

13 INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU

13.1 INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU slučajne varijable koja ima NORMALNU distribuciju poznatog očekivanja

TEOREM 13.1 *Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s nepoznatim parametrom varijancom σ^2 , i poznatog očekivanja μ . Interval povjerenja (G_1, G_2) za parametar varijance σ^2 s puzdanošću γ čine procjenitelji:*

$$G_1 = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ i } G_2 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantili hi-kvadrat distribucije $\chi^2(n)$,
 $F(z_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \frac{1-\gamma}{2}$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Dokaz: Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$.

Na intervalu (λ_1, λ_2) :

$$P(\lambda_1 < \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < \lambda_2) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \text{ tj.}$$

$$P\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Ako je zadana pozdanoost γ , $P(G_1 < \sigma^2 < G_2) = \gamma = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$,

onda možemo odrediti λ_1, λ_2 tako da vrijedi

$$F(\lambda_1) = \frac{1-\gamma}{2}, F(\lambda_2) = \frac{1+\gamma}{2} \text{ tj.}$$

$$\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}, \lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

su kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n)$.

Procjenitelji

$$G_1 = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, G_2 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

čine interval povjerenja

$$\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right)$$

za parametar σ^2 slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s puzdanošću γ .

Parametar varijanca σ^2 s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u intervalu

¹VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

$$\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n)$.

Ako je tablica hikvadrat distribucije $Y \sim \chi^2(n)$, dana u obliku

$$P(Y > \varepsilon) = p,$$

onda

$$P(Y > \lambda_2) = \frac{1-\gamma}{2}, P(Y > \lambda_1) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

NAPOMENA 13.1 Ova procjena parametra varijance slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ poznatog očekivanja može koristiti za određivanje širine intervala

$$\delta = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

uz zadanu pouzdanost γ za interval povjerenja

$$\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right),$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.

NAPOMENA 13.2 Kvantili za hikvadrat distribuciju za $n = 5$, $\chi^2(5)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.95	0.99	γ	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.975	0.995	$\frac{1-\gamma}{2}$	0.025	0.01
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	12.83	16.75	$z_{\frac{1-\gamma}{2}}$	0.83	0.55

PRIMJER 13.1 Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2 i poznatog očekivanja $\mu = 10$. Uzet je uzorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost uzorka (7, 8, 10, 9, 9). Odredite interval povjerenja za varijancu σ^2 slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.

Rješenje:

$$P\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) = \gamma.$$

Za varijancu σ^2 , poznatog očekivanja interval povjerenja pouzdanosti γ

je $\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$, gdje su

$\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n)$.

Za $n = 5$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$

Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.83$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 12.83$.

Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\sum_{i=1}^5 (x_i - 10)^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 15$ dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$\left(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) = \left(\frac{1}{12.83} * 15, \frac{1}{0.83} * 15\right) = (1.17, 18.07).$$

13.2 INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU slučajne varijable koja ima NORMALNU distribuciju nepoznatog očekivanja

TEOREM 13.2 *Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s nepoznatim parametrom varijancom σ^2 , nepoznatog očekivanja μ . Interval povjerenja (G_1, G_2) za varijance σ^2 s puzdanošću γ čine procjenitelji :*

$$G_1 = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2} \text{ i } G_2 = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1},$$

gdje je \widehat{S}^2 korigirana uzoračka varijanca,

a $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$,

$$F(z_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \frac{1-\gamma}{2}, F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Dokaz:

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $Y = \frac{n-1}{\sigma^2} \widehat{S}^2 \sim \chi^2(n-1)$.

Na intervalu (λ_1, λ_2) :

$$P(\lambda_1 < \frac{n-1}{\sigma^2} \widehat{S}^2 < \lambda_2) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$$

tj.

$$P\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}\right) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Ako je zadana pozdanost γ , $P(G_1 < \sigma^2 < G_2) = \gamma = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$,

i onda možemo odrediti λ_1, λ_2 tako da vrijedi $F(\lambda_1) = \frac{1-\gamma}{2}$, $F(\lambda_2) = \frac{1+\gamma}{2}$

tj. $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.

Procjenitelji $G_1 = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2}$, $G_2 = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}$ čine interval povjerenja $\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}\right)$ za parametar σ^2 slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s puzdanošću γ .

Parametar varijanca σ^2 s puzdanošću γ poprimat će vrijednosti u intervalu $\left(\frac{(n-1)\widehat{s}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\widehat{s}^2}{\lambda_1}\right)$, gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.

Ako je tablica hikvadrat distribucije $Y \sim \chi^2(n-1)$, dana u obliku $P(Y > \varepsilon) = p$, onda

$$P(Y > \lambda_2) = \frac{1-\gamma}{2}, P(Y > \lambda_1) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

NAPOMENA 13.3 Ova procjena parametra varijance slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznatog očekivanja može koristiti za određivanje

$$\delta = (n-1)\widehat{S}^2\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \text{ širine intervala}$$

uz zadanu pouzdanost γ za interval povjerenja $\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}\right)$,

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikovadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.

