

6 PRIMJERI DISKRETNIH SLUČAJNIH VARIJABLI

6.1 (Bernoullijeva shema. Binomna distribucija (razdioba))

Definicija 6.1 (*Bernoullijeva shema*) U m nezavisnih pokusa, vjerojatnost da se dogodi događaj A u svakom od njih je jednaka i $P(A) = p$. Takvu shemu događaja zovemo Bernoullijeva shema.

(Pretpostavljamo da su pokusi nezavisni, tj. da vjerojatnost pojave događaja A u svakom od pokusa ne ovisi od toga da li se on dogodio ili nije u nekom drugom pokusa.)

Definicija 6.2 (*Binomna slučajna varijabla*)

Slučajnu varijablu $X =$ broj pojavljivanja događaja A u $m \in \mathbb{N}$ pokusa u Bernoullijevoj shemi s vjerojatnošću p , $p \in (0, 1)$ događaja A zovemo Bernoullijeva ili Binomna slučajna varijabla.

Slika Binomne slučajne varijable je $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, \dots, m\}$.

Funkcija vjerojatnosti Binomne slučajne varijable je

$$f(x) := \begin{cases} P(X = k) = \binom{m}{k} p^k \cdot (1 - p)^{m-k}, & x = k \in \mathcal{R}(X) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija distribucije Binomne slučajne varijable je

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k:k \leq x} \binom{m}{k} p^k \cdot (1 - p)^{m-k}, & 0 \leq x < m \\ 1, & m \leq x. \end{cases}$$

Definicija 6.3 (*BINOMNA DISTRIBUCIJA*)

Za sve slučajne varijable koje imaju sliku $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ i funkciju vjerojatnosti

$$f(x) = \binom{m}{x} p^x (1 - p)^{m-x}, \quad x \in \mathcal{R}(X)$$

¹VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

kažemo da imaju BINOMNU DISTRIBUCIJU (RAZDIOBU) s parametrima m i p i označavamo

$$X \sim B(m, p).$$

PRIMJER 6.1 Funkcija $f(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$ je funkcija vjerojatnosti.

Prisjetimo se Binomnog teorema i iskoristimo za računanje

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq x \leq m} f(x) &= \sum_{0 \leq x \leq m} \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k} \\ &= (p + (1-p))^m \\ &= 1. \end{aligned}$$

PRIMJER 6.2 Očekivanje diskretne slučajne varijable koja ima binomnu distribuciju $X \sim B(m, p)$ je

$$E(X) = m \cdot p$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{0 \leq x \leq m} x \cdot f(x) \\ &= \sum_{x=0}^m x \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x} \\ &= \sum_{k=1}^m k \cdot \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k} \\ &= mp \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} p^{k-1} \cdot (1-p)^{(m-1)-(k-1)} \\ &= mp \cdot (1 - (1-p))^{m-1} \\ &= mp \cdot 1 \\ &= mp. \end{aligned}$$

PRIMJER 6.3 Varijanca diskretne slučajne varijable koja ima binomnu distribuciju $X \sim B(m, p)$ je

$$\text{Var}(X) = m \cdot p \cdot (1-p)$$

Rješenje:

(pokušajte sami)

NAPOMENA 6.1 Ako je $p = 1/2$ binomna distribucija je simetrična.

PRIMJER 6.4 Promatramo slučajan pokus gađanja u metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka mete je $\frac{1}{2}$. Neka je slučajna varijabla $X =$ broj pogodaka u metu. Da li je to slučajna varijabla koja ima binomnu distribuciju? Nađite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X , očekivanje i varijancu.

Rješenje:

To je Bernoullijeva shena događaja s $m = 3$ nezavisna pokusa (ili ponavljamo isti pokus 3 puta nezavisno). Promatramo dokađ aj $A =$ pogodak u metu. $P(A) = \frac{1}{2} = p$ u svakom nezavisnom ponavljanju. Slučajna varijabla $X =$ broj pojavljivanja događaja A (broj uspjeha) ima binomnu distribuciju $X \sim B(m, p) = B(3, \frac{1}{2})$.

Funkcija vjerojatnosti je

$$f(x) : = \begin{cases} P(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-k}, & x = k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3, & x = k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija distribucije je:

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k:k \leq x} \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-k}, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k:k \leq x} \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

$$E(X) = mp = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Var}(X) = mp(1 - p) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

(Do ovih rezultata došli smo i kad smo razmatrali taj primjer slučajne varijable u prethodnom poglavlju.)

