

8 PRIMJERI KONTINUIRANIH SLUČAJNIH VARIJABLI

8.1 NORMALNA DISTRIBUCIJA

Najvažnija kontinuirana distribucija je normalna distribucija. Ona se pojavljuje kao aproksimacija mnogih drugih distribucija i pojavljuje se u mnogim statističkim testovima.

Definicija 8.1 (NORMALNA DISTRIBUCIJA)

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da ima standardnu normalnu distribuciju ili standardnu Gaussovu distribuciju s parametrima 0 i 1 i označavamo

$X^* \sim N(0, 1)$ ako ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da ima normalnu distribuciju ili Gaussovu distribuciju s parametrima μ i σ i označavamo

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ako ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

NAPOMENA 8.1 Ako $X^* \sim N(0, 1)$ ima standardnu normalnu distribuciju, onda funkcija slučajne varijable $X = \sigma \cdot X^* + \mu$ ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

PRIMJER 8.1 Funkcija $f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ je funkcija gustoće vjerojatnosti.

Rješenje: Koristimo izvod

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

¹VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

PRIMJER 8.2 Funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable $X^* \sim N(0, 1)$ je

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

$$F^*(x) = 1 - F^*(-x)$$

Funkcija distribucije normalne slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

Rješenje: Koristimo definiciju funkciju distribucije kontinuirane slučajne varijable $F^*(x) = \int_{-\infty}^x f^*(t) dt$ i formulu za funkciju distribucije za funkciju slučajne varijable $X = \sigma \cdot X^* + \mu$.

$$F(y) = F^*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

PRIMJER 8.3 (a) Za $X^* \sim N(0, 1)$, $E(X^*) = 0$, $Var(X) = 1$.

(b) Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $E(X^*) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$.

Rješenje: Koristimo izvod

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

(a) $E(X^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x f^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$ (neparna funkcija).

$$Var(X^*) = E((X^*)^2) - (E(X^*))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

(b) $E(X) = E(\sigma \cdot X^* + \mu) = \sigma \cdot E(X^*) + \mu = \mu$.

$$Var(X) = Var(\sigma \cdot X^* + \mu) = \sigma^2 Var(X^*) = \sigma^2$$

PRIMJER 8.4 Skicirajte graf funkcije fustoće vjerojatnosti $f(x)$. Krivulja se zove Gaussova zvonolika krivulja. Krivulja je simetrična u odnosu na pravac $x = \mu$, dostiže maksimum u točki $(\mu, \sigma\sqrt{2\pi})$, a točke infleksije su