[1]

12 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE

Definicija 12.1 *(KVANTIL)*

Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F(x)$i neka je zadan $q \in (0,1)$.

Broj z_q zove se kvantil distribucije F ako vrijedi $F(z_q) = q$.

Definicija 12.2 *(INTERVAL POVJERNJA POUZDANOSTI γ)*

Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable X koja ima poznatu distribuciju s nepoznatim parametrom t i neka je zadana pouzdanost $\gamma \in (0,1)$.

Za procjenitelje $G_1 = h_1(X_1, X_2, ..X_n)$ i $G_2 = h_2(X_1, X_2, ..X_n)$ za parametar t kažemo da čine interval povjerenja (G_1, G_2) za parametar t s pouzdanošću γ ako vrijedi:

$P(G_1 < t < G_2) \geq \gamma$.

Parametar t poprimit će vrijednosti unutar intervala (g_1, g_2) s puzdanošću γ,gdje je

$g_1 = h_1(x_1, x_2, ..x_n), g_2 = h_2(x_1, x_2, ..x_n)$.

12.1 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE slučajne varijable ako JE VARIJANCA POZNATA a uzorak veliki $n \to \infty$.

TEOREM 12.1 *Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable X koja ima poznatu distribuciju s nepoznatim parametrom očekivanje μ i poznatom varijancom σ^2.*

Ako je veliki uzorak $(n \to \infty)$ onda inerval povjerenja (G_1, G_2) za parametar očekivanje μ s pouzdanošću γ čine procjenitelji

$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *i* $G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

gdje je $\overline{X}$ uzoračka aritmetička sredina, a $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

[1]VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

Dokaz:
Prema Centralnom graničnom teormu za aritmetčku sredinu

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1), \qquad n \to \infty,$$

Primijenimo CGT na simetrični interval $(-\lambda, \lambda)$:
$P(-\lambda < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda) \approx F^*(\lambda) - F^*(-\lambda) = 2F^*(\lambda) - 1$
tj.
$P(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 2F^*(\lambda) - 1.$
Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \mu < G_2) = \gamma$,
onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F^*(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$
tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Zaključujemmo da je za velike n
$P(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma.$
Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ čine interval povjerenja
$(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
za parametar očekivanja μ slučajne varijable X s puzdanošću γ ako je poznata varijanca σ^2.

Parametar očekivanje μ s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu
$(\overline{x} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 12.1 *Ova procjena parametra očekivanja slučajne varijable može se koristi u zadacima za određivanje*
(a) $\delta = 2\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *širine inervala*
(b) $n = 4\lambda^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}$ *minimalne veličine uzorka*
uz zadanu pozdanost γ *za interval povjerenja* $(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$,
gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

12.2 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE slučajne varijable koja ima NORMALNU distribuciju ako je VARIJANCA POZNATA

TEOREM 12.2 *Neka je* $(X_1, X_2, ..X_n)$ *slučajni uzorak slučajne varijable* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *s nepoznatim parametrom očekivanje* μ *i poznatom varijancom*

σ^2.

Interval povjerenja (G_1, G_2) *za parametar očekivanja* μ *s puzdanošću* γ *čine procjenitelji*

$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Dokaz:

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, a

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1),$$

Na simetričnom intervalu $(-\lambda, \lambda)$:

$P(-\lambda < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda) = F^*(\lambda) - F^*(-\lambda) = 2F^*(\lambda) - 1$

tj.

$P(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2F^*(\lambda) - 1.$

Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \mu < G_2) = \gamma$,

onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F^*(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$

tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ je kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ čine interval povjerenja

$(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

za parametar očekivanja μ slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s puzdanošću γ ako je poznata varijanca σ^2.

Parametar očekivanje μ s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu $(\overline{x} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 12.2 *Ova procjena parametra očekivanja slučajne varijable* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *poznate varijance, može se koristi u zadacima za određivanje*

(a) $\delta = 2\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *širine inervala*

(b) $n = 4\lambda^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}$ *minimalne veličine uzorka*

uz zadanu pozdanost γ *za interval povjerenja*

$(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, *gdje je* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$

kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 12.3 *Kvantili za standardnu normalnu distribuciju* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.90	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.95	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	1.65	1.96	2.58

PRIMJER 12.1 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju* $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 0.64)$. *Uzet je uzorak veličine* $n = 5$ *i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine* $\overline{x} = 10.2$. *Odredite interval povjerenja za očekivanje slučajne varijable s pouzdanošću* $\gamma = 0.95$.