PRIMJER 6.5 *Bacamo kocku 4 puta. Neka je slučajna varijabla $X =$ broj šestica. Da li je to slučajna varijabla koja ima binomnu distribuciju? Nađite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X , očekivanje i varijancu. Izračunajte vjerojatnost da su pale bar svije šestice?*

Rješenje:

To je Bernoullijeva shena događaja s $m = 4$ nezavisna pokusa (ili ponavljamo isti pokus 4 puta nezavisno). Promatramo događaj $A =$ pala je 6. $P(A) = \frac{1}{6} = p$ u svakom nezavisnom ponavljanju. Slučajna varijabla $X =$ broj šestica je broj pojavljivanja A (broj uspjeha) i ona ima binomnu distribuciju $X \sim B(m, p) = B(4, \frac{1}{6})$.

Funkcija vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} \binom{4}{k} (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{4-k}, & x = k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija distribucije je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k:k \leq x} \binom{4}{k} (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{4-k}, & 0 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x. \end{cases}$$

$$E(X) = mp = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

$$\text{Var}(X) = mp(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{36}.$$

Trebamo odrediti $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - F(2-) = 1 - \sum_{i:x_i < 2} f(x_i) \\ &= 1 - (f(0) + f(1)) = 1 - \left(\binom{4}{0} (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^4 + \binom{4}{1} (\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^{4-1} \right) = \frac{171}{1296} \end{aligned}$$

PRIMJER 6.6 Označimo vrijednost funkcije vjerojatnosti f binomne distribucije s parametrim m i p s $f(m, p; k), k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Tada vrijedi rekurzivna relacija

$$f(m, p; k+1) = \frac{m-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} f(m, p; k)$$

Dokaz: Računamo

$$\frac{f(m, p; k+1)}{f(m, p; k)} = \frac{n! \cdot p^{k+1} (1-p)^{m-k-1}}{(k+1)!(m-k-1)!} : \frac{n! \cdot p^k (1-p)^{m-k}}{k!(m-k)!} = \frac{m-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

NAPOMENA 6.2 *Prisjetimo se primjera za uzorak s vraćanjem.*

Slučajni pokus: izbor od r elemenata (s vraćanjem) iz skupa koji ima n elemenata $n = n_T + n_D, r = r_T + r_D$.

Ω = svi uzorci veličine r iz n -čl. skupa važan poredak

$$|\Omega| = \overline{V}_n^{(r)} = n^r;$$

Događaj A = "uzorak ima r_T ispravnih i r_D neispravnih";

$|A|$ = Broj svih uzoraka veličine r iz n -čl. skupa s vraćanjem koji imaju r_T ispravnih i r_D neispravnih:

Koristimo formulu za uzorak s vraćanjem

$$|A| = \binom{r}{r_T} \cdot (n_T)^{r_T} \cdot (n - n_T)^{(r-r_T)}.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{r}{r_T} \cdot (n_T)^{r_T} \cdot (n - n_T)^{(r-r_T)}}{n^r} = \binom{r}{r_T} \cdot \left(\frac{n_T}{n}\right)^{r_T} \cdot \left(1 - \left(\frac{n_T}{n}\right)\right)^{(r-r_T)}.$$

Promatramo slučajnu varijablu

X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elemenata od toga n_T ispravnih

Ako s $p = \frac{n_T}{n}$ označimo postotak točnih (ispravnih) proizvaoda ukupno, onda slučajna varijabla

X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima postotak p ispravnih elemenata ima binomnu distribuciju s parametrima r i p ,

$X \sim B(r, p)$. (Analogno za neispravne elemente)

PRIMJER 6.7 *U velikoj kutiji nalazi se $p = 10\%$ neispravnih proizvoda. Ako uzmemo uzorak od $r = 5$ proizvoda iz kutije (s vraćanjem), slučajna varijabla X = broj neispravnih proizvoda u uzorku ima binomnu distribuciju $X \sim B(r, p)$. Izračunajte vjerojatnost*

- (a) *da se ne pojavi niti jedan neispravni proizvod,*
- (b) *da se pojavi jedan neispravni proizvod u uzorku,*
- (c) *da se pojavi bar jedan neispravni proizvod u uzorku.*

