvjete, dok su polinomi do isključivo 1.stupnja uvijek harmonijske funkcije
- Kod polinoma viših stupnjeva konstante uz pojedine nezavisne varijable moraju stajati u određenim odnosima koji su dani uvjetnim jednadžbama kako bi oni bili harmonijske funkcije, na primjer za polinom trećeg stupnja:

$$f = a_0xyz + a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4y^3 + a_5y^2z + a_6y^2x + a_7z^3 + a_8z^2x + a_9z^2y$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6a_1x + 2a_2y + 2a_3z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6a_4y + 2a_5z + 2a_6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6a_7z + 2a_8x + 2a_9y$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = 0 = (6a_1 + 2a_6 + 2a_8) \cdot x + (6a_4 + 2a_9 + 2a_2) \cdot y + (6a_7 + 2a_3 + 2a_5) \cdot z$$

- Kako su x , y i z nezavisne varijable, gornja jednadžba je zadovoljena samo ako su izrazi u zagradi jednaki nuli. U tom slučaju dobivaju se tri dodatna uvjeta iz kojih se određuju tri koeficijenta, dok se veličine ostalih šest koeficijenata biraju po volji
- Ili, na primjer sa dvije nezavisne varijable

$$f = a_1x^4 + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4x^2y + a_5x^3 + a_6xy^2$$

$$\Delta = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12a_1x^2 + 2a_2y^2 + 2a_4y + 6a_5x + 2a_2x^2 + 6a_3xy + 0 + 2a_6x = 0$$

$$(12a_1 + 2a_2)x^2 + (6a_5 + 2a_6)x + 2a_2y^2 + 2a_4y + 6a_3xy = 0$$

- Dobiju se ove uvjetne jednadžbe:

$$6a_1 + a_2 = 0$$

$$3a_5 + a_6 = 0$$

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

- Prema tome navedeni polinom postaje harmonijska funkcija

$$f = a_5 x^3 - 3a_5 xy^2$$

- *Filon* i *Ribière* nezavisno jedan od drugoga su pokazali da su umnošci trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija harmonijske funkcije
- Ako se odabere ovakav oblik funkcije

$$f = X Y$$

- gdje je $X = X(x)$ a $Y = Y(y)$ Laplaceova jednadžba izgleda ovako:

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

- Posljednja jednađžba može biti zadovoljena samo ako je

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

- gdje je λ neka konstanta jer izrazi $\frac{X''}{X}$ i $\frac{Y''}{Y}$ moraju biti nezavisni pošto je pretpostavljeno da je X samo funkcija od x , a Y funkcija samo od y
- Diferencijalne jednađžbe imaju ova rješenja:

$$X = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} = B_1 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x$$

$$Y = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y} = D_1 \operatorname{sh} \lambda y + D_2 \operatorname{ch} \lambda y$$

- Prema tome, funkcije i ovih oblika su harmonijske $\sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda y$, $\cos \lambda x e^{\lambda y}$, $e^{\lambda x} \sin \lambda y$, itd.

- I trostruki umnošci eksponencijalnih, trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija mogu biti harmonijske funkcije
- Pokazano je da sve funkcije koje zadovoljavaju Cauchy-Riemanove uvjete zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu, jer ove dvije jednadžbe derivirane po x i po y zatim zbrojene daju

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \nabla^2 f_1 = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \nabla^2 f_2 = 0$$

- Tako su, na primjer, u ravnini u , v realni i imaginarni dio funkcije kompleksne varijable harmonijske funkcije

- *Biharmonijske funkcije su one funkcije koje zadovoljavaju Maxwellovu jednadžbu*

$$\Delta^2 = \nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0$$

- *U prvom redu sve harmonijske funkcije ujedno su i biharmonijske funkcije, ali to ne vrijedi obratno. Nadalje, od harmonijskih funkcija vrlo lako se tvore biharmonijske funkcije ako se množe s nezavisnim varijablama ili sa zbrojem njihovih kvadrata, lako se dokaže*

$$\nabla^2(x\phi) = 2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$\nabla^2\left(x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

- *ako je $\nabla^2 \phi = 0$.*

- Isto tako je

$$\nabla^4(x\phi) = \nabla^2 \nabla^2(x\phi) = \nabla^2 \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = 0$$

- Prema tome, ako je ϕ harmonijska funkcija, onda su $x\phi$, $y\phi$ i $z\phi$ biharmonijske funkcije. Isto tako je za

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- te za

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \phi \right) = 3\phi + 2\vec{r} \operatorname{grad} \phi$$

- Drugi član je harmonijska funkcija jer je

$$\nabla^2(\vec{r} \operatorname{grad} \phi) = \nabla^2 \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0$$

- Prema tome je

$$\nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \phi \right) = 0$$

- što je trebalo i dokazati.
- Prema tome je biharmonijska funkcija

$$\phi = \phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3 + r^2\phi_4$$

- ako su $\phi_0 \dots \phi_4$ harmonijske funkcije.
- Filon-Ribièrovo rješenje prošireno na biharmonijske funkcije izgleda u ravninskih problema ovako:

$$X = X(x)$$

$$f = X Y$$

$$Y = Y(y)$$

- Maxwellova jednadžba može se svesti na ovaj oblik:

$$\frac{X^{IV}}{X} + 2 \frac{X''}{X} \cdot \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{IV}}{Y} = 0$$

- Ako se pojedini članovi u posljednjoj jednadžbi deriviraju po y , dobije se

$$2 \frac{X''}{X} \cdot \left(\frac{Y''}{Y} \right)' + \left(\frac{Y^{IV}}{Y} \right)' = 0$$

- Da bi se zadovoljila početna pretpostavka, da funkcija X i Y nisu zavisne jedna od druge, rješenja diferencijalne jednadžbe za X i Y moraju dati nezavisne funkcije, a to je moguće ako je

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 = konst.$$

- Rješenje te jednačbe je

$$X = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x$$

- Kako je

$$X^{IV} = \lambda^4 \cdot X$$

- Jednačbu možemo pisati i u ovom obliku:

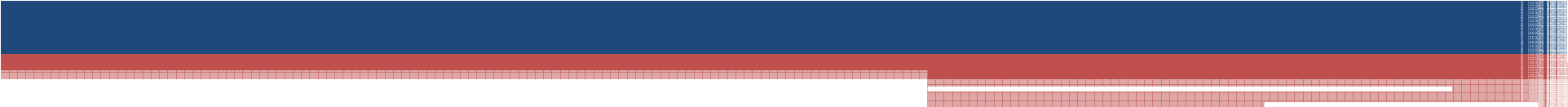
$$Y \cdot \lambda^4 - 2 \cdot \lambda^2 \cdot Y'' + Y^{IV} = 0$$

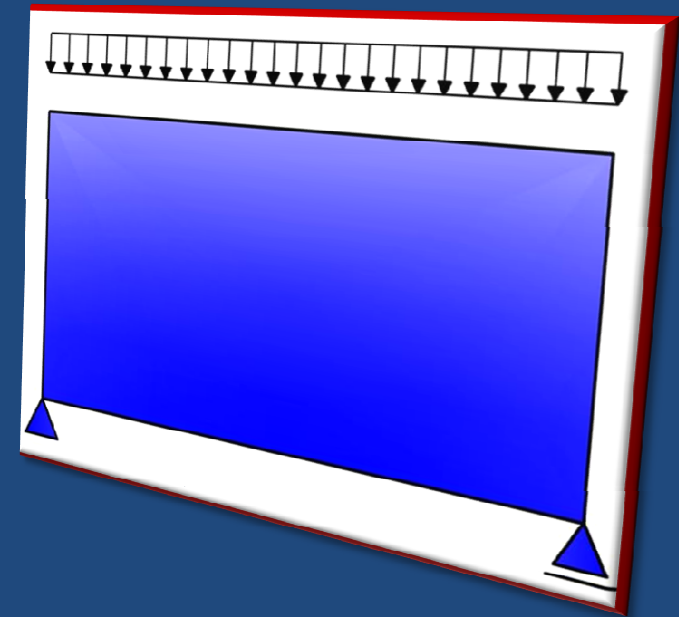
- I rješenje te jednačbe je:

$$Y = B_1 \cdot ch \lambda y + B_2 \cdot sh \lambda y + y \cdot B_3 \cdot ch \lambda y + y \cdot B_4 \cdot sh \lambda y$$

- Prema tome, biharmonijske funkcije su i

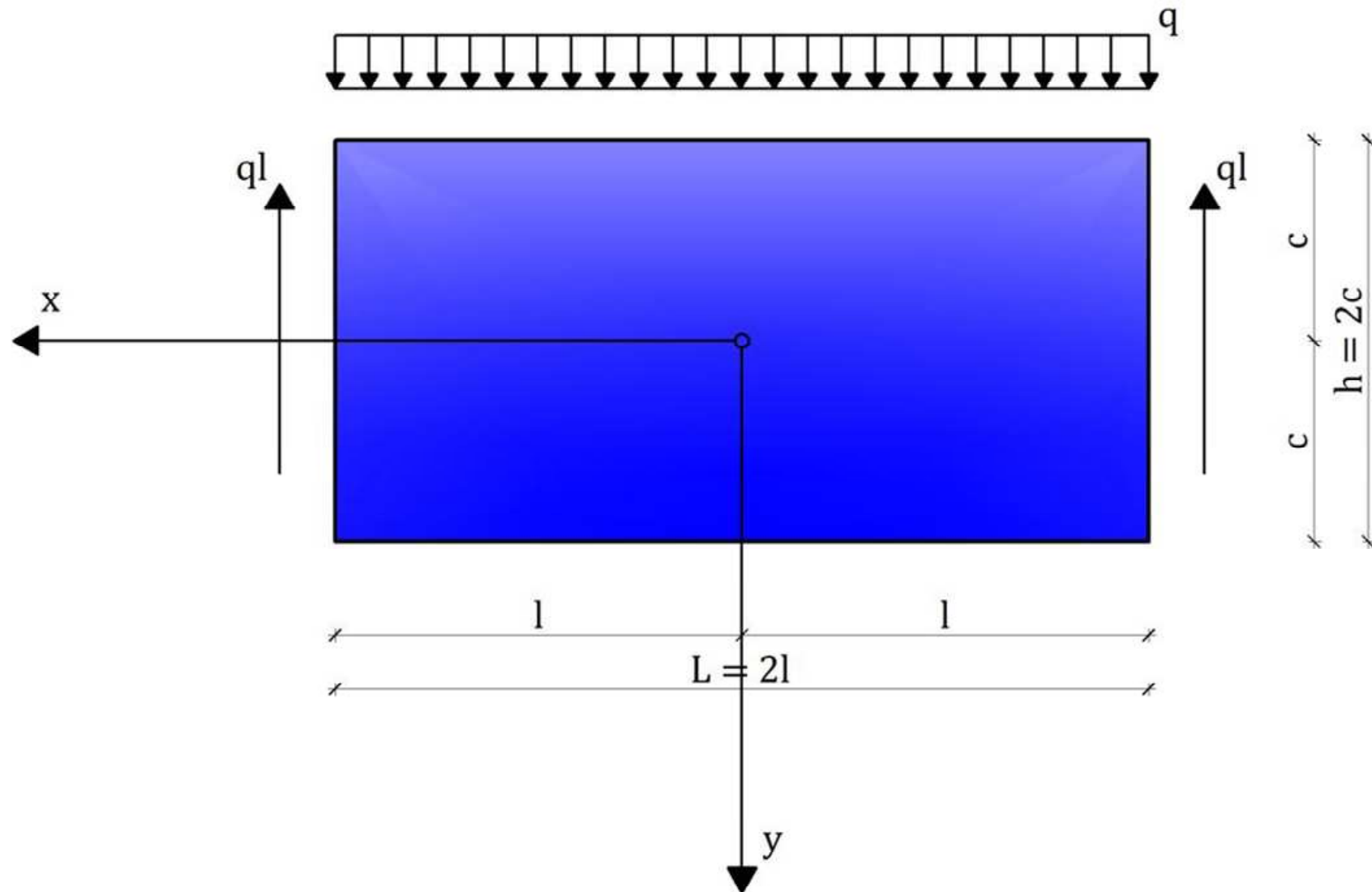
$$y_0 \cdot \sin \lambda x \cdot ch \lambda y, \quad r^2 \cdot \sin \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cdot x \cdot e^{\beta y} \cdot ch \gamma z \text{ itd.}$$

- 
- Polinomi do uključivo trećeg stupnja uvijek su biharmonijske funkcije, dok su polinomi viših stupnjeva samo onda ako koeficijenti zadovoljavaju uvjetne jednačbe koje proizlaze iz Maxwellove jednačbe
 - To je pokazano za harmonijske funkcije
 - Funkcija koje zadovoljavaju Laplaceovu ili Maxwellovu jednačbu ima mnogo, tako da bi trebalo očekivati da je lako naći rješenja za razne probleme teorije elastičnosti u prostoru i ravnini
 - No poteškoće se javljaju pri zadovoljavanju konturnih uvjeta, jer kod problema u praksi obično dolaze složene, nepravilne konture i isto takva opterećenja ili deformacije, pa je razmjerno mali broj problema riješen matematički u zatvorenom obliku