Rješenje:
$P(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma.$
Za očekivanje μ interval povjerenja pouzdanosti γ je
$(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka n=5, $\overline{x} = 10.2$ dobivamo interval povjerenja za μ :
$(\overline{x} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (10.2 - 1.96 * \frac{0.8}{\sqrt{5}}, 10.2 + 1.96 * \frac{0.8}{\sqrt{5}}) = (9.49, 10.90).$

PRIMJER

Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznatog očekivanja i poznate varijance $\sigma^2 = 0.64$. Koliki minimalni treba uzeti uzorak da je greška procjene očekivanja μ najviše jednaka 0.5, uz pouzdanost $\gamma = 0.95$.

Rješenje:
$n = 4\lambda^2\frac{\sigma^2}{\delta^2} = \lambda^2\frac{\sigma^2}{greska^2}$,
gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne, $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$.
$n = 1.96^2 * \frac{1}{0.5^2} * 0.64 = 9.8345.$

12.3 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE slučajne varijable koja ima NORMALNU distribuciju ako je VARIJANCA NEPOZNATA

TEOREM 12.3 *Neka je* $(X_1, X_2, ..X_n)$ *slučajni uzorak slučajne varijable* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *s nepoznatim parametrom očekivanje* μ *i nepoznatom varijancom* σ^2*.*

(i) Interval povjerenja (G_1, G_2) *za parametar očekivanja* μ *s puzdanošću* γ *čine procjenitelji :*

$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}$ *i* $G_2 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}$,

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina,* $\widehat{S}^2$ *korigirana uzoračka varijanca, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil sudentove distribucije* $t(n-1)$*,* $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$*.*

(ii) Interval povjerenja (G_1, G_2) *za parametar očekivanja* μ *s puzdanošću* γ *čine procjenitelji:*

$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{\Sigma}}{\sqrt{n-1}}, G_2 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{\Sigma}}{\sqrt{n}}$,

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina,* $\widehat{\Sigma}^2$ *uzoračka varijanca, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil studentove distribucije* $t(n-1)$*.*

Dokaz:

(i) Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $Y = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\widehat{S}} \sim t(n-1)$.

Na simetričnom intervalu $(-\lambda, \lambda)$:

$P(-\lambda < \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\widehat{S}} < \lambda) = F(\lambda) - F(-\lambda) = 2F(\lambda) - 1$

tj.

$P(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}) = 2F(\lambda) - 1.$

Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \mu < G_2) = \gamma$,

onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$

tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, G_2 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}$ čine interval povjerenja

$(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}})$

za parametar očekivanja μ slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s puzdanošću γ ako je nepoznata varijanca σ^2.

Parametar očekivanje μ s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(\overline{x} - \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}})$,

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Ako je tablica studentove distribucije $Y \sim t(n-1)$, dana u obliku $P(|Y| > \varepsilon) = p$, onda λ tražimo tako da je $P(|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\widehat{S}}| < \lambda) = 1-\gamma$.

(ii) Koristimo vezu $\widehat{S}^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{\Sigma}^2$.

NAPOMENA 12.4 *Širina intervala povjerenja za očekivanje slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance je*

$\delta = 2\lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}$

uz zadanu pozdanost γ, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 12.5 *Kvantili za studentovu distribuciju za $n = 5, t(4), F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:*

γ	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	2.78	4.60

PRIMJER 12.2 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2. Uzet je utorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 10.2$, i vrijednost korigirane uzoračke varijance $\widehat{s}^2 = 0.64$. Odredite interval povjerenja za očekivanje slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.*

Rješenje:

$P(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}) = \gamma$.

Za očekivanje μ interval povjerenja pouzdanosti γ je

$(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}})$,

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$.

Za n=5, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(4)$.

Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 2.78$.

Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\overline{x} = 10.2$, i $\widehat{s}^2 = 0.64$ dobivamo interval povjerenja za μ :

$$(\overline{x} - \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}) = (10.2 - 2.78 * \frac{0.8}{\sqrt{5}}, 10.2 + 2.78 * \frac{0.8}{\sqrt{5}})$$
$$= (9.20, 11.19).$$

12.4 INTERVAL POVJERENJA ZA parametar VJEROJATNOST BINOMNE slučajne varijable ako poznat parametar n ($n \to \infty$)

U Bernoullijevoj shemi s $X_i \sim B(1,p), i = 1,...,n$,slučajna varijabla $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ broj uspjeha u Bernoullijevoj shemi ima binomnu distribuciju $X \sim B(n,p)$.