Rješenje:

(a) $P(X = 0) = f(0) = f(5, 1/10; 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^5 = 0.59049.$

(b) Možemo računati direktno

$$P(X = 1) = f(1) = f(5, 1/10; 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right)^4 = \frac{5}{10} \cdot 0.6561 = 0.32805.$$

Drugi način je da koristimo rekurzivnu formulu:

$$f(r, p; k + 1) = \frac{r - k}{k + 1} \cdot \frac{p}{1 - p} f(r, p; k)$$

$$P(X = 1) = f(r, p; 1) = \frac{r-0}{0+1} \cdot \frac{p}{1-p} f(r, p; 0) = r \frac{p}{1-p} f(r, p; 0).$$

Za $r = 5$ i $p = \frac{1}{10}$

$$P(X = 1) = f(5, 1/10; 1) = 5 \frac{1}{9} f(5, 1/10; 0) = \frac{5}{9} 0.59049 = 0.32805.$$

$$(c) P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - (1-p)^m = 1 - \left(1 - \frac{10}{100}\right)^5 = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^5 = 1 - 0.59049 = 0.4095.$$

NAPOMENA 6.3 *Ako $m \rightarrow \infty$ binomna distribucija teži normalnoj distribuciji (vidi kasnije-Moivre Laplace teorem).*

NAPOMENA 6.4 *Ako je $p \rightarrow 0$ i $m \rightarrow \infty$ binomna distribucija teži Poissonovoj (vidi Poissonova distribucija).*

6.2 POISSONOVA DISTRIBUCIJA

Definicija 6.4 (POISSONOVA DISTRIBUCIJA)

Za diskretnu slučajnu varijablu X koja ima sliku $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$ i funkciju vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x \in \mathcal{R}(X)$$

kažemo da ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ i označavamo

$$X \sim Po(\lambda)$$

PRIMJER 6.8 Funkcija $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$ je funkcija vjerojatnosti.

Prisjetimo se razvoja eksponencijalne funkcije u McLaurinov red

$$e^x = \sum_{0 \leq k < \infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Računamo

$$\sum_{0 \leq k < \infty} f(k) = \sum_{0 \leq k < \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1.$$

PRIMJER 6.9 Očekivanje diskretne slučajne varijable koja ima Poissonovu distribuciju $X \sim Po(\lambda)$ je

$$E(X) = \lambda.$$

Rješenje:

$$E(X) = \sum_{0 \leq k < \infty} k \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

PRIMJER 6.10 Varijanca diskretne slučajne varijable koja ima Poissonovu distribuciju $X \sim Po(\lambda)$ je

$$Var(X) = \lambda.$$

Rješenje: (Pokušajte sami).

PRIMJER 6.11 Ako u Benoullijevoj shemi broj m nezavisnih pokusa teži ∞ (jako velik) a vjerojatnost događaja A kojeg promatramo u svakom pokusu teži 0 (jako mala) onda slučajna varijabla $X =$ broj pojavljivanja događaja A ima binomnu distribuciju koju možemo dobro aproksimirati s Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda = mp$, tj. $X \sim Po(mp)$.

Dokaz: Neka je $X \sim B(m, p)$, s parametrima $m \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $m \cdot p \rightarrow \lambda$. Računamo graničnu vrijednost funkcije vjerojatnosti binomne distribucije:

$$\begin{aligned} \lim f(k) &= \lim_{m \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, m \cdot p \rightarrow \lambda} \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k} \\ &= \lim_{p \rightarrow \frac{\lambda}{m}} \binom{m}{k} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} \\ &= \frac{(\lambda)^k}{k!} \lim_{m \rightarrow \infty} (m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)) \frac{1}{m^k} \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} \\ &= \frac{(\lambda)^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Dobili smo funkciju vjerojatnosti Poissonove distribucije za $\lambda = mp$.

PRIMJER 6.12 U velikoj kutiji nalazi se $p = 1\%$ neispravnih proizvoda. Ako uzmemo uzorak od $r = 100$ proizvoda iz kutije, slučajna varijabla $X =$ broj neispravnih proizvoda u uzorku ima binomnu distribuciju $X \sim B(r, p)$. Budući je r veliki u odnosu na mali p i $r \cdot p = 1$ slučajnu varijablu X možemo aproksimirati Poissonovom distribucijom $X \sim Po(rp)$. Izračunajte vjerojatnost da se pojavi bar jedan neispravn proizvod u uzorku.