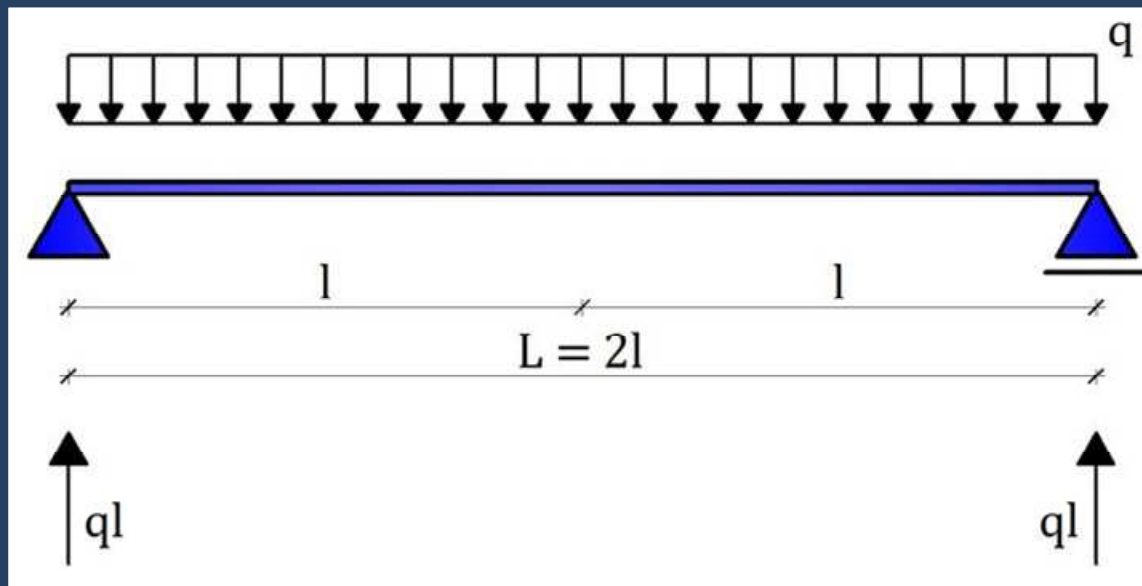
VISOKOSTIJNI NOSAČI

MODEL VISOKOSTIJIJENOG NOSAČA



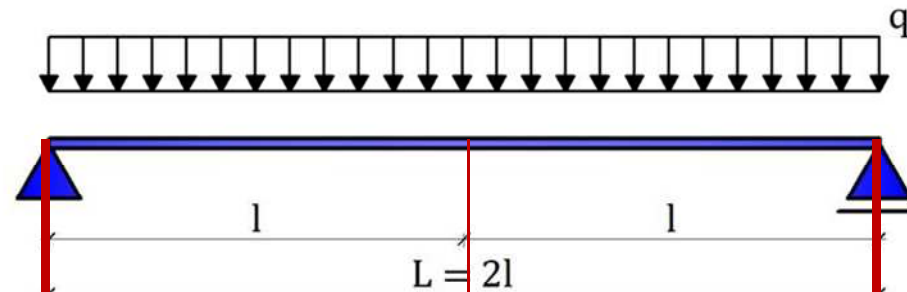
MODEL VISOKOSTIJIENOG NOSAČA

statički sustav



MODEL VISOKOSTIJIJENOG NOSAČA

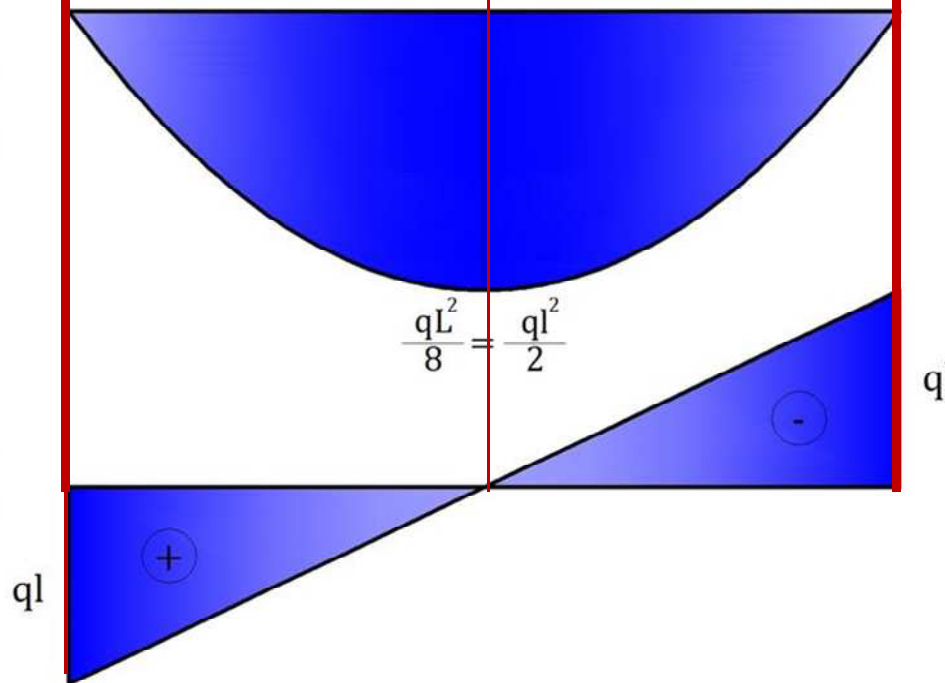
statički sustav



dijagrami
unutrašnjih
sila

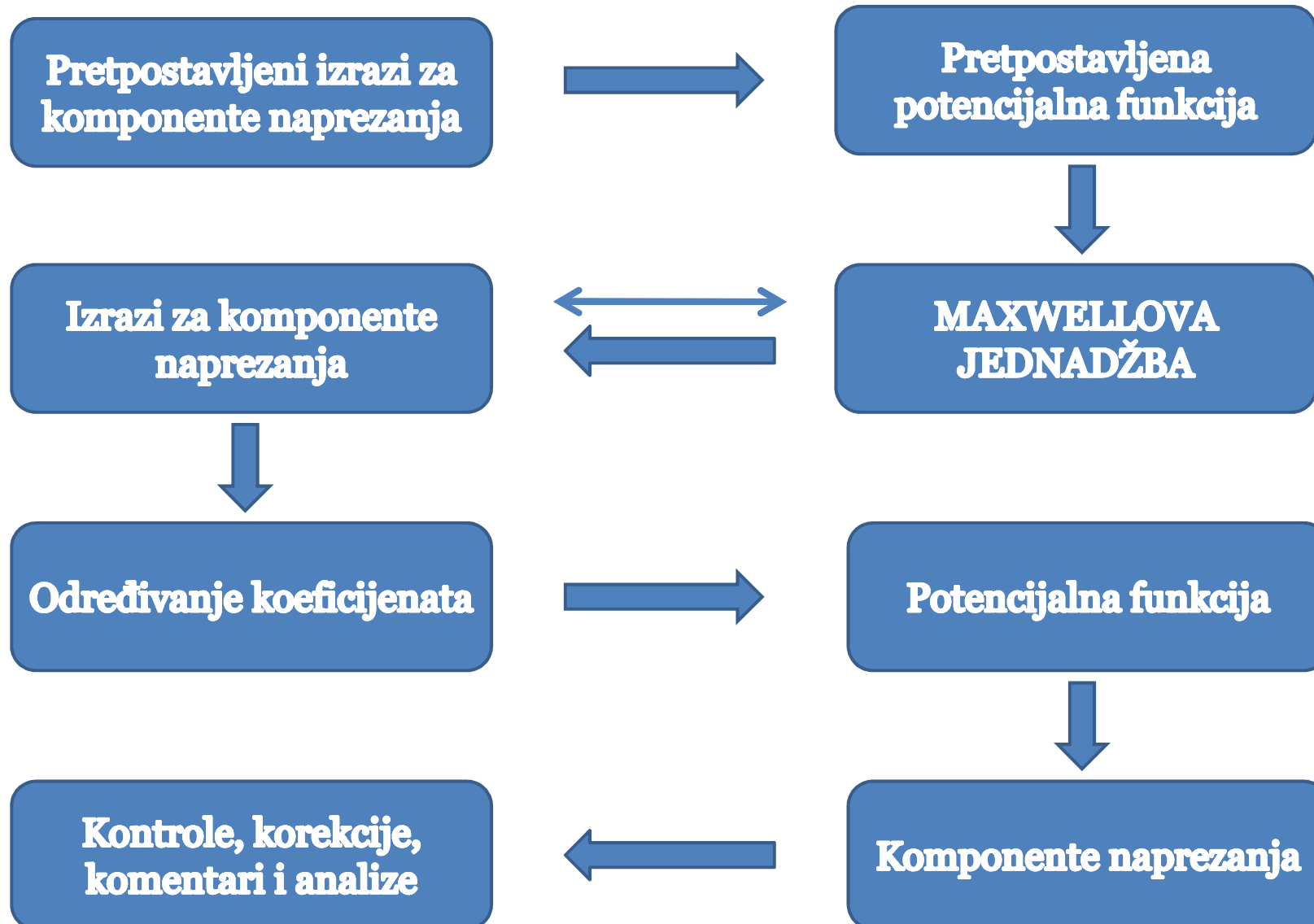
M

V

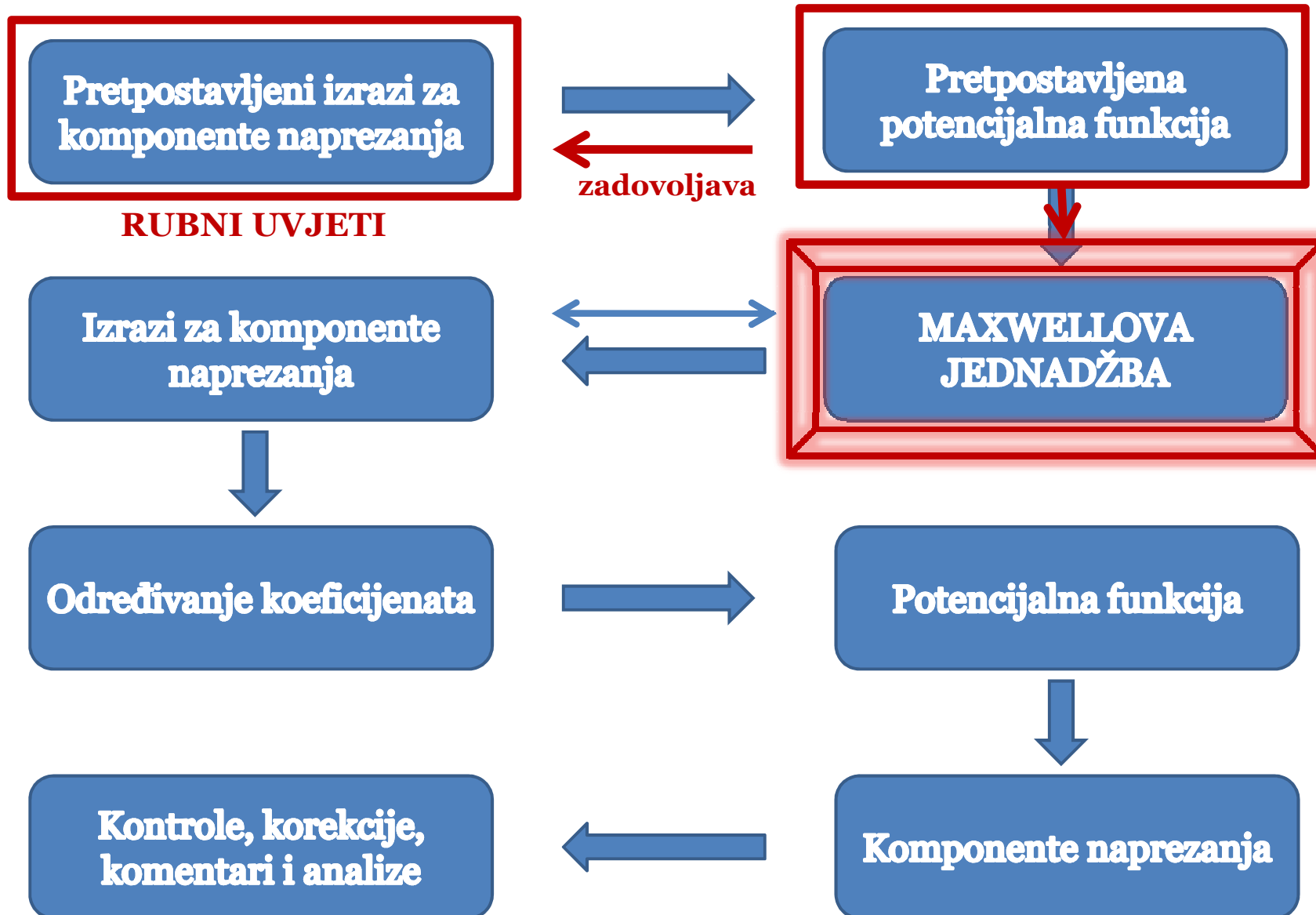


rubni
uvjeti

POSTUPAK - ŠALABAHTER



POLUOB RATNI POSTUPAK



POSTUPAK - ŠALABAHTER

**Pretpostavljeni izrazi za
komponente naprezanja**

KOMPONENTE NAPREZANJA

OPĆI IZRAZI:

- normalno naprezanje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

- normalno naprezanje u smjeru osi y:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

- posmično naprezanje:

$$\tau_{x,y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

KOMPONENTE NAPREZANJA

PRETPOSTAVKA:

- normalno naprezanje u smjeru osi x:

$$\sigma_x = d_1 (l^2 - x^2)y$$

- normalno naprezanje u smjeru osi y:

$$\sigma_y = d_3 (c^3 - y^3) + d_4 (c - y)$$

- posmično naprezanje:

$$\tau_{xy} = d_2 (c^2 - y^2)x$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER

Pretpostavljeni izrazi za
komponente napreznja



Pretpostavljena
potencijalna funkcija

POTENCIJALNA FUNKCIJA

Maxwellova
jednadžba

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

pretp. izrazi
za naprežanja

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_1(l^2 - x^2)y \\ \sigma_y &= d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y) \\ \tau_{xy} &= d_2(c^2 - y^2)x\end{aligned}$$

opći izrazi za
naprežanja

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{x,y} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

POTENCIJALNA FUNKCIJA

Maxwellova
jednadžba

pretp. izrazi
za naprežanja

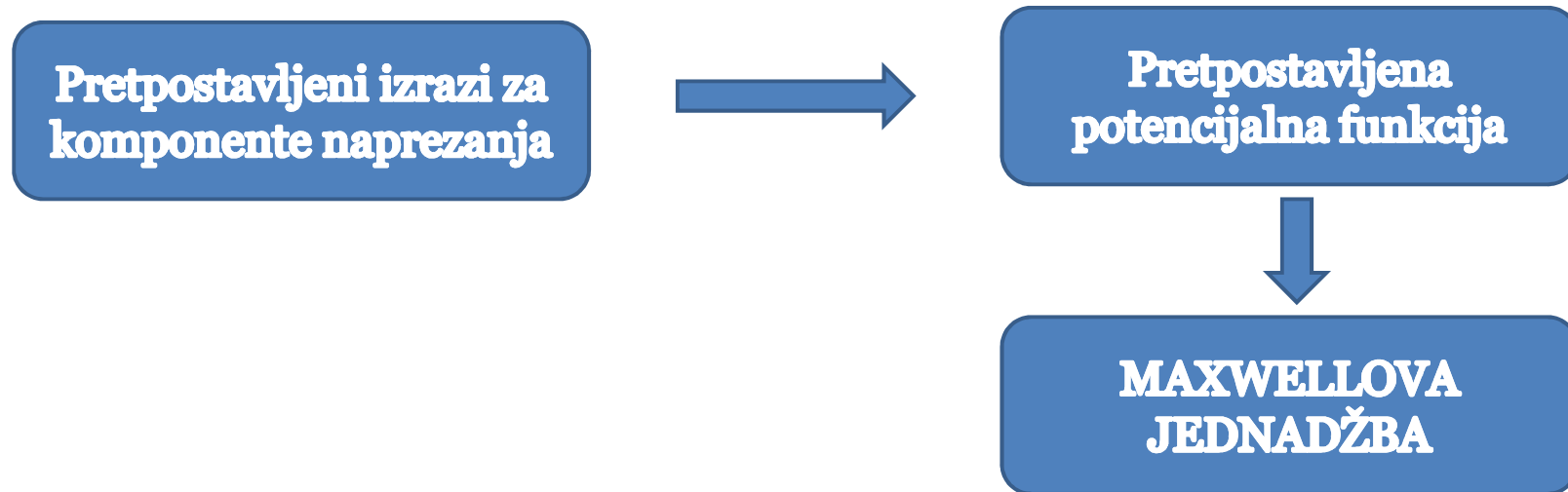
opći izrazi za
naprežanja

članovi Airyjeve funkcije:
 $1^0 \rightarrow 3^0, \quad 3^0 \rightarrow 5^0$

Potencijalna funkcija:

$$\Phi = a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + \\ + a_6y^5 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER



MAXWELLOVA JEDNADŽBA

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$



Potencijalna funkcija:

$$\begin{aligned} \Phi = & a_1 x^5 + a_2 x^4 y + a_3 x^3 y^2 + a_4 x^2 y^3 + a_5 x y^4 + \\ & + a_6 y^5 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3 \end{aligned}$$

MAXWELLOVA JEDNADŽBA

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

$$(5a_1 + a_3 + a_5) \cdot x + (a_2 + a_4 + 5a_6) \cdot y = 0$$

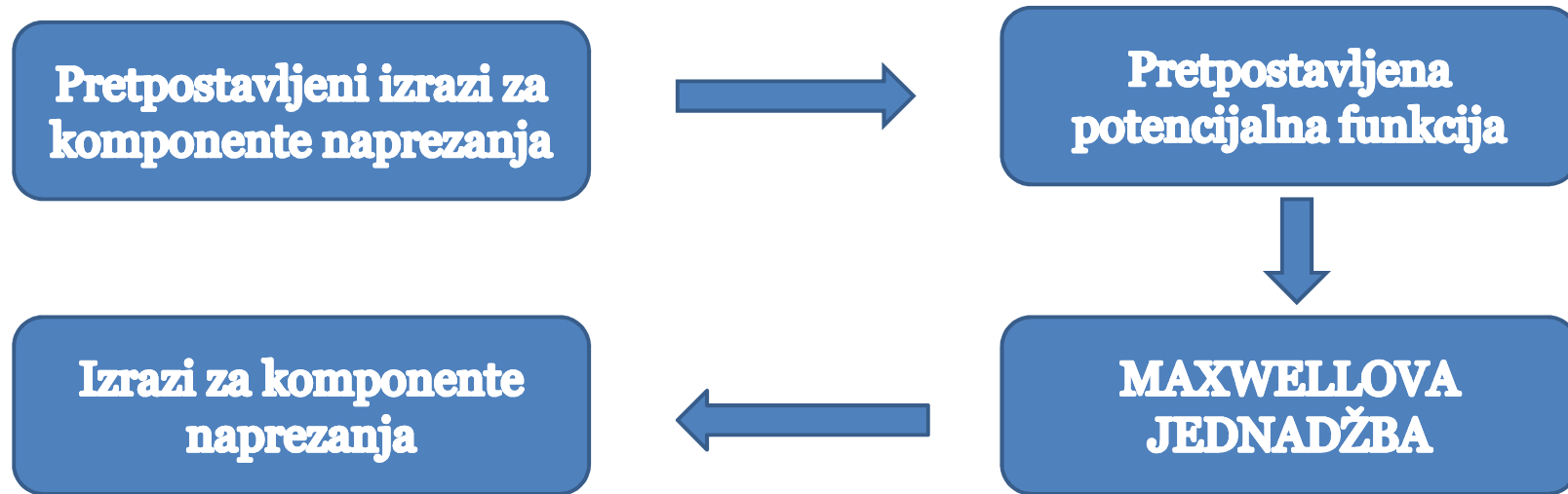
1.

$$5a_1 + a_3 + a_5 = 0$$

$$a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$$

2.

POSTUPAK - ŠALABAHTER



NORMALNO NAPREZANJE - OS X

$$\Phi \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x \quad \sigma_x$$

$$2a_3x^3 + 6a_4x^2y + 12a_5xy^2 + 20a_6y^3 + 2a_9x + 6a_{10}y = d_1(l^2 - x^2)y$$

$$\cancel{2a_3x^3} + \underline{6a_4x^2y} + \cancel{12a_5xy^2} + \cancel{20a_6y^3} + \cancel{2a_9x} + \underline{6a_{10}y} = \underline{d_1l^2y} - \underline{d_1x^2y}$$

$$\rightarrow a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = 0$$

$$\rightarrow 6a_4x^2y = -d_1x^2y$$

$$6a_4 = -d_1$$

$$d_1 = -6a_4$$

$$\rightarrow 6a_{10}y = d_1l^2y$$

$$6a_{10} = d_1l^2$$

$$a_{10} = \frac{l^2}{6}d_1$$

POSMIČNO NAPREZANJE

$$\Phi \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}$$

$$4a_2x^3 + 6a_3x^2y + 6a_4xy^2 + 4a_5y^3 + 2a_8x + 2a_9y = -d_2(c^2 - y^2)x$$

$$\cancel{4a_2x^3} + \cancel{6a_3x^2y} + \underline{6a_4xy^2} + \cancel{4a_5y^3} + \underline{2a_8x} + \cancel{2a_9y} = \underline{d_2xy^2} - \underline{d_2c^2x}$$

$$\rightarrow a_2 = a_3 = a_5 = a_9 = 0$$

$$\rightarrow 6a_4xy^2 = d_2xy^2$$

$$6a_4 = d_2$$

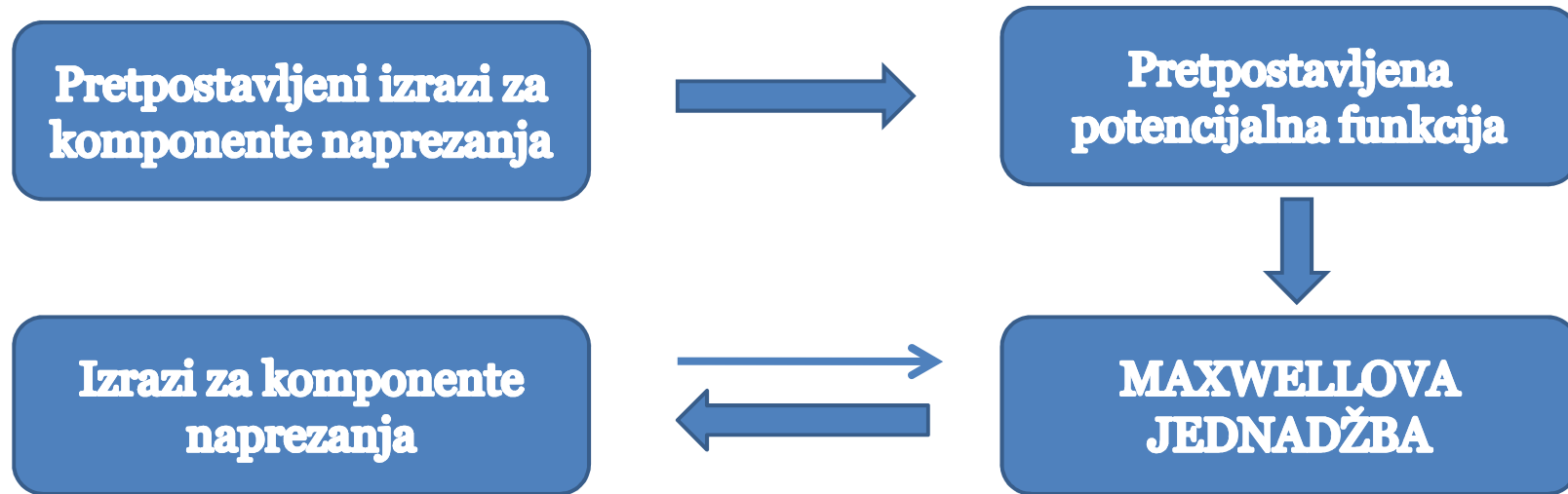
$$a_4 = \frac{d_2}{6}$$

$$\rightarrow 2a_8x = -d_2c^2x$$

$$2a_8 = -d_2c^2$$

$$a_8 = -\frac{c^2}{2}d_2$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER

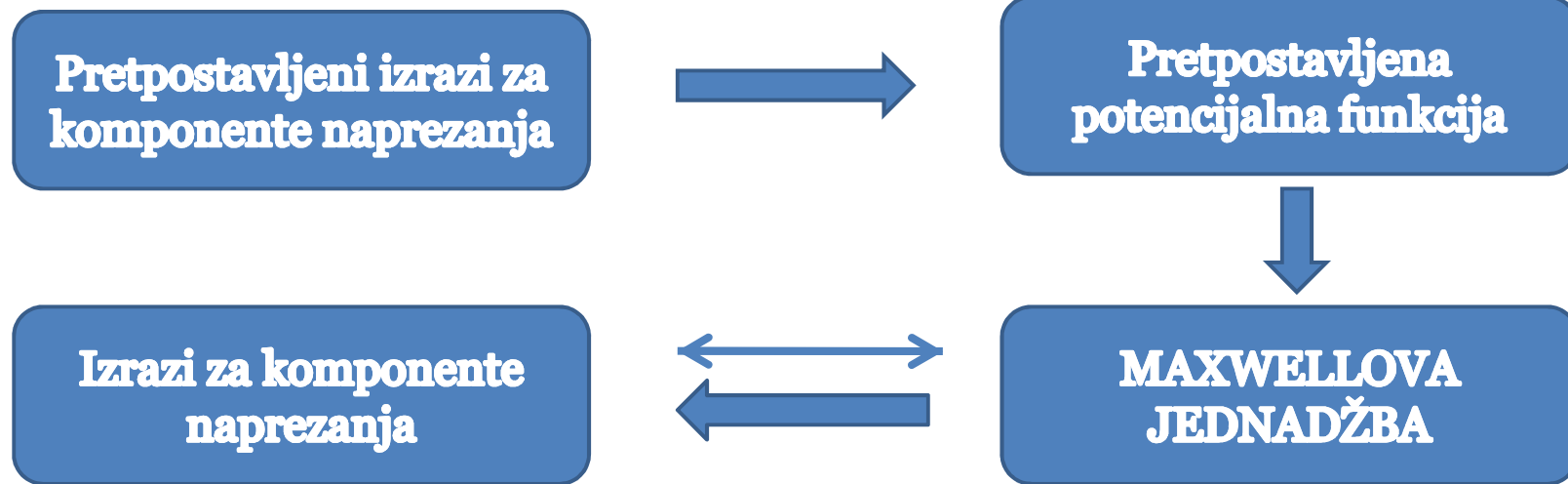


MAXWELLOVA JEDNADŽBA

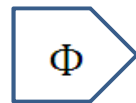
1. $5a_1 + a_3 + a_5 = 0$
 $a_3 = a_5 = 0$ } $a_1 = 0$

2. $a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$
 $a_4 \neq 0$ } ili a_2 ili $a_6 \neq 0$

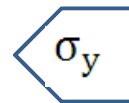
POSTUPAK - ŠALABAHTER



NORMALNO NAPREZANJE - OS Y



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$



$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$\cancel{20a_1x^3} + \cancel{12a_2x^2y} + \cancel{6a_3xy^2} + \underline{2a_4y^3} + \cancel{6a_7x} + \underline{2a_8y} = d_3c^3 - \underline{d_3y^3} + d_4c - \underline{d_4y}$$

$$\rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$$

$$\rightarrow 2a_4y^3 = -d_3y^3$$

$$d_3 = -2a_4$$

$$\rightarrow 2a_8y = -d_4y$$

$$d_4 = -2a_8$$

NORMALNO NAPREZANJE - OS Y

$$\Phi \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$

$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$!?! + \cancel{20a_1x^3} + \cancel{12a_2x^2y} + \cancel{6a_3xy^2} + \underline{2a_4y^3} + \cancel{6a_7x} + \underline{2a_8y} = \underline{d_3c^3} - \underline{d_3y^3} + \underline{d_4c} - \underline{d_4y}$$

? a_{11}

$$\rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$$

$$\rightarrow 2a_4y^3 = -d_3y^3$$

$$d_3 = -2a_4$$

$$\rightarrow 2a_8y = -d_4y$$

$$d_4 = -2a_8$$

$$\rightarrow !?! = d_3c^3 + d_4c$$

NORMALNO NAPREZANJE - OS Y

$$\Phi \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y \quad \sigma_y$$

$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$!?! + \cancel{20a_1x^3} + \cancel{12a_2x^2y} + \cancel{6a_3xy^2} + \underline{2a_4y^3} + \cancel{6a_7x} + \underline{2a_8y} = \underline{d_3c^3} - \underline{d_3y^3} + \underline{d_4c} - \underline{d_4y}$$

? a_{11}

$$\rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$$

$$\rightarrow 2a_4y^3 = -d_3y^3$$

$$d_3 = -2a_4$$

$$\rightarrow 2a_8y = -d_4y$$

$$d_4 = -2a_8$$

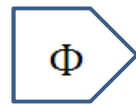
$\rightarrow !?!$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} x^2 = 0$$

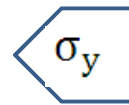
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} x^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 = 2 \neq 0$$

NORMALNO NAPREZANJE - OS Y



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$



$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

!?! + ~~$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2$~~ + $2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3c^3 - d_3y^3 + d_4c - d_4y$

? a_{11}

→ $a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$

→ $2a_4y^3 = -d_3y^3$

$d_3 = -2a_4$

→ $2a_8y = -d_4y$

$d_4 = -2a_8$

→ **!?!** $= d_3c^3 + d_4c$

$$\frac{\partial^2(a_{11}x^2)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(a_{11}x^2)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2(a_{11}x^2)}{\partial x^2} = 2a_{11}$$