Relativna frekvencija uspjeha u Bernoullijevoj shemi je slučajna varijabla $\frac{X}{n}$ koja odgovara $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ uzoračkoj aritmetičkoj sredini slučajnog uzorka $(X_1, X_2, ..X_n)$.

Prisjetimo se da je $\overline{X} = \frac{X}{n}$ je procjenitelj za vjerojatnost p u Binomnoj distibuciji.

TEOREM 12.4 *Ako je broj ponavljanja u Bernoullijevoj shemi velik* ($n \to \infty$), *onda inerval povjerenja* (G_1, G_2) *za parametar* p, *vjerojatnost događaja* A *u slučajnom pokusu s pouzdanošću* γ *čine procjenitelji*

$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$ *i* $G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$,

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina*

($\overline{X} = \frac{X}{n}$ *relativna frekvencija uspjeha u Bernoullijevoj shemi), a*

(a) $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

(b) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$.

Dokaz:

Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak iz Bernoullijeve sheme, $X_i \sim B(1,p)$.

Prisjetimo se da vrijedi $E(X_i) = p, Var(X_i) = p(1-p)$ i za uzoračku aritmetičku sredinu $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vrijedi

$E(\overline{X}) = p, Var(\overline{X}) = \frac{1}{n}p(1-p)$

(a) Prema CGT za za ($n \to \infty$) za uzoračku aritmetičku sredinu $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vrijedi

$\overline{X} \sim N(p, \frac{1}{n}p(1-p))$.

Za simetrični interval $(-\lambda, \lambda)$ možemo približno odrediti

$P(-\lambda \le \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \lambda) \approx 2F^*(\lambda) - 1.$

Nejednakost $-\lambda \le \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \lambda$

ekvivalentna je nejdenakosti:

$(\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}})^2 \le \lambda^2$

odnosno
$(n+\lambda^2)p^2 - (2\overline{X}n+\lambda^2)p + n\overline{X}^2 \leq 0$
Trebamo riješiti nejednakost po p.
Približna rješenja p_1, p_2 kvadratne jednadžbe (veliko n) su :
$p_1 \approx \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$,
$p_2 \approx \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$.
Kako je $(n+\lambda^2) > 0$ $p \in (p_1, p_2)$.
Zaključujemo da je
$P(\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}) \approx 2F^*(\lambda) - 1$.
Ako je zadana pouzdanost γ tako da je $P(G_1 < p < G_2) = \gamma$
onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F^*(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$,
tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$ čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjrojatnost p uspjeha u Bernoullijevoj shemi.

(b) Prema Čebiševljevoj nejednakosti za slučajnu varijablu $\overline{X}$ koja ima
$E(\overline{X}) = p, Var(\overline{X}) = \frac{1}{n}p(1-p)$ u obliku
$P(p - \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \overline{X} \leq p + \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$.
Nejednakost $p - \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \overline{X} \leq p + \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
ekvivalentna je nejednakosti (vidi pod (a)):
$\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$.
Zaključujemo da je
$P(\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$.
Ako je zadana pouzdanost γ tako da je $P(G_1 < p < G_2) = \gamma$
onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $1 - \frac{1}{\lambda^2} = \gamma$
tj. $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$.

Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$

čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjrojatnost p uspjeha u Bernoullijevoj shemi.

NAPOMENA 12.6 *Možemo izvesti interval povjerenja i koristeći teorem Moivre-Laplacea (CGT) za relativnu frekvenciju u Bernullijevoj shemi*

$P(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) \approx F^*(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(p-1)}}) - 1, n \to \infty.$
tj.
$P(\frac{X}{n} - \varepsilon < p < \frac{X}{n} + \varepsilon) \approx F^*(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(p-1)}}) - 1.$
Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < p < G_2) = \gamma$,
onda možemo odrediti ε tako da vrijedi $F^*(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(p-1)}}) = \frac{1+\gamma}{2}$,
tj. $\varepsilon = z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
odnosno $\varepsilon = z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}}$,uz $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

Procjenitelji $G_1 = \frac{X}{n} - \varepsilon, G_2 = \frac{X}{n} - \varepsilon$ čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjrojatnost p uspjeha u Bernoullijevoj shemi. varijable $X \sim B(n,p)$ s puzdanošću γ ako je poznat parametar n broj ponavljanja pokusa.