Rješenje:

Računamo po Poissonovoj distribuciji:

$$X \sim Po(\lambda), \lambda = r \cdot p = 1,$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = 0.6321$$

Ako bi računali po binomnoj distribuciji:

$$X \sim B(r, p), r = 100, p = 1/10,$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \binom{100}{0} (99/100)^{100} = 1 - 0.3660 = 0.63396$$

Usporedimo li rezultate dobivene vidimo da greška nije velika.

PRIMJER 6.13 Promatramo broj automobila koji prođu kroz kontrolnu točku u intervalima od 1 minute. Neka je p konstantna vjerojatnost da će auto proći u svakom kratkom intervalu unutar 1 minute (i pretpostavimo nezavisnost o drugim događajima u tom kratkom vremenu). Slučajna varijabla $X =$ broj automobila koji prođu kroz kontrolnu točku ima Poissonovu

distribuciju s parametrom $\lambda = 60 \cdot p/60 = p =$ prosječan broj automobila koji prođ u kontrolnu točku u 1 minuti, $X \sim Po(\lambda)$.

PRIMJER 6.14 Kroz naplatnu kućicu prođe prosječno u minuti 2 auta. Kolika je vjerojatnost da će u toku bilo koje minute proći

- (a) jedan automobil,
- (b) bar 3 automobil?

Rješenje: Broj automobila koji prođu naplatnu kućicu u jednoj minuti ima Poissonovu distribuciju $X \sim Po(\lambda), \lambda = 2$

$$(a) P(X = 1) = f(1) = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} = 2 \cdot e^{-2} = 0.27067$$

$$(b) P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (f(0) + f(1) + f(2)) \\ = 1 - (e^{-2}(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!})) \\ = 1 - (0.6766) \\ = 0.3232.$$

NAPOMENA 6.5 Poissonova distribucija primjenjuje se u demografiji, biologiji, fizici, prometu i dr.

6.3 HIPERGEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

NAPOMENA 6.6 *Prisjetimo se primjera za uzorak bez vraćanja. Slučajni pokus: izbor od r elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n elemenata $n = n_T + n_D, r = r_T + r_D$.*

$\Omega = \{\text{svi uzorci veličine } r \text{ iz } n\text{-čl. skupa}\}$

$$|\Omega| = \binom{n}{r};$$

Događaj $A = \text{"uzorak ima } r_T \text{ ispravnih i } r_D \text{ neispravnih"};$

$|A| = \text{Broj svih uzoraka veličine } r \text{ iz } n\text{-čl. skupa bez vraćanja koji imaju } r_T \text{ ispravnih i } r_D \text{ neispravnih:}$

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja .

$$|A| = C_{n_T}^{(r_T)} \cdot C_{n_D}^{(r_D)} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n_D}{r_D} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}}{\binom{n}{r}}.$$

Promatramo slučajnu varijablu

$X = \text{broj ispravnih predmeta u } r \text{ članom uzorku iz skupa koji ima } n \text{ elemenata od toga } n_T \text{ ispravnih.}$

Definicija 6.5 (HIPERGEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA)

Slučajne varijable X koje imaju sliku $\mathcal{R}(X) = 0, 1, 2, \dots, n_T$ i funkciju vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{\binom{n_T}{x} \cdot \binom{n-n_T}{r-x}}{\binom{n}{r}}, x \in \mathcal{R}(X)$$

gdje su $n_T \leq n, r \leq n, n, n_T, r \in \mathbb{N}$

kažemo da imaju Hipergeometrijsku distribuciju s parametrima n, r, n_T i označavamo $X \sim \text{Hip}(n, r, n_T)$.

PRIMJER 6.15 *Funkcija $f(x) = \frac{\binom{n_T}{x} \cdot \binom{n-n_T}{r-x}}{\binom{n}{r}}, x \in \mathcal{R}(X)$ je funkcija vjerojatnosti.*

Rješenje: Koristimo kombinatorni identitet

$$\sum_{0 \leq x \leq n_T} \binom{n_T}{x} \cdot \binom{n-n_T}{r-x} = \binom{n}{r}$$

PRIMJER 6.16 *Za slučajnu varijablu $X \sim \text{Hip}(n, r, n_T)$ očekivanje je*

$$E(X) = r \cdot \frac{n_T}{n}.$$

PRIMJER 6.17 Slučajni pokus: izbor od $r = 3$ elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima $n = 10$ elemenata od kojih je $n_T = 7$.

