2 KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI

POVIJEST

17. st. Pascal i Fermat

1933. Kolmogorov

Teorija Vjerojatnosti je matematička disciplina čiji je zadatak formirati i proučavati matematički model slučajnog pokusa.

SLUČAJNI POKUS

U prirodi se može uočiti slučajni pokus.

Pokus (eksperiment) je definiran odnosom uzroka i posljedica.

Pretpostavke za realizaciju pokusa su:

ponavljanje pokusa proizvoljno konačno mnogo puta i poznavanje mogućih ishoda.

U determinističkom pokusu ishod je jednoznačno određen uvjetima pokusa, a u slučajnom pokusu ishod nije jednoznačno odeđen uvjetima pokusa.

Osnovna pretpostavka slučajnog pokusa je da svako vršenje pokusa mora dati ishod (događaj) koji odgovara jednom i samo jednom elementarnom događaju.

Ishodi pokusa su jedini objekti za izgradnju matematičkog modela pokusa.

Definicija 2.1 *(ELEMENTARNI DOGAĐAJ.PROSTOR ELEMENTARNIH DOGAĐAJA)*

Slučajni pokus je definiran svojim osnovnim ishodima koji se međusobno isključuju i zovu se elementarni događaji. Označavaju se malim grčkim slovima $\omega_1, \omega_2, ..$

Skup $\Omega = \{\omega_i : \omega_i =$*elementarni događaji,* $i = 1, .., n\}$ *je neprazan skup i zove se prostor elementarnih događaja.*

PRIMJER 2.1 *Slučajni pokus= bacnje novčića;*

elementarni događaji: ω_1, ω_2;

$\omega_1 =$ *"palo pismo"*

$\omega_2 =$ *"pala glava";*

Prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

[1]VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

Definicija 2.2 *Definicija(SLUČAJNI DOGAĐAJ)*

Slučajni događaj je podskup prostora elementarnih događaja . Označavaju se velikim tiskanim slovima latinice A,B,...

$A \subseteq \Omega$.

Definicija (SIOGURAN DOGAĐAJ)

Cijeli prostor elementarnih događaja Ω je siguran (događaj koji se mora dogoditi u svakom vršenju pokusa).

Definicija (NEMOGUĆ DOGAĐAJ)

Prazan skup $\emptyset$ je nemoguć događaj (događaj koji se nikad neće nikad neće dogoditi).

Definicija (POVOLJAN DOGAĐAJ)

Elementarni događaj koji pripada događaju A zove se povoljan za događaj A (ako pojavljivanje tog elementarnog događaja u pokusu povlači da se dogodio događaj A).

PRIMJER 2.2 *Slučajni pokus=bacanje igraće kocke;*

elementarni događaji:

$\omega_1 =$ *"pala 1",...,* $\omega_6 =$ *"pala 6";*

Prostor elementarnih događaja:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

A="pao je paran broj";

A=$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}$.

Elementarni događaji $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ *su povoljni za događaj A.*

OPERACIJE SA SKUPOVIMA

Slučajni događaji su podskupovi od Ω. Operacije sa događajima definiramo pomoću operacija sa skupovima.

Podskup događaja: $A \subseteq B$:

(dogodi se A $\Rightarrow$ dogodi se B);

Razlika događaja: $A \backslash B$:

(događaj $A \backslash B$ se dogodi ako se dogodi A i ne dogodi B);

Suprotan događaj: $A^c = \Omega \backslash A$:

(A^c se dogodi $\Leftrightarrow$ A ne dogodi);

Presjek događaja : $A \cap B$:

(događaj $A \cap B$ se dogodi $\Leftrightarrow$ dogode se i A i B);

Unija događaja:$A \cup B$:

(događaj $A \cup B$ se dogodi $\Leftrightarrow$ dogodi se ili A ili B);

T: Vrijede de Morganova pravila:

$(\bigcup_k A_k)^c = \bigcap_k A_k^c$;

$(\bigcap_k A_k)^c = \bigcup_k A_k^c$.

Definicija 2.3 *(DOGAĐAJI SE ISKLJUČUJU)*

Za događaje A i B kažemo da se međusobno isključuju ako je njihov presjek jednak $\emptyset$.