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu $(\frac{x}{n} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{x}{n} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}})$, gdje je $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

PRIMJER 12.3 *Odreditie interval povjerenja za vjerojatnost p u Bernoullijevoj shemi s pouzdanošću $\gamma = 0.95$ ako se pokus ponovi n=100, a broj uspjeha je 32.*

Rješenje:
Za slučajnu varijablu $X \sim B(n,p)$ vrijedi
$P(\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}) = \gamma$
gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$
$\overline{X} = \frac{X}{n}$ relativna frekvencija uspjeha.
Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$
čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjrojatnost p.

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu
$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$
gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.

Iz uzorka je uzeta relativna fekvencija $\overline{x} = \frac{x}{n} = \frac{32}{100}$, za pouzdanost $\gamma = 0.95$ iz tablice očitamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i odredimo interval
$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$
$= (0.32 - 1.96 * \frac{1}{\sqrt{100}}\sqrt{0.32 * (1-0.32)}, 0.32 + 1.96 * \frac{1}{\sqrt{100}}\sqrt{0.32 * (1-0.32)})$

$= (0.23, 0.41)$.

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću $\gamma = 0.95$ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(0.23, 0.41)$.

PRIMJER 12.4 *Pravljena je anketa o dolasku na predavanja VIS. Na uzorku 163 studenta njih 62 je odgovorilo da je dolazilo na predavanja. Odredite interval povjerenja za vjerojatnost dolaska studenata prve godine (450) na predavanja VIS s pouzdanošću 0.95.*

(Pretpostavimo da je izbor binomna distribucija)

Rješenje:

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.

Iz uzorka je uzeta relativna fekvencija $\overline{x} = \frac{x}{n} = \frac{62}{163} = 0.38$, za pouzdanost $\gamma = 0.95$ iz tablice očitamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i odredimo interval

$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$

$= (0.38 - 1.96 * \frac{1}{\sqrt{163}}\sqrt{0.38 * (1-0.38)}, 0.38 + 1.96 * \frac{1}{\sqrt{163}}\sqrt{0.38 * (1-0.38)})$

$= (0.30, 0.45)$.

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću $\gamma = 0.95$ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(0.30, 0.45)$.

Vjerojatnost dolaska na predavanja VIS s pouzdanošću 0.95 je između 0.30 i 0.45.

PRIMJER 12.5 *U anketi za izbore dobiveni su podaci za kandidata A:*

U uzorku od n=2500 glasača kandidat je dobio 1000 glasova.

Odredite interval povjerenja za postotak glasova koji će dobiti kandidat A na izborima s pouzdanošću 0.95.

(Pretpostavimo da je izbor binomna distribucija)

Rjšenje:

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.

Iz uzorka imamo relativnu fekvenciju $\overline{x} = \frac{x}{n} = \frac{1000}{2500} = 0.4$,

za pouzdanost $\gamma = 0.95$ iz tablice očitamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i odredimo interval

$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$

$= (0.4 - 1.96 * \frac{1}{\sqrt{2500}}\sqrt{0.4 * (1-0.4)}, 0.4 + 1.96 * \frac{1}{\sqrt{2500}}\sqrt{0.4 * (1-0.4)})$

$= (0.38, 0.42)$.

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću $\gamma = 0.95$ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(0.38, 0.42)$.

Postotak glasova koje će na izborima dobiti kandidat A s pouzdanošću 0.95 je između 38% i 42%.

PRIMJER 12.6 *Ako želimo odrediti postotak p% glasova koje će dobiti kandidat A na izborima pravimo anketu. Koliki uzorak treba uzeti da bi se za p odredio interval pouzdanosti 0.95 širine 0.04?*

Rješenje:

Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.

Širina intervala $\delta = 2\lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}$.

Kako je $\overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$ možemo ocijeniti veličinu uzorka n:

$n \geq \frac{(z_{\frac{1+\gamma}{2}})^2}{\delta^2}$.

Za zadane $\delta = 0.04$, $\gamma = 0.95$, dobivamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i

$n \geq \frac{(z_{\frac{1+\gamma}{2}})^2}{\delta^2} = \frac{1.96^2}{0.04^2} = 2401$.

Uzorak mora imati bar 2401 glasača da bi s pouzdanošću 0.95 interval povjerenja za postotak bodova na izborima za kandidata A bio širok 0.04. (grška unutar 4%).