Promatramo slučajnu varijablu

$X =$ broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elemenata od toga n_T ispravnih (bez vraćanja).

(a) Izračunajte vjerojatnost da su u uzorku oba ispravna elementa (točna)?

(b) Izračunajte vjerojatnost da su oba ispravna ako je uzorak s vraćanjem?

Rješenje: (a) Uzorak bez vraćanja pa $X =$ broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elementata od toga n_T ispravnih (bez vraćanja) ima hipergeometrijsku distribuciju $X \sim Hip(n, r, n_T)$. Za $n = 10$, $r = 3$, $n_T = 7$,

$$X \sim Hip(10, 3, 7)$$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{\binom{n_T}{2} \cdot \binom{n-n_T}{r-2}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{10-7}{3-2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{7}{2} \cdot 3}{\binom{10}{3}} = 0.525.$$

(b) Uzorak s vraćanja pa $X =$ broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elementata od toga n_T ispravnih (s vraćanjem) ima binomnu distribuciju $X \sim B(r, p = \frac{n_T}{n})$. Za $n = 10$, $r = 3$, $n_T = 7$

$$X \sim B(3, \frac{7}{10})$$

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{r}{2} p^2 (1-p)^{r-2} = \binom{3}{2} (\frac{7}{10})^2 \cdot (1 - \frac{7}{10})^{3-2} = 0.441$$

NAPOMENA 6.7 Ako je $n, n_T, n - n_T$ veliki u odnosu na r onada nije važno je li uzorak s vraćanjem ili bez vraćanja i onda $Hip(n, r, n_T)$ distribucija teži $B(r, p = \frac{n_T}{n})$.

Ako je uzorak iz nepoznato velike populacije možemo opet koristiti binomnu distribuciju bez obzira na vraćanje.

6.4 GEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

Definicija 6.6 (Geometrijska slučajna varijabla)

Slučajnu varijablu $X =$ broj ponavljanja pokusa (nezavisni) dok se ne desi događaja A čija je vjerojatnost $p \in (0, 1)$, zovemo geometrijska slučajna varijabla.

Slika geometrijske slučajne varijable je $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, \dots\}$.

Funkcija vjerojatnosti Binomne slučajne varijable je

$$f(x) := \begin{cases} P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, & x = k \in \mathcal{R}(X) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 6.7 (GEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA)

Za sve slučajne varijable koje imaju sliku $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, \dots\}$ i funkciju vjerojatnosti

$$f(x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p, \quad x \in \mathcal{R}(X)$$

kažemo da imaju GEOMETRIJSKU DISTRIBUCIJU (RAZDIOBU) s parametrom p i označavamo

$$X \sim G(p).$$

PRIMJER 6.18 Funkcija $f(x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p$ je funkcija vjerojatnosti.

Prisjetimo se sume geometrijskog reda i iskoristimo za računanje

$$\sum_{1 \leq k \leq \infty} f(x) = \sum_{1 \leq k \leq \infty} (1 - p)^{k-1} \cdot p = p \sum_{1 \leq k \leq \infty} (q)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

PRIMJER 6.19 Očekivanje diskretne slučajne varijable koja ima geometrijsku distribuciju $X \sim G(p)$ je

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Rješenje:

Prisjetimo se da konvergentan red (npr. geometrijski) možemo derivirati član po član, pa vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{1 \leq k \leq \infty} k \cdot f(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \cdot p \\ &= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= p \cdot \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

PRIMJER 6.20 Varijanca diskretne slučajne varijable koja ima geometrijsku distribuciju $X \sim G(p)$ je

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Rješenje:
(pokušajte sami)

PRIMJER 6.21 *Student izlazi na ispit dok ga ne položi. Ako je vjerojatnost polaganja ispita svaki put jednaka $p = 1/5$ kolika je vjerojatnost da će student 4 puta izlaziti na ispit dok ga ne položi?*

Rješenje:
 $X \sim G(p), p = 0.2,$
 $P(X = 4) = f(4) = (1 - p)^{4-1} \cdot p = (1 - p)^3 \cdot p = \frac{64}{625} = 0.102.$