Definicija 2.4 *(POTPUN SISTEM DOGAĐAJA)*

Skupovi $A_{1,}A_2, ..., A_n$ *čine potpun sistem događaja ako se svi međusobno isključuju i ako im je unija cijeli prostor elementarnih događaja:*

$A_{i,} \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, i = 1, ..., n; \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$

PRIMJER 2.3 *Iz skupa jednoznamenkastih brojeva izabiremo jedan broj. Neka je događaj A="broj je djeljiv s 2" , događaj B="broj je djeljiv s 3".*

Naći izraze za događaje C:

(a) C="broj djeljiv i s 2 i s 3";

(b) C="broj djeljiv ili s 2 ili s 3";

(c) C="broj paran a nije djeljiv s 3";

(d) C="broj nije paran a djeljiv s 3";

(e) C="broj nije ni paran ni djeljiv s 3".

Rješenje:

A={2,4,6,8}, B={3,6,9}

(a) C=$A \cap B = \{6\}$;

(b) C=$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$;

(c) C=$A \backslash B = \{2, 4, 8\}$;

(d) C=$B \backslash A = \{3, 9\}$;

(e) C=$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \{1, 5, 7\}$.

PRIMJER 2.4 *Iz tablice slučajnih brojeva izabran je jedan broj. Događaj A="broj je djeljiv s dva", događaj B="zadnja znamenka je 0". Što označava događaj C:*

(a) C=$A \cap B$;

(b) C=$A^c \cap B$;

(c)C=$A \cup B$;

Rješenje:
(a) C=”broj je paran i zadnja znamenka je 0”;
(b) C=$\emptyset$ nemoguć događaj;
(c) C=A =”broj je paran”.

PRIMJER 2.5 *Slučajni pokus je gađanje u metu. Pokus se ponavlja 3 puta. Promatraju se događaji A, B, C koji znače pogađanje mete u prvom, drugom i trećem pokušaju. Pomoću tih događaja opisati slijedeće događaje:*
(a) ”sva tri pogotka”;
(b) ”tri promašaja”;
(c) ”bar jedan pogodak”;
(d) ”bar jedan promašaj”;
(e) ”najviše dva pogotka”;
(f) ”najviše jedan pogodak”;
(g) ”bar dva pogotka”;
(i) ”do trećeg gađanja nije bilo pogodaka”.

Rješenje:
(a) $A \cap B \cap C$;
(b) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$;
(c) $A \cup B \cup C$;
(d) $A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cap B \cap C)^c$;
(e) $A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c) = A^c \cup B^c \cup C^c$;=(d)
(f) $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$;
(g) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;=(f)
(i) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

PRIMJER 2.6 *Za koje događaje vrijedi:*
(a) $A \cup B = A$;
(b) $A \cap B = A$;
(c)$A \cap B = A \cup B$;
(d) $A \cap B = A^c$
(e) $A \cup B = A^c$.

Rješenje:
(a) $B \subset A$;
(b) $A \subset B$;
(c) $A = B$;

(d) $A = \Omega, B = \emptyset$;
(e) $A = \emptyset, B = \Omega$.

2.1 KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI (A PRIORI)

Laplace "Theorie analitique des probabilities" 1812.

Definicija 2.5 *(KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI A PRIORI)*
Neka je prostor elementarnih događaja konačan skup $|\Omega| = n$, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. *Neka su svi ementarni događaji jednako mogući. Neka događaj* A *ima* m *povoljnih elementarnih događaja,* $A \subset \Omega, |A| = m$.
Vjerojatnost svakog elementarnog događaja je $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.
Vjerojatnost događaja A *definira se kao broj:*
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

T: SVOJSTVA:
(1) $P(\Omega) = 1$,
(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
(3) $P(\emptyset) = 0$,
(4) $0 \leq P(A) \leq 1$,
(5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
(6) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
(7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Dokaz
(1) $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$,
(2) $P(A^c) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$,
(3) $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = (2) = 1 - P(\Omega) = (1) = 1 - 1 = 0$,
(4) $A \subset \Omega, 0 < |A| < n \Rightarrow 0 < P(A) < 1$,
prema (1) i (3) $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$.
(5) $|A| \leq |B| \Rightarrow \frac{|A|}{n} \leq \frac{|B|}{n} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
(6) $|A \cup B| = |A| + |B| \Rightarrow$
$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{n} = \frac{|A|+|B|}{n} = \frac{|A|}{n} + \frac{|B|}{n}$$
$$= P(A) + P(B),$$
(7) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow$
$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{n} = \frac{|A|+|B|-|A \cap B|}{n} = \frac{|A|}{n} + \frac{|B|}{n} - \frac{|A \cap B|}{n}$$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

SLABOSTI:

-restriktivna jer se može primijeniti samo na slučajne pokuse s konačno mnogo elementarnih događaja;

-kružna jer se u definiciji vjerojatnosti koristi formulacija "jednako mogući" tj. "jednako vjerojatni".