NAPOMENA 13.4 Kvantili za hikovadrat distribuciju za $n = 5$, $\chi^2(4)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.95	0.99	γ	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.975	0.995	$\frac{1-\gamma}{2}$	0.025	0.01
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	11.14	13.27	$z_{\frac{1-\gamma}{2}}$	0.48	0.21

PRIMJER 13.2 Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2 i nepoznatog očekivanja μ . Uzet je uzorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost uzorka (7, 8, 10, 9, 9). Odredite interval povjerenja za varijancu σ^2 slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.

Rješenje:

$$P\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}\right) = \gamma.$$

Za varijancu σ^2 interval povjerenja pouzdanosti γ je $\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}\right)$, gdje su

$$\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}, \lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \text{ kvantili hikovadrat distribucije } \chi^2(n-1).$$

Za $n = 5$, iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.48$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 11.14$.

Koristeći date vrijednosti iz uzorka :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5}(7 + 8 + 10 + 9 + 9) = 8.6$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 15$$

$$\widehat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (x_i - 8.6)^2$$

$$= \frac{1}{4}((7-8.6)^2 + (8-8.6)^2 + (10-8.6)^2 + (9-8.6)^2 + (9-8.6)^2) = 1.3$$

dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\lambda_1}\right) = \left(\frac{(5-1)}{11.14} * 1.3, \frac{(5-1)}{0.48} * 1.3\right) = (0.47, 10.83).$$

PRIMJER 13.3 Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2 i nepoznatog očekivanja μ . Uzet je uzorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost korigirane uzoračke varijance

$\hat{s}^2 = 0.64$. Odredite interval povjerenja za varijancu σ^2 slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.

Rješenje:

$$P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\lambda_1}\right) = \gamma.$$

Za varijancu σ^2 interval povjerenja pouzdanosti γ je $\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\lambda_1}\right)$, gdje su

$$\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}, \lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \text{ kvantili hkvadrat distribucije } \chi^2(n-1).$$

Za $n = 5$, iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.48$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 11.14$.

Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\hat{s}^2 = 0.64$ dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$\left(\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\lambda_2}, \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\lambda_1}\right) = \left(\frac{(5-1)}{11.14} * 0.64, \frac{(5-1)}{0.48} * 0.64\right) = (0.229, 5.33)$$

NAPOMENA 13.5 Intervali povjerenja za varijancu i standardnu devijaciju ako je n veliki.

$$(a) \text{ za } n > 30, P\left(\frac{2n\hat{\sigma}^2}{(\sqrt{2n-3}+\lambda)^2} < \sigma^2 < \frac{2n\hat{\sigma}^2}{(\sqrt{2n-3}-\lambda)^2}\right) = \gamma,$$

$\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije;

$$(b) \text{ za } n \geq 100, P\left(\hat{\sigma} - \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \sigma < \hat{\sigma} + \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}\right) = \gamma,$$

$\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije.

PRIMJER 13.4 Uzet je uzorak veličine 100 za visinu 18-godišnjakinja i dobivene su vrijednosti za uzoračku aritmetičku sredinu $\bar{x} = 165\text{cm}$ i uzoračku varijancu $\hat{\sigma}^2 = 5.8^2\text{cm}$.

Pretpostavimo da visina djevojaka ima normalnu distribuciju.

(a) Odredite interval povjerenja za očekivnje μ (srednju visinu) s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.

(b) Odredite interval povjerenja za standardnu devijaciju σ s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.

(c) Koliki treba biti uzorak da s pouzdanošću $\gamma = 0.95$ standardna devijacija ne odstupa od uzoračke standardne devijacije više od 5%?

Rješenje:

(a) za $n > 30$, $P\left(\bar{X} - \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije

$$\left(\bar{x} - \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = \left(165 - 1.96 \frac{5.8}{\sqrt{100}} < \mu < 165 + 1.96 * \frac{5.8}{\sqrt{100}}\right) = (163.8, 166.2).$$

(b) za $n \geq 100$, $P(\hat{\sigma} - \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \sigma < \hat{\sigma} + \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) = \gamma$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije

$$(\hat{\sigma} - \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \mu < \hat{\sigma} + \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) = (5.8 - 1.96 \frac{5.8}{\sqrt{200}} < \mu < 5.8 + 1.96 * \frac{5.8}{\sqrt{200}}) = (4.9, 6.6).$$

(c) $P(\hat{\sigma} - \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \sigma < \hat{\sigma} + \lambda \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) = \gamma$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije.

Iz $P(5.8 - 1.96 \frac{5.8}{\sqrt{2n}} < \sigma < 5.8 + 1.96 \frac{5.8}{\sqrt{2n}}) = 0.95$ i uvjeta

$$1.96 \frac{5.8}{\sqrt{2n}} < 5.8 * 5\%$$

zaključujemo da je za $n \geq 769$.

γ	0.90	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.95	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	1.65	1.96	2.58