NORMALNO NAPREZANJE - OS Y

$$\Phi \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y \quad \sigma_y$$

$$20a_1x^3 + 12a_2x^2y + 6a_3xy^2 + 2a_4y^3 + 6a_7x + 2a_8y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$\cancel{20a_1x^3} + \cancel{12a_2x^2y} + \cancel{6a_3xy^2} + \underline{2a_4y^3} + \cancel{6a_7x} + \underline{2a_8y} = \underline{d_3c^3} - \underline{d_3y^3} + \underline{d_4c} - \underline{d_4y}$$

$$\rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = 0$$

$$\rightarrow 2a_4y^3 = -d_3y^3$$

$$d_3 = -2a_4$$

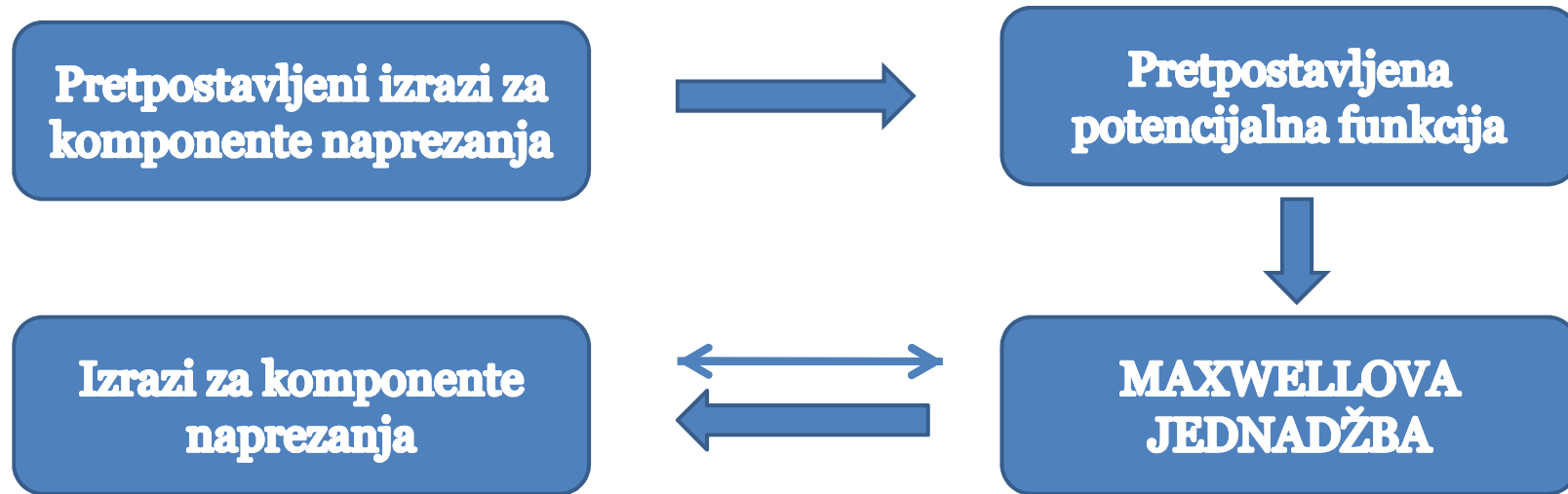
$$\rightarrow 2a_8y = -d_4y$$

$$d_4 = -2a_8$$

$$\rightarrow 2a_{11} = d_3c^3 + d_4c$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(d_3c^3 + d_4c)$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER



MAXWELLOVA JEDNADŽBA

2.

$$a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$$

$$a_4 \neq 0$$

$$a_8 \neq 0$$

$$a_2 = 0$$

MAXWELLOVA JEDNADŽBA

2.

$$a_2 + a_4 + 5a_6 = 0$$

$$a_4 \neq 0$$

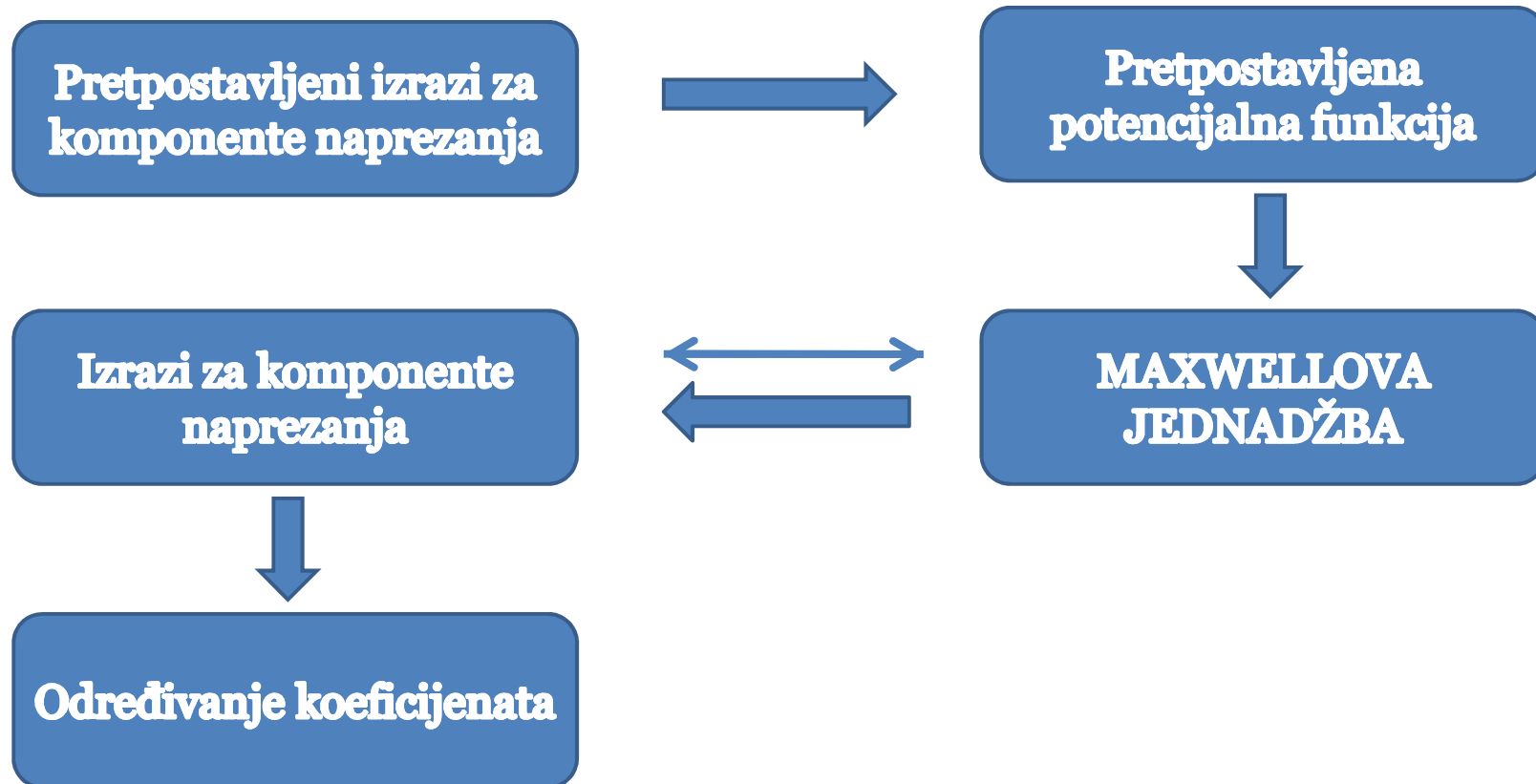
$$a_8 \neq 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_4 + 5a_6 = 0$$

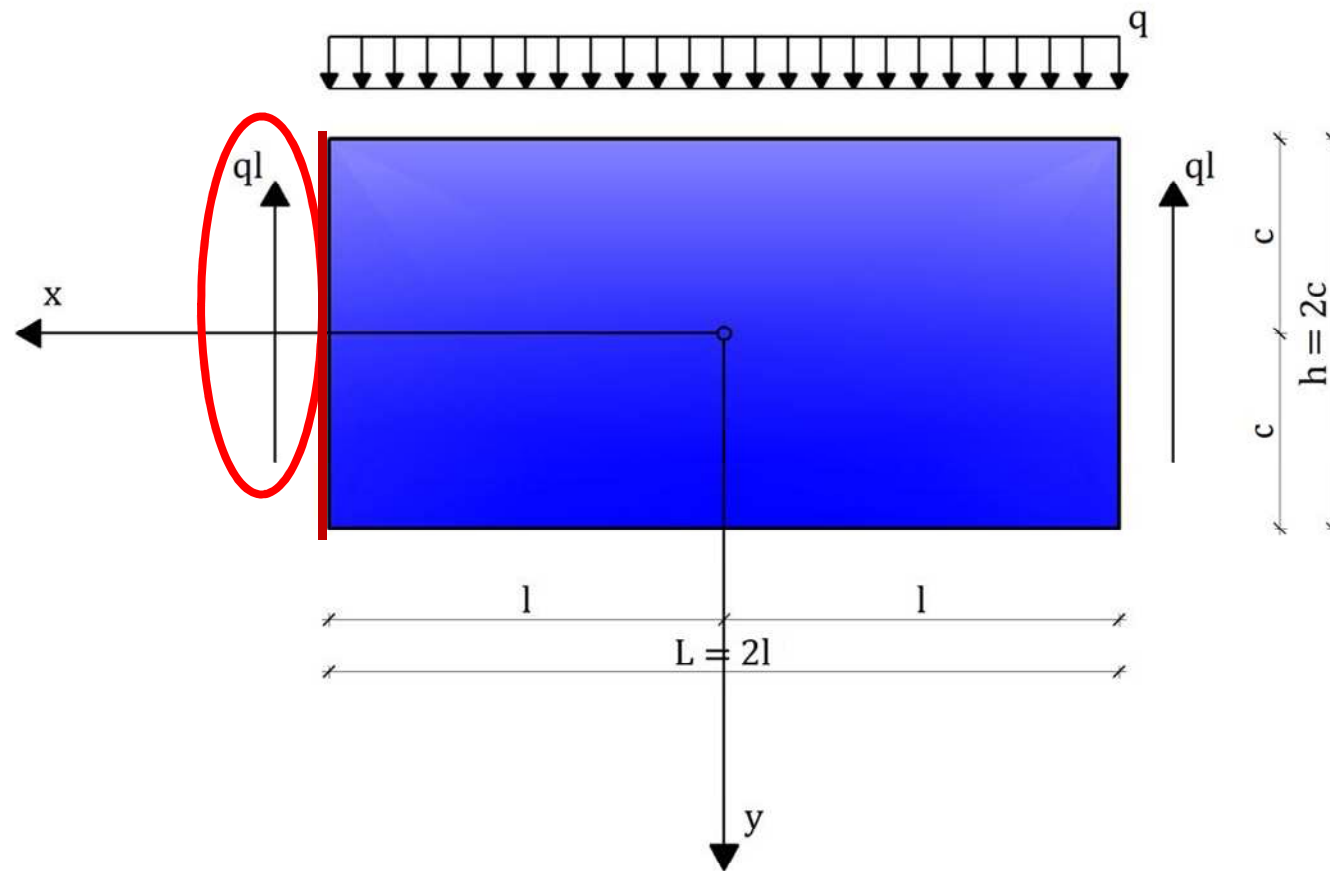
$$a_6 = -\frac{a_4}{5}$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER



KOEFICIJENTI

- Korištenje uvjeta na rubu $x = +l$



KOEFICIJENTI

- Korištenje uvjeta na rubu $x = +l$

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = ql$$

$$\int_{-c}^c d_2 l (y^2 - c^2) dy = -ql$$

$$d_2 = -\frac{3q}{4c^3}$$

KOEFICIJENTI

- Ostali koeficijenti iz izraza:

$$a_4 = \frac{d_2}{6} = \frac{1}{6} \left(-\frac{3q}{4c^3} \right) = -\frac{1q}{8c^3}$$

$$a_{10} = \frac{l^2}{6} d_1 = \frac{l^2}{6} \frac{3q}{4c^3} = \frac{l^2 q}{8c^3}$$

$$a_8 = -d_2 \frac{c^2}{2} = - \left(-\frac{3q}{4c^3} \right) \frac{c^2}{2} = \frac{3q}{8c}$$

$$d_3 = -2a_4 = -2 \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{1q}{4c^3}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{1q}{40c^3}$$

$$d_4 = -2a_8 = -2 \frac{3q}{8c} = -\frac{3q}{4c}$$

$$d_1 = -6a_4 = -6 \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{3q}{4c^3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} (d_3 c^3 + d_4 c) = \frac{1}{2} \left(\frac{1q}{4c^3} c^3 - \frac{3q}{4c} c \right) = -\frac{q}{4}$$

KOEFICIJENTI

- Ostali koeficijenti iz izraza:

$$a_4 = \frac{d_2}{6} = \frac{1}{6} \left(-\frac{3q}{4c^3} \right) = -\frac{1q}{8c^3}$$

$$a_{10} = \frac{l^2}{6} d_1 = \frac{l^2}{6} \frac{3q}{4c^3} = \frac{l^2 q}{8c^3}$$

$$a_8 = -d_2 \frac{c^2}{2} = - \left(-\frac{3q}{4c^3} \right) \frac{c^2}{2} = \frac{3q}{8c}$$

$$d_3 = -2a_4 = -2 \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{1q}{4c^3}$$

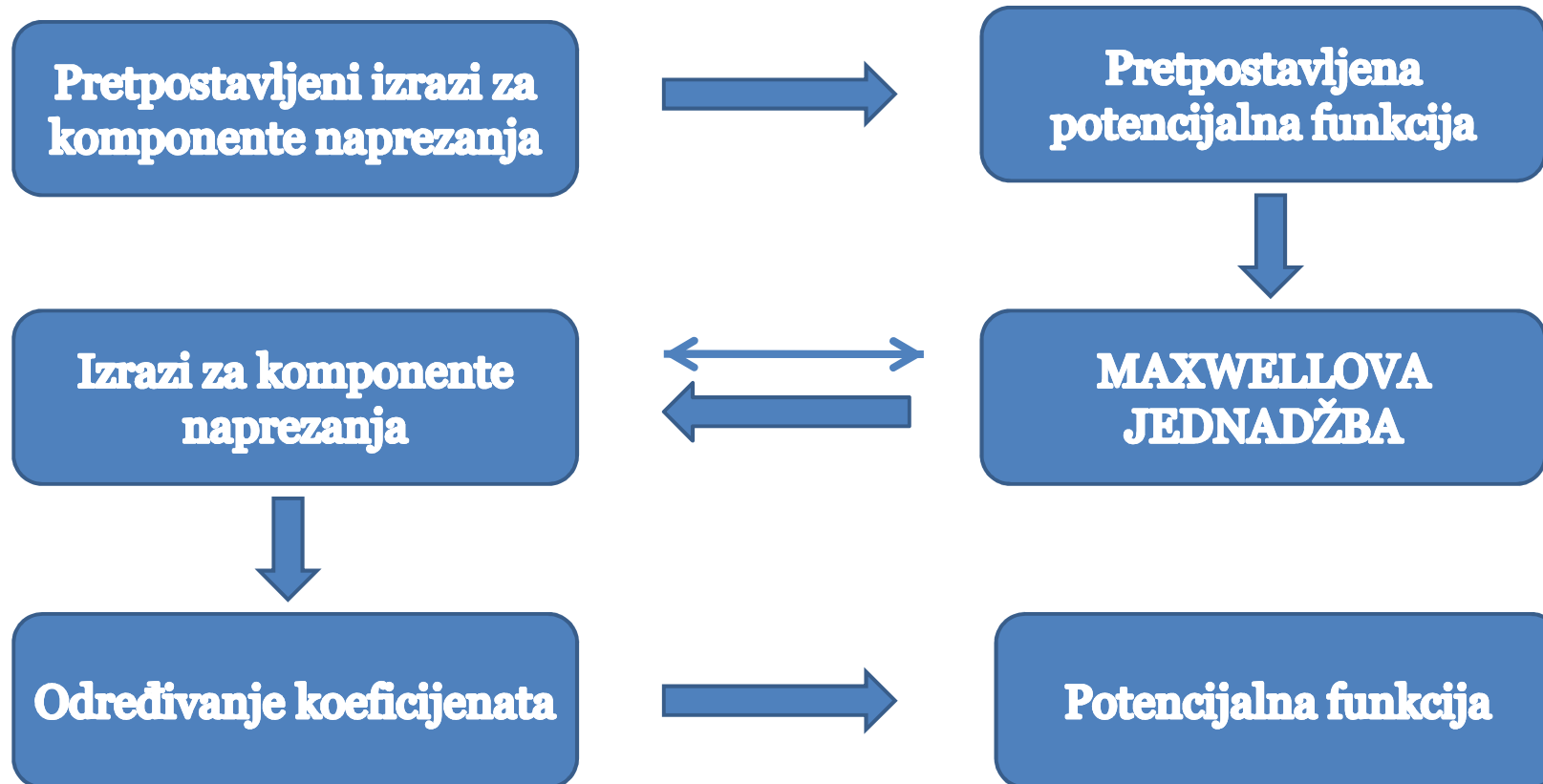
$$a_6 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{1q}{40c^3}$$

$$d_4 = -2a_8 = -2 \frac{3q}{8c} = -\frac{3q}{4c}$$

$$d_1 = -6a_4 = -6 \left(-\frac{1q}{8c^3} \right) = \frac{3q}{4c^3}$$

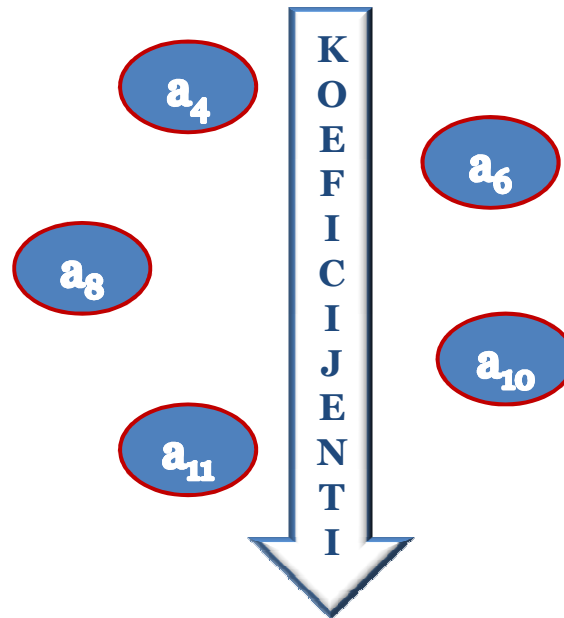
$$a_{11} = \frac{1}{2} (d_3 c^3 + d_4 c) = \frac{1}{2} \left(\frac{1q}{4c^3} c^3 - \frac{3q}{4c} c \right) = -\frac{q}{4}$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER



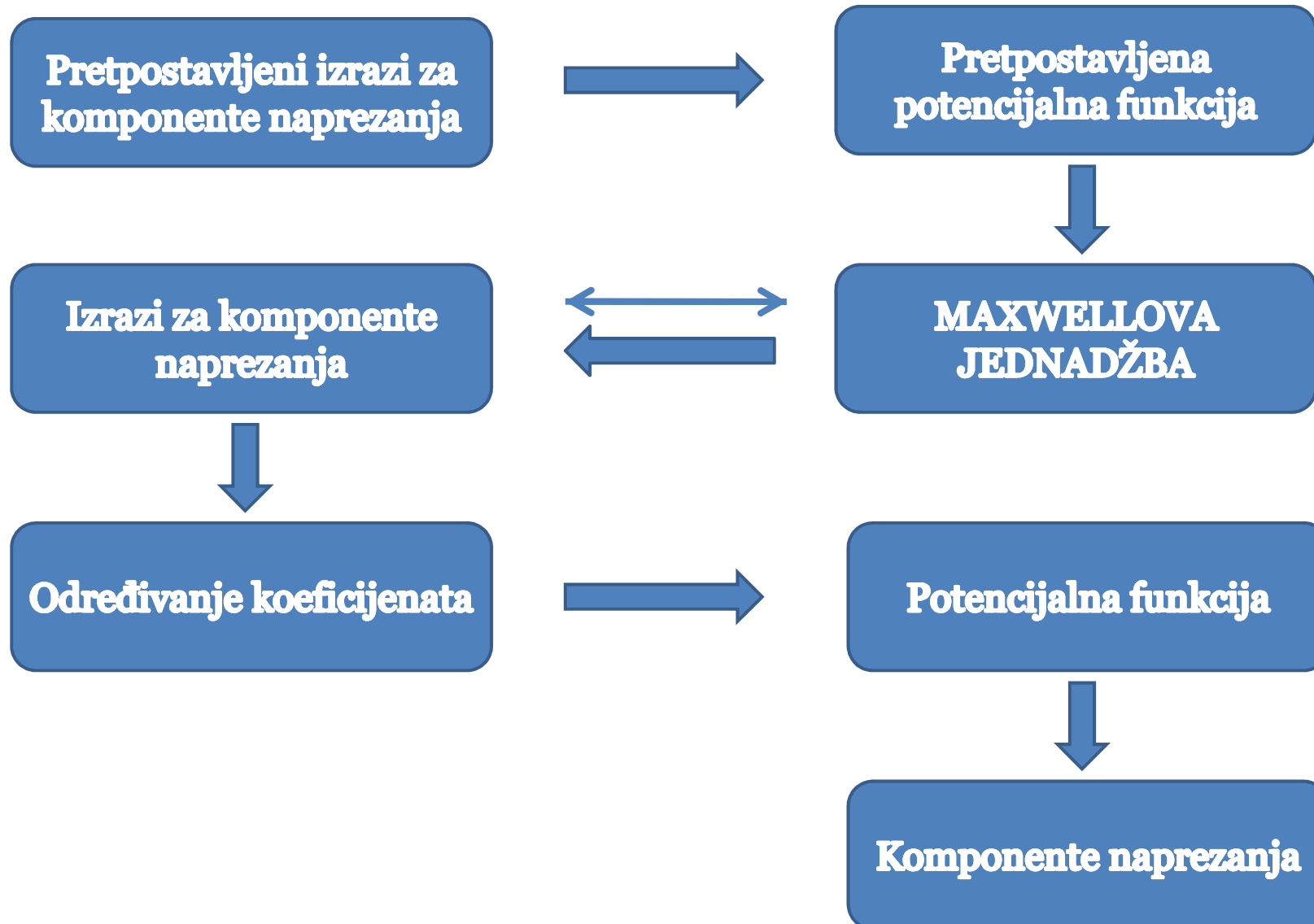
POTENCIJALNA FUNKCIJA

$$\Phi = a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 \\ + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^2$$



$$\Phi = -\frac{qx^2}{4} + \frac{3qx^2y}{8c} + \frac{l^2qy^3}{8c^3} - \frac{qx^2y^3}{8c^3} + \frac{qy^5}{40c^3}$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER



NORMALNO NAPREZANJE - OS X

2. L

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

1. D

$$I = \frac{2}{3} c^3$$

2. L

$$\sigma_x = d_1 (l^2 - x^2) y$$

$$\sigma_x = \frac{3q(l^2 - x^2)y}{4c^3}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2) y$$

1. D

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{3l^2 q y}{4c^3} - \frac{3q x^2 y}{4c^3} + \frac{q y^3}{2c^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{6} \frac{q y}{I} (3l^2 - 3x^2 + 2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2) y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2) y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

POSMIČNO NAPREZANJE

$$\boxed{2. L} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \boxed{1. D} \quad I = \frac{2}{3} c^3$$

$\boxed{2. L}$

$$\tau_{xy} = d_2(c^2 - y^2)x$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3qx(c^2 - y^2)}{4c^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x$$

$\boxed{1. D}$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{3qx}{4c} + \frac{3qxy^2}{4c^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x}$$

NORMALNO NAPREZANJE - OS Y

2. L

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

1. D

$$I = \frac{2}{3} c^3$$

2. L

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{q}{2} + \frac{3qy}{4c} - \frac{qy^3}{4c^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

1. D

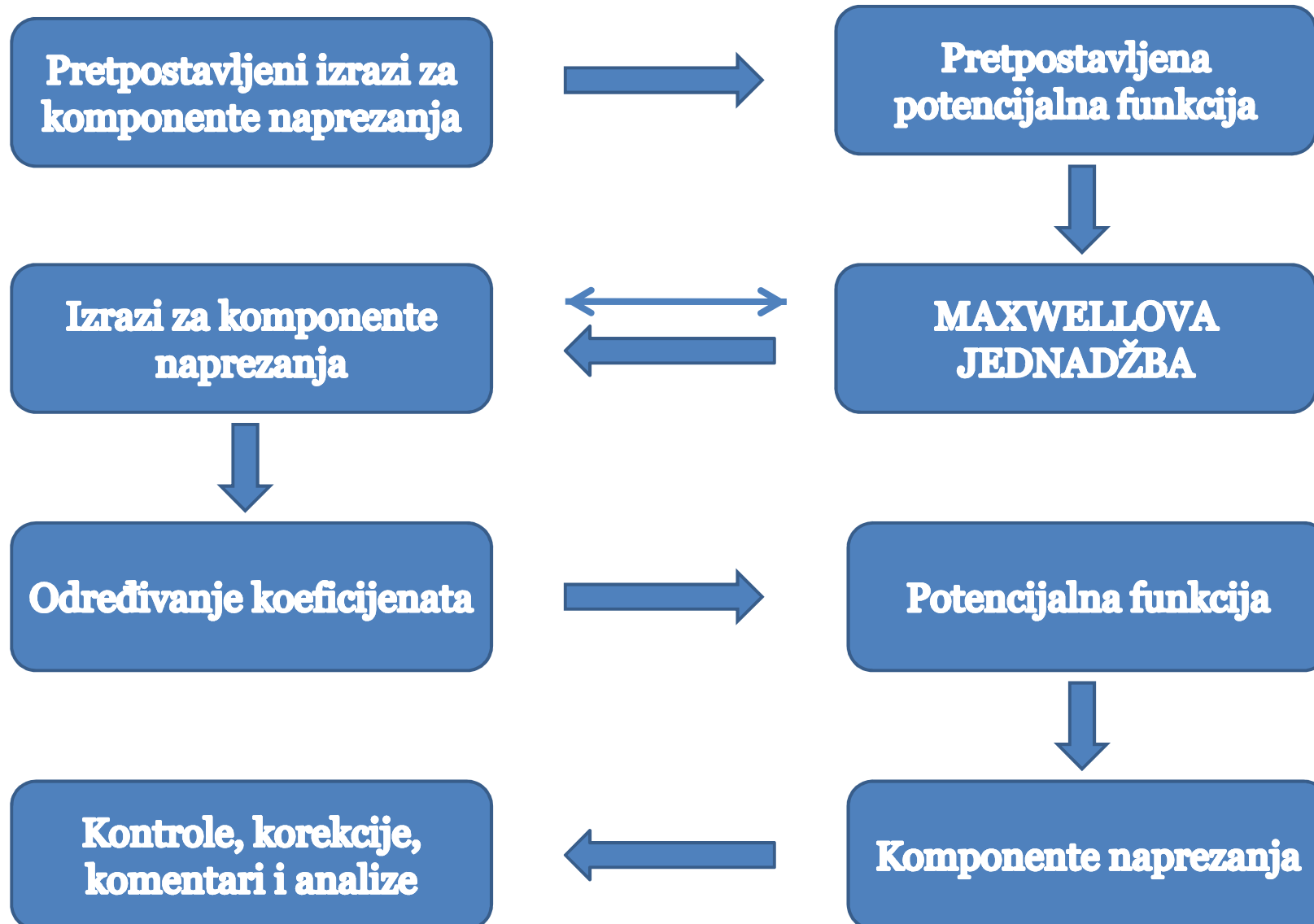
$$\sigma_y = d_3(c^3 - y^3) + d_4(c - y)$$

$$\sigma_y = -\frac{3q(c - y)}{4c} + \frac{q(c^3 - y^3)}{4c^3}$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

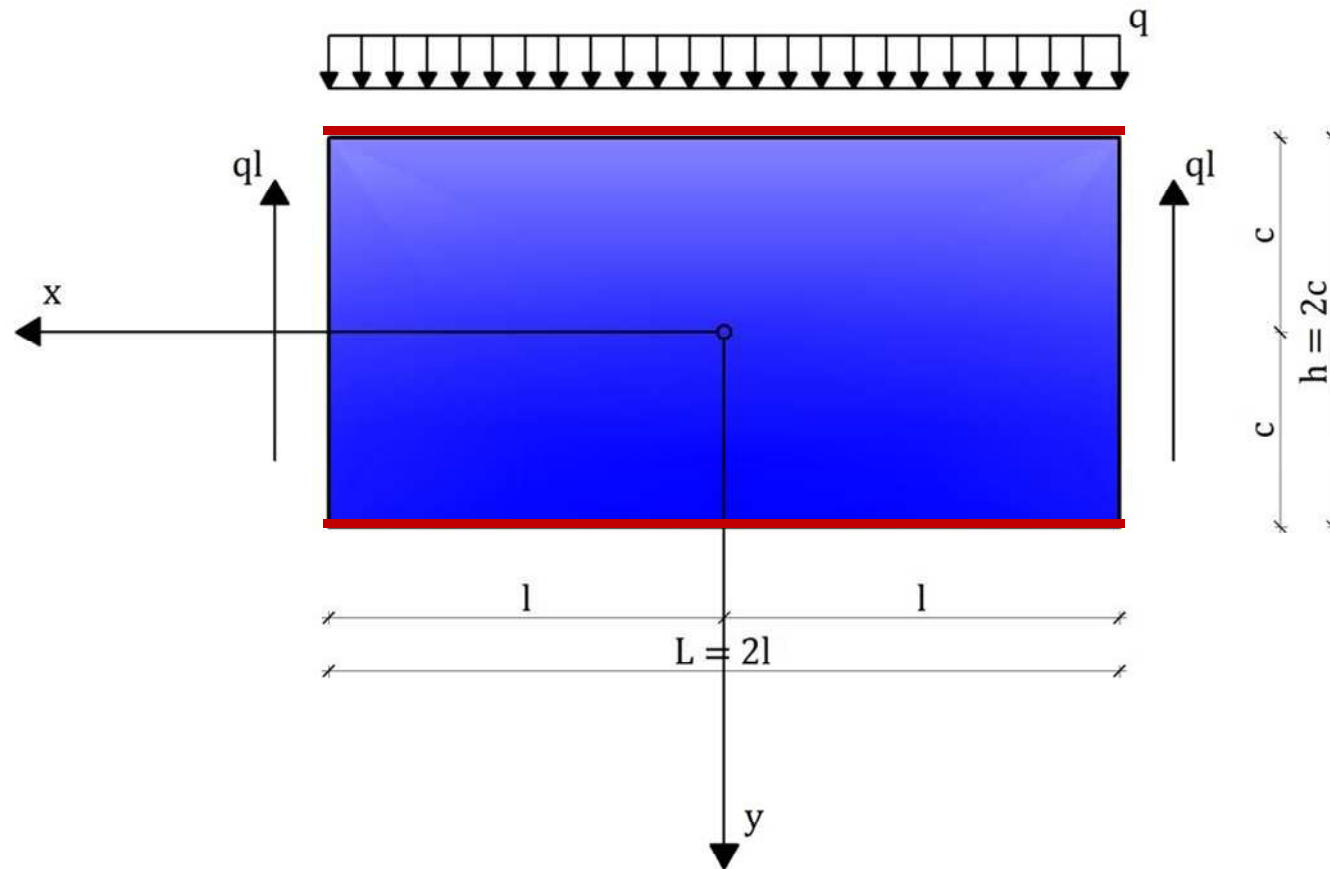
$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

POSTUPAK - ŠALABAHTER



KONTROLA IZRAZA

- Poznati iznosi normalnog naprezanja u smjeru osi x na rubovima:



KONTROLA IZRAZA

- Poznati iznosi normalnog naprezanja u smjeru osi x na rubovima:

$$\sigma_y(y = +c) = 0$$

$$\sigma_y(y = -c) = -q$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - c)^2 (2c + c) = 0 \quad \checkmark$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - (-c))^2 (2c + (-c)) = -q \quad \checkmark$$

KONTROLA IZRAZA

- Maxwellova jednačba:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \sigma_x + 2 \cdot (-\tau_{xy}) \cdot (-\tau_{xy}) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \sigma_y = 0$$

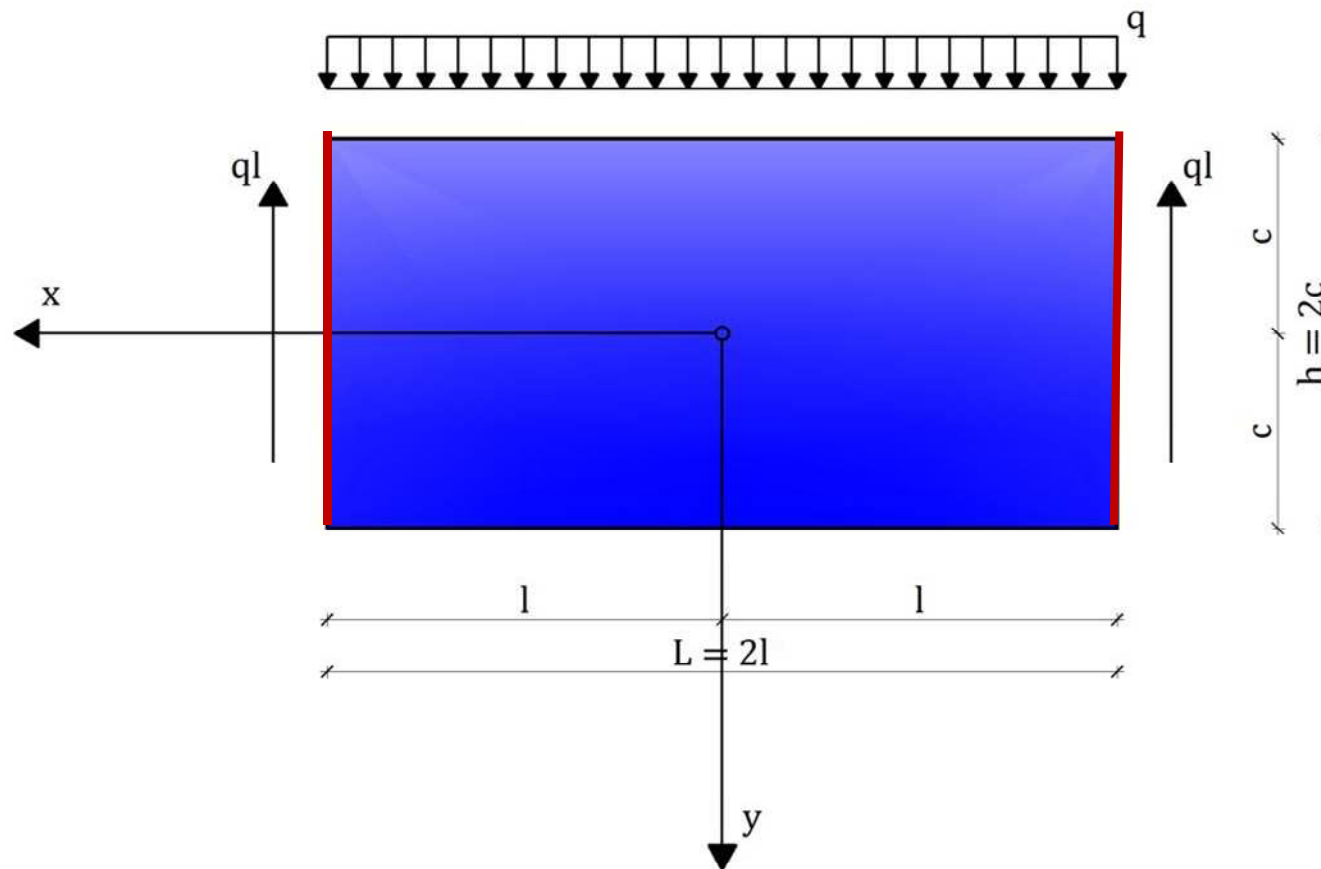
$$\boxed{\Phi} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \sigma_x + 2 \cdot (\tau_{xy})^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \sigma_y = 0 \quad \boxed{\sigma_x} \quad \boxed{\sigma_y} \quad \boxed{\tau_{xy}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 \right] + 2 \cdot \left[\frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x \right]^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \left[-\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y) \right] = 0 \quad \checkmark$$

KOREKCIJA IZRAZA ZA σ_x

- Rubni uvjeti zadovoljeni osim na rubu $x = \pm l$



KOREKCIJA IZRAZA ZA σ_x

- Rubni uvjeti zadovoljeni osim na rubu $x = \pm l$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

$$M_1 = d_5 I$$

$$\sigma_x = \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3$$

$$d_5 = \frac{c^2 q}{5I}$$

↓ moment

$$M_1 = \int_{-c}^{+c} \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 \cdot y \cdot dy$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} y^3 - d_5 y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

$$M_1 = \frac{2}{15} \frac{c^5 q}{I} \quad \dots \text{nelinearna raspodijela napreznaja}$$

↓ uklanjanje

prilaganje momenta
iste veličine, linearne raspodijele

KOMENTAR IZRAZA - σ_x

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

Bernoulli-Navierova hipoteza
ravnih poprečnih presjeka

posljedica postojanja σ_y
(u teoriji pravih štapova se ne uzima)

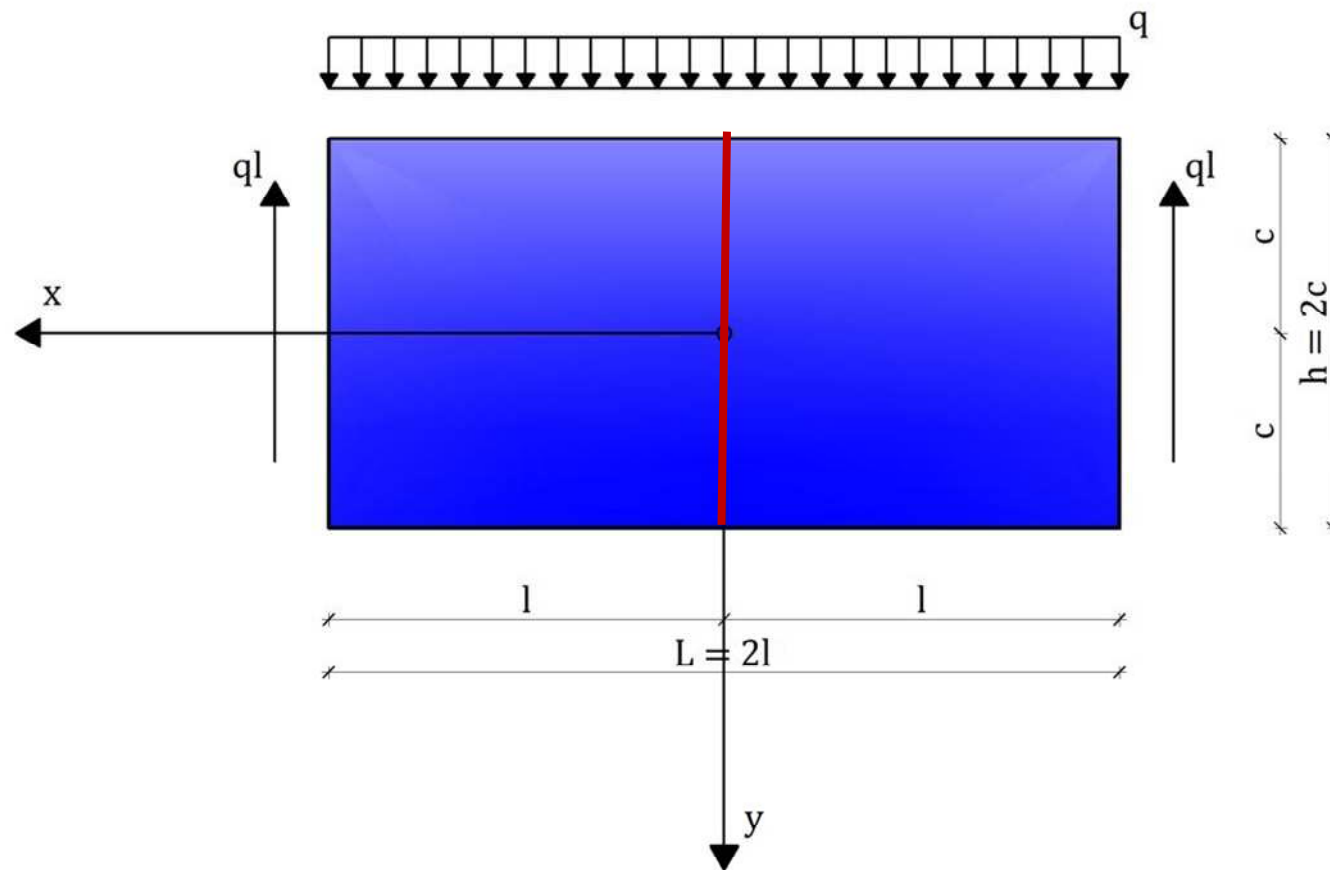
- Uobičajene dimenzije nosača

$$\frac{c}{l} < \frac{1}{5}$$

razlika između 'točnog' rješenja i onog prema hipotezi ravnih presjeka nije veća od 1,1%

ANALIZA IZRAZA - σ_x

- Srednji uspravni presjek nosača:



ANALIZA IZRAZA - σ_x

- Srednji uspravni presjek nosača:

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y \quad \leftarrow x = 0$$

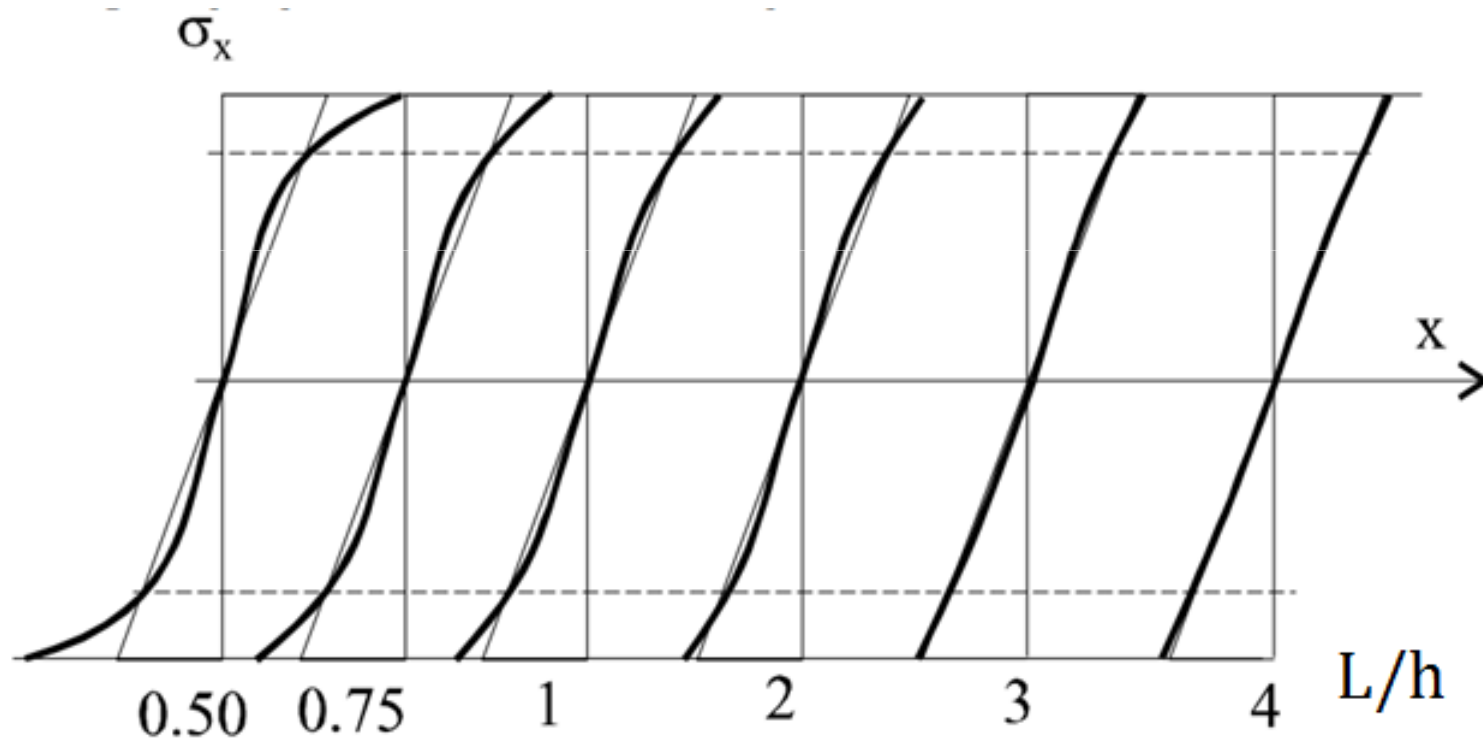
$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} l^2 y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$$

linearna raspodjela naprez. po visini

stroža teorija elastičnosti za ravninska stanja

ANALIZA IZRAZA - σ_x

- Srednji uspravni presjek nosača:



SISTEMATIZACIJA

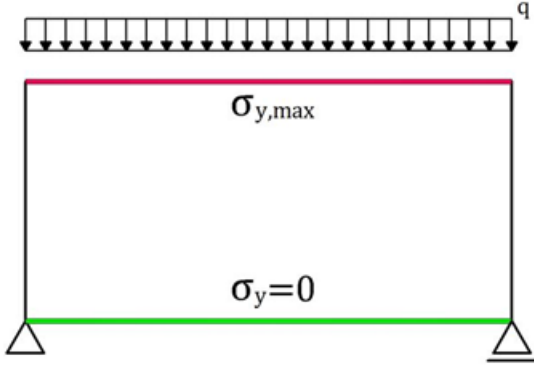
σ_x

Izrazi za normalno naprezanje u smjeru osi x		
Opća točka nosača	$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{q}{I} (l^2 - x^2)y + \frac{1}{3} \frac{q}{I} (y^2 - \frac{3}{5} c^2)y$	
Ekstremne vrijednosti naprezanja	Izraz za naprezanje	
	Maksimalno vlačno naprezanje	$\sigma_{x,max,vl} = \frac{q}{I} c \left(\frac{l^2}{2} + \frac{2}{15} c^2 \right)$
	Maksimalno tlačno naprezanje	$\sigma_{x,max,tl} = -\frac{q}{I} c \left(\frac{l^2}{2} + \frac{2}{15} c^2 \right)$
	Slika nosača s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja	

SISTEMATIZACIJA

 σ_y

Izrazi za normalno naprezanje u smjeru osi y	
Opća točka nosača	$\sigma_y = -\frac{1}{6} \frac{q}{I} (c - y)^2 (2c + y)$
Ekstremne vrijednosti naprezanja	Izraz za naprezanje
	Maksimalno naprezanje $\sigma_{y,\max} = -q$
	Minimalno naprezanje $\sigma_{y,\min} = 0$
	Slika nosača s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja



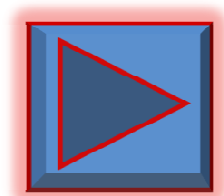
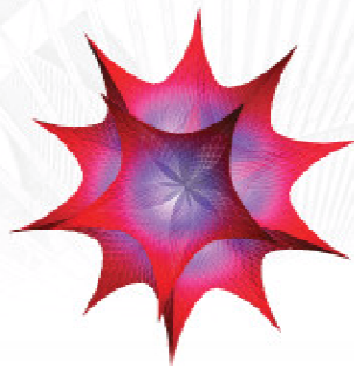
SISTEMATIZACIJA



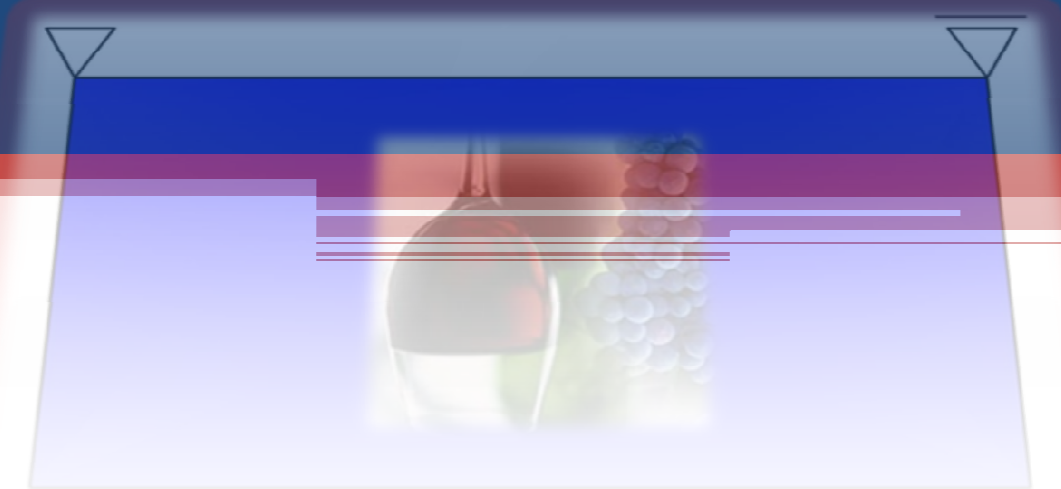
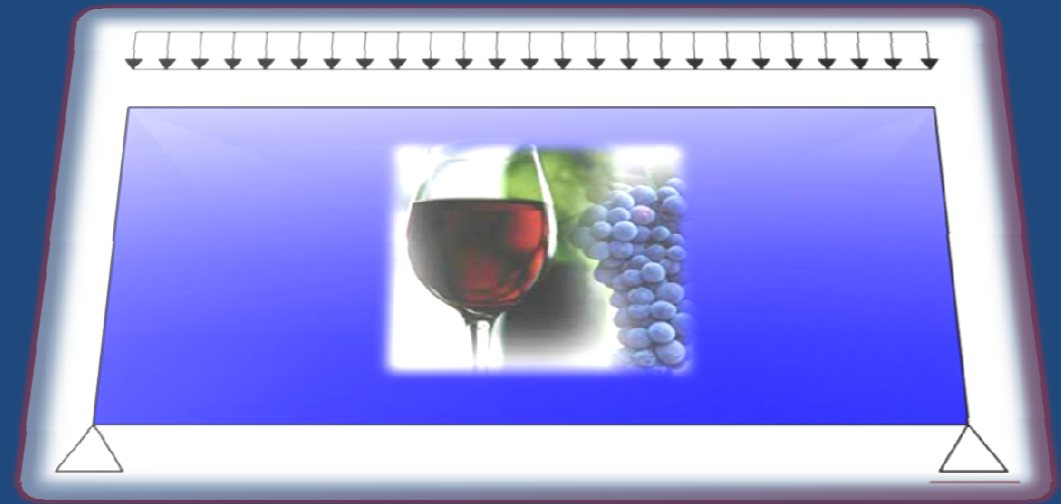
Izrazi za posmično naprezanje		
Opća točka nosača	$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x$	
Ekstremne vrijednosti naprezanja	Izraz za naprezanje	
	Maksimalno pozitivno naprezanje	$\tau_{xy,max} = \frac{ql}{2I} c^2$
	Maksimalno negativno naprezanje	$\tau_{xy,min} = -\frac{ql}{2I} c^2$
	Slika nosača s označenim ekstremnim vrijednostima naprezanja	

IZVOD

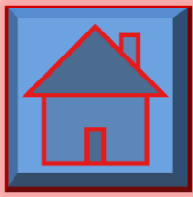
Wolfram
Mathematica



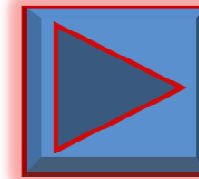
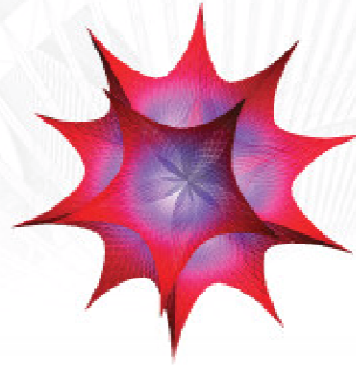
PROGRAM “VINO”



PROGRAM “VINO”



Wolfram
Mathematica[®]





PRIMJER VISOKOSTIJIJENOG NOSAČA

PRIMJER 1.

Potrebno je izračunati sva naprezanja:

- normalno naprezanje u smjeru osi x
- normalno naprezanje u smjeru osi y
- posmično naprezanje

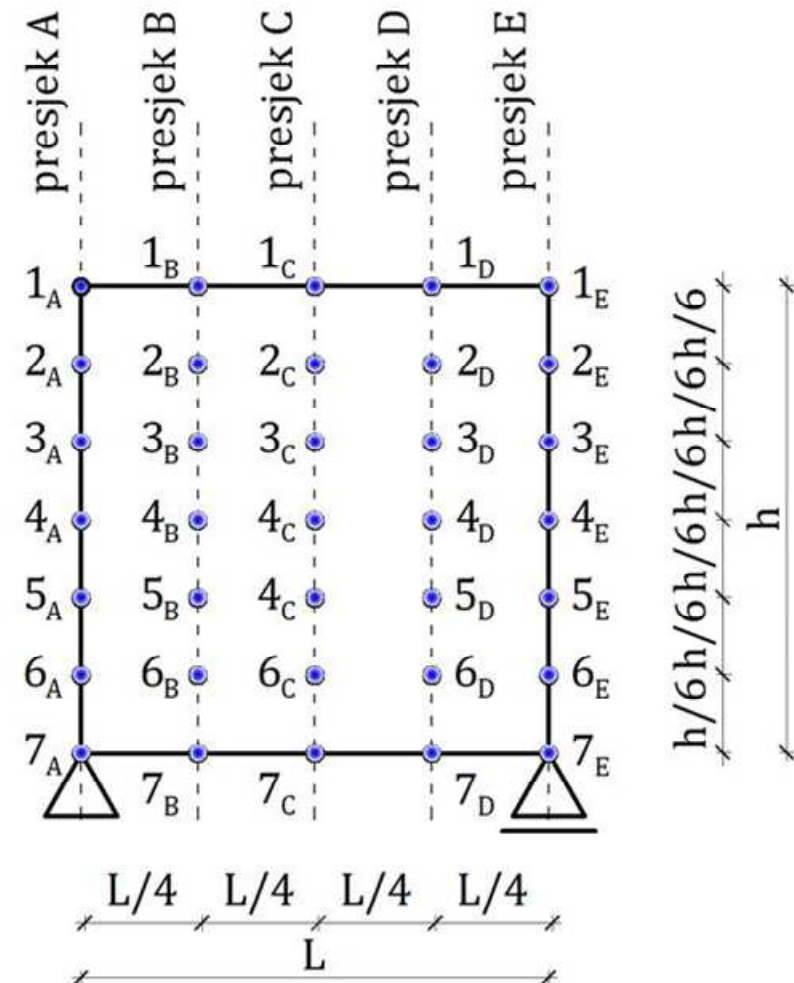
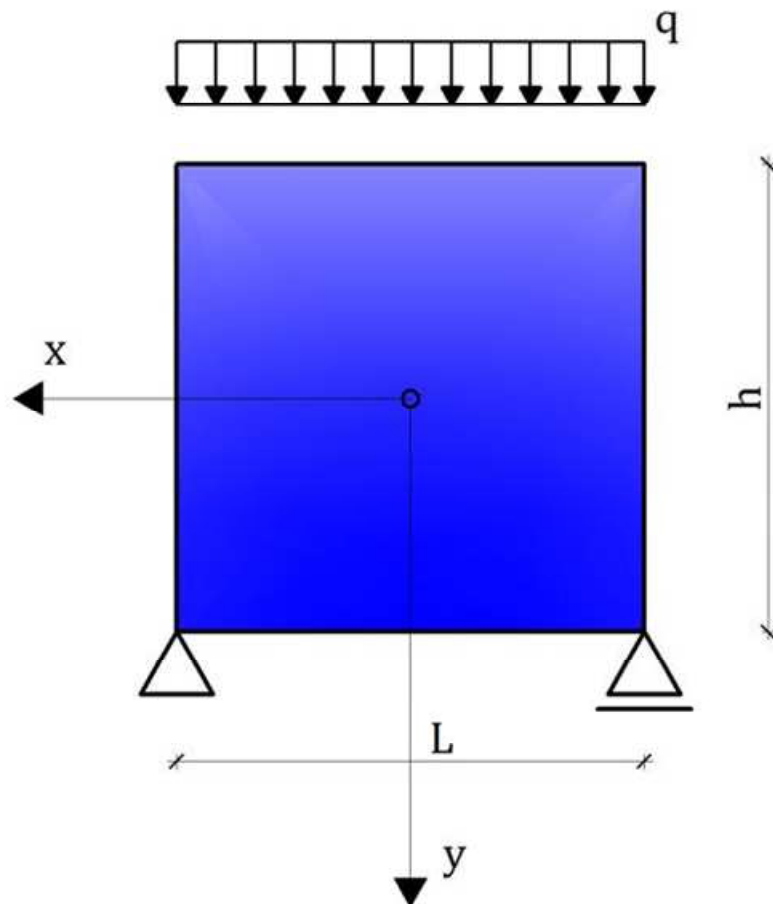
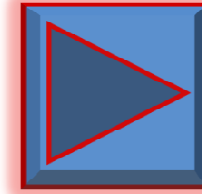
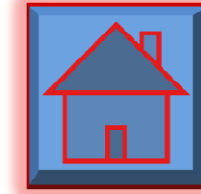
za visokostijeni nosač u zadanim točkama
te skicirati dijagrame svih naprezanja.

Zadane su veličine:

- dužina visokostijenog nosača: $L = 1 \text{ m}$
- visina visokostijenog nosača $h = 1 \text{ m}$
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje: $q = 1 \text{ kN/m}$

PRIMJER 1.

Zadani visokostijeni nosač:



PRIMJER 1.

Tablice naprezanja:






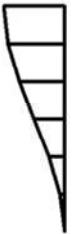


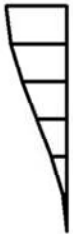

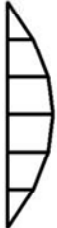
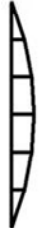



Normalno naprezanje u smjeru osi x					
točka/presjek	A	B	C	D	E
1	- 0,2000	- 0,7625	- 0,9500	- 0,7625	- 0,2000
2	0,0519	- 0,3231	- 0,4481	- 0,3231	0,0519
3	0,0815	- 0,1060	- 0,1685	- 0,1060	0,0815
4	0	0	0	0	0
5	- 0,0815	0,1060	0,1685	0,1060	- 0,0815
6	- 0,0519	0,3231	0,4481	0,3231	- 0,0519
7	0,2000	0,7625	0,9500	0,7625	0,2000

Normalno naprezanje u smjeru osi y					
točka/presjek	A	B	C	D	E
1	- 1,0000	- 1,0000	- 1,0000	- 1,0000	- 1,0000
2	- 0,9259	- 0,9259	- 0,9259	- 0,9259	- 0,9259
3	- 0,7407	- 0,7407	- 0,7407	- 0,7407	- 0,7407
4	- 0,5000	- 0,5000	- 0,5000	- 0,5000	- 0,5000
5	- 0,2593	- 0,2593	- 0,2593	- 0,2593	- 0,2593
6	- 0,0741	- 0,0741	- 0,0741	- 0,0741	- 0,0741
7	0	0	0	0	0

Posmično naprezanje					
točka/presjek	A	B	C	D	E
1	0	0	0	0	0
2	0,4167	0,2083	0	- 0,2083	- 0,4167
3	0,6667	0,3333	0	- 0,3333	- 0,6667
4	0,7500	0,3750	0	- 0,3750	- 0,7500
5	0,6667	0,3333	0	- 0,3333	- 0,6667
6	0,4167	0,2083	0	- 0,2083	- 0,4167
7	0	0	0	0	0

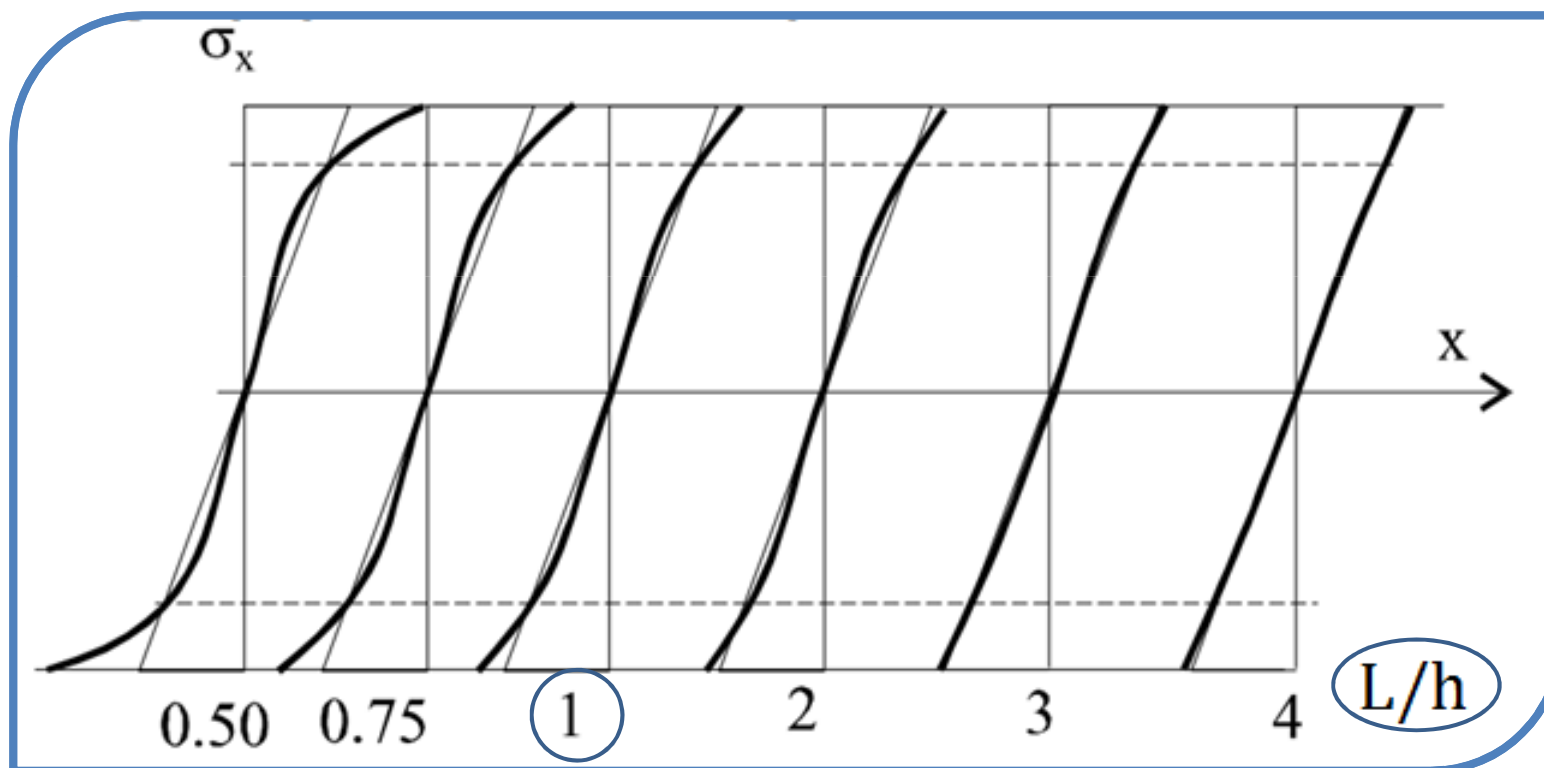
PRIMJER 1.

Dijagrami naprezanja:

⊖ ⊕	PRESJEK A	PRESJEK B	PRESJEK C	PRESJEK D	PRESJEK E
NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI x					
NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI y					
POSMIČNO NAPREZANJE					




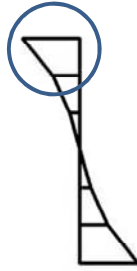







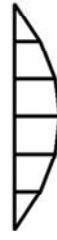
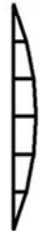


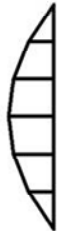
PRIMJER 1.

Dijagrami naprezanja:



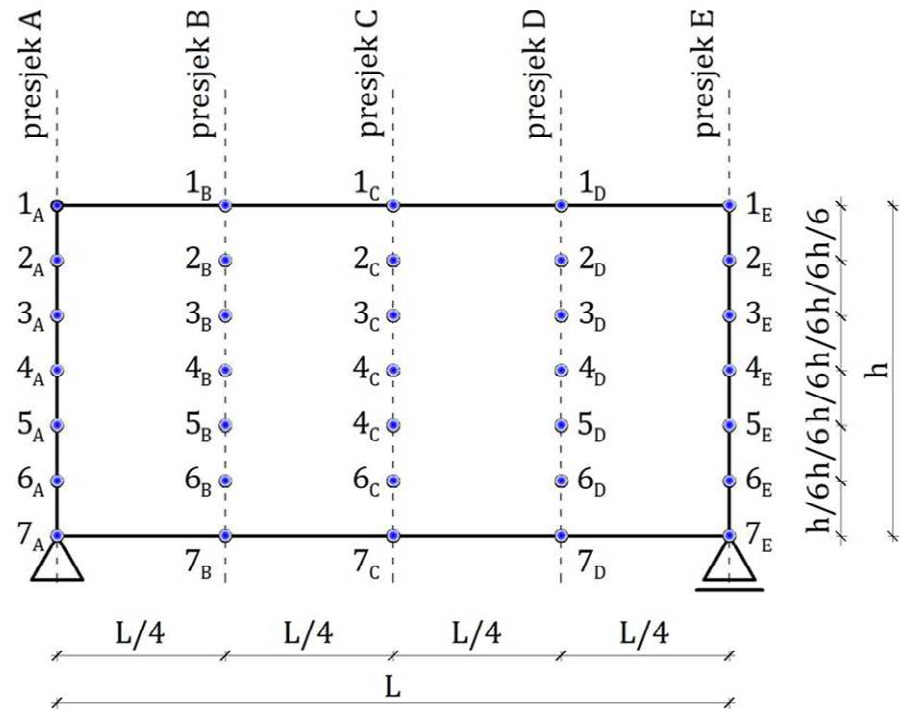
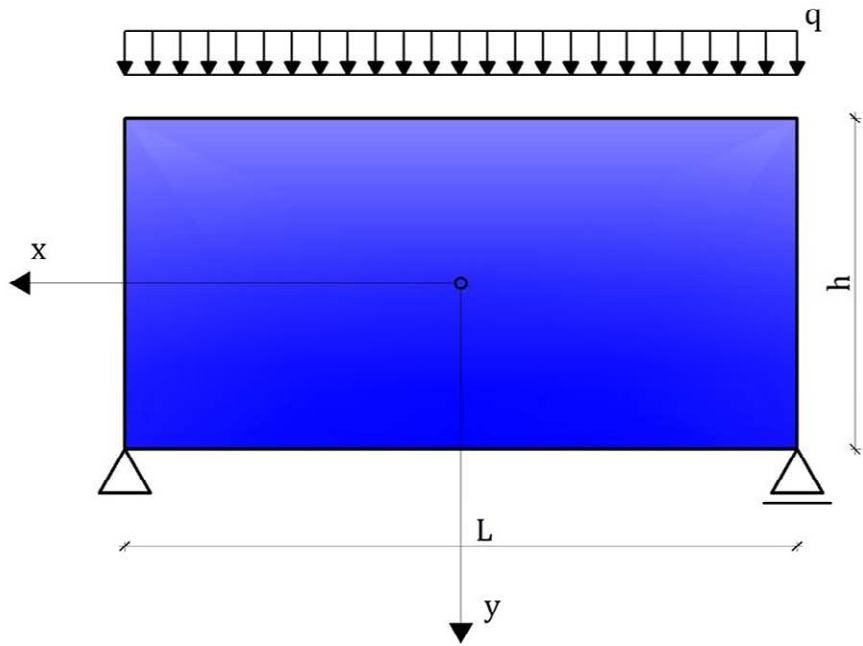
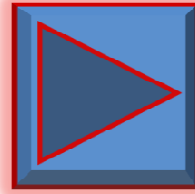
PRIMJER 1.

Dijagrami naprezanja:

	PRESJEK A	PRESJEK B	PRESJEK C	PRESJEK D	PRESJEK E
NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI x					
NORMALNO NAPREZANJE U SMJERU OSI y					
POSMIČNO NAPREZANJE					

PRIMJER ?

$$L/h = ?$$



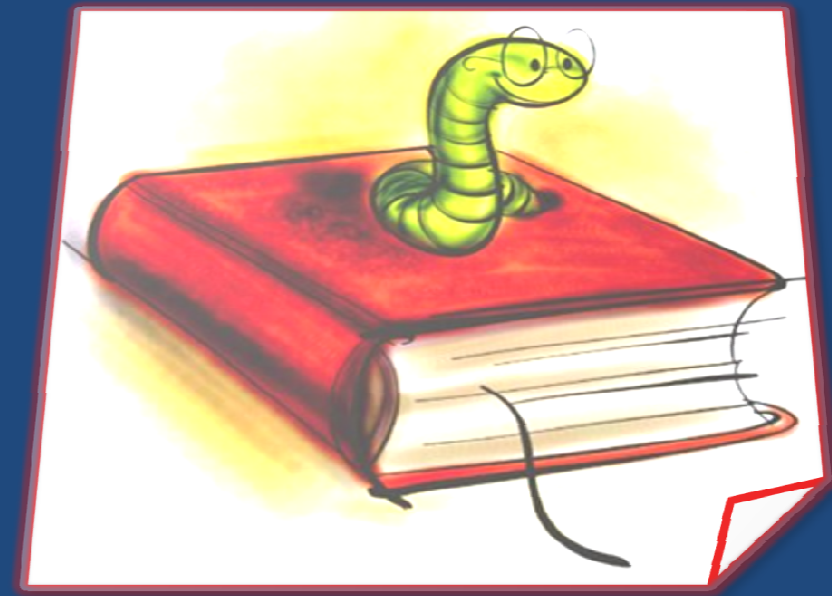
$$L = ?$$

$$h = ?$$

$$q = ?$$



ZAKLJUČAK



LITERATURA

LITERATURA

- Z. Kostrenčić: *Teorija elastičnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1982
- S. Timoshenko: *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951
- A. Mihanović, B. Trogrlić: *Zidovi i stijene*
http://www.gradst.hr/Portals/9/PropertyAgent/1167/Files/2813/GSII_6.1.pdf
- V. Šimić: *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- V. Šimić: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

HVALA NA PAŽNJI!



"I gave a presentation today but I only pretended to know what I was talking about. Fortunately, my audience was only pretending to listen."



HVALA ZA PAŽNJI!

M
E
N
A
R

I
T
A
N
J
A



"I gave a presentation today but I only pretended to know what I was talking about. Fortunately, my audience was only pretending to listen."



7. ZAKLJUČAK

Razmatrano rješenje problema savijanja visokostijenog nosača pokazuje stroga ograničenja pod kojima je izvedena Maxwellova jednačba kao i činjenica da je analitičko rješenje moguće za vrlo uski krug zadataka. Učestali inženjerski zadaci imaju složene rubne uvjete i složena opterećenja koja ne zadovoljavaju spomenute stroge pretpostavke. Stoga su inženjeri prisiljeni rabiti numeričke modele za rješenje postavljene zadaće.

Ovim seminarom htjelo se pokazati kako se akademski primjer jednostavno oslonjenog visokostijenog nosača može riješiti upotrebom Maxwellove jednačbe a programi u *Mathematici* dobiveni kao posljedica seminara mogu se koristiti i u inženjerstvu kao okvirne provjere složenijih proračuna.



8. LITERATURA

- [1.] Z. Kostrenčić: *Teorija elastičnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1982
- [2.] S. Timoshenko: *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951
- [3.] A. Mihanović, B. Trogrlić: *Zidovi i stijene*
http://www.gradst.hr/Portals/9/PropertyAgent/1167/Files/2813/GSII_6.1.pdf
- [4.] V. Šimić: *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [5.] V. Šimić: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.