PRIMJER 2.7 *Slučajni pokus: bacanje igraće kocke;*

Kolika je vjerojatnost (klasična apriori) događaja A="pao broj veći ili jednak 3"?

Rješenje:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n = |\Omega| = 6$.

$A = \{3, 4, 5, 6\}, |A| = 4$.

$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{4}{6} = 0.666$.

PRIMJER 2.8 *U kutiji je pet kuglica: dvije bijele i 3 crne. Iz kutije slučajno izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da će izvučena kuglica biti crna?*

Rješenje:

Slučajni pokus: izvlačimo kuglicu iz kutije u kojoj su 2 b i 3 c kuglice;

$\Omega = \{b, b, c, c, c\}, n = |\Omega| = 5$.

A="kuglica je crna";

$A = \{c, c, c\}, |A| = 3$,

$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{3}{5}$.

PRIMJER 2.9 *U kutiji je n olovaka jedne vrste od kojih je n_T ispravnih, a $n_D = n - n_T$ neispravnih. Uzmemo slučajni uzorak od r olovaka. Kolika je vjerojatnost da je među njima r_T ispravnih $(0 \leq r_T \leq r)$i r_D neispravnih?*

Rješenje:

Slučajni pokus: izbor od r elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n elemenata $n = n_T + n_D, r = r_T + r_D$.

Ω ={svi uzorci veličine r iz n-čl. skupa}

$|\Omega| = \binom{n}{r}$;

Događaj A="uzorak ima r_T ispravnih i r_D neispravnih";

$|A|$ =Broj svih uzoraka veličine r iz n -čl. skupa bez vraćanja koji imaju r_T ispravnih i r_D neispravnih:

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja (koristimo teorem o uzastopnom prebrojavanju i broj kombinacija r_i-razreda od n_i elemenata).

$|A| = C_{n_T}^{(r_T)} \cdot C_{n_D}^{(r_D)} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n_D}{r_D} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}$.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}}{\binom{n}{r}}$.

PRIMJER 2.10 *U skupu od 27 proizvoda 7 je neispravnih. Kolika je vjerojatnost da izaberemo uzorak koji se sastoji od 5 dobrih i 3 neispravna proizvoda?*

Rješenje:

Slučajni pokus: izbor od r elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n elemenata $n = n_T + n_D, r = r_T + r_D$.

$n = 27, r = 8,\ n_T = 20, n_D = 7, r_T = 5, r_D = 3$.

Ω ={svi uzorci veličine r=8 iz n=27-čl. skupa};

$|\Omega| = \binom{n}{r} = \binom{27}{8} = 2220\,075$;

Događaj A=”uzorak ima $r_T = 5$ ispravnih i r_D =3 neispravnih””;

$|A|$ =Broj svih uzoraka veličine r iz n -čl. skupa bez vraćanja koji imaju r_T ispravnih od n_T i r_D neispravnih od n_D:

$|A| = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n_D}{r_D} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T} = \binom{20}{5} \cdot \binom{7}{3} = 542640$

P(A)=$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{542640}{2220\,075} = 0.244\,42$.

2.2 KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI APOSTERIORI

Definicija 2.6 *(KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI A POSTERIORI)*

Neka se slučajni pokus ponavlja n puta, $n \in N$, i neka događaj A nastupi n_A puta. Ako slučajni pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p$,

onda se vjerojatnost a posteriori događaja A definira kao broj:

$P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p$,

$0 \le P(A) \le 1$

Često se P(A) zove STATISTIČKA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI.

T: SVOJSTVA:

$\omega_1 = 0 =$ ”nije se dogodio A”;

$\omega_2 = 1 =$ "dogodio se A";
$\Omega = \{0,1\} \times ... \times \{0,1\}, n$ puta;
(1) $P(\Omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_\Omega}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$,
(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
(3) $P(\emptyset) = 0$,
(4) $0 \leq P(A) \leq 1$,
(5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
(6) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
(7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dokaz: analogno kao klasična definicija vjerojatnosti a priori.
SLABOSTI:
P(A)= $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$,
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow |P(A) - \frac{n_A}{n}| < \epsilon$,
ali n_0 ovisi o realizaciji slučajnog pokuasa.
Za konkretan slučajni pokus teško provjeriti ima li svojstvo stabilnosti relativnih frekvencija!

PRIMJER 2.11 *Bacamo novčić n=24000 puta. Kolika je vjerojatnost a posteriori događaja A="palo pismo" ako je pismo palo 12012 puta.*

Rješenje:
Slučajni pokus: bacanje novčića.
$\omega_1 = 0 =$ "nije palo pismo";
$\omega_2 = 1 =$ "palo pismo";
$\Omega = \{0,1\} \times ... \times \{0,1\}, n = 24000$ puta;
Pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija ako je homogen.
$P(\omega_1)= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_{\omega_1}}{n} = p = \frac{1}{2}$ (iskustvo),
$P(\omega_2)= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_{\omega_2}}{n} = p = \frac{1}{2}$ (iskustvo).
$A = \omega_2, n_{\omega_2} = 12012$
$P(A) = \frac{n_{\omega_2}}{n} = \frac{12012}{24000} = 0.5005$.

2.3 GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

Definicija 2.7 *(GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST)*
Neka se slučajni pokus sastoji u slučajnom izboru točke u skupu $\Omega = R^n$ *za koji vrijedi* $\mu(\Omega) > 0$*, gdje je* μ *geometrijska mjera (Lebesgueova mjera) (za n=1 duljina, n=2 površina, n=3 volumen). Neka je događaj*
$A \subset \Omega$ *izbor točke iz skupa* A
(A je Borelov skup).
Geometrijska vjerojatnost događaja A, (vjerojatnost da je izabrana točka iz skupa A) je broj $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

PRIMJER 2.12 *U kvadratu stranice a slučajno je izabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da je točka s dijagonale kvadrata?*

Rješenje:
Slučajni pokus: slučajni izbor točke u skupu $\Omega = [0, a] \times [0, a]$.
A=dijagonala kvadrata
$A \subset \Omega, A = \{(x, y) \in \Omega : x = y\}$.
$\mu(\Omega) = a^2, \mu(A) = 0,$
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = 0.$

PRIMJER 2.13 *U kvadratu stranice a slučajno je izabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da je točka unutar upisanog kruga?*

Rješenje:
Slučajni pokus: slučajni izbor točke u skupu $\Omega = [0, a] \times [0, a]$.
A=upisani krug u kvadrat
$A \subset \Omega, A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2\}$.
$\mu(\Omega) = a^2, \mu(A) = (\frac{a}{2})^2\pi,$
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(\frac{a}{2})^2\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$

PRIMJER 2.14 *Kolika je vjerojatnost da zbir dva slučajno izabrana broja unutar segmenta [0,1] bude manji od 1, a da njihov produkt bude manji od 2/9?*

Rješenje:
$\Omega = [0, 1] \times [0, 1].$
$A \subset \Omega, A = \{(x, y) \in \Omega : 0 \leq x \leq 1/3, 0 \leq y \leq 1 - x\} \cup$
$\{(x, y) \in \Omega : \frac{1}{3} \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq \frac{2}{9x}\} \cup$

$\{(x,y) \in \Omega : \frac{2}{3} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$
$\mu(\Omega) = 1, \mu(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$

PRIMJER 2.15 *Na brojevnom pravcu odaberem slučajno točke a i b tako da je* $a \in [0,3], b \in [-2,0]$. *Odedite vjerojatnost da je udaljenost točaka a i b veća od 3?*

Rješenje:
Ω= točka je unutar pravokutnika $[0,3] \times [-2,0]$.
A = toča je unutar trokuta $\{(x,y) \in \Omega : x - y > 3,\ x > 1,\ y > -2\}$.
$\mu(\Omega) = 6,\ \ \mu(A) = 2.$
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{6}{2} = \frac{1}{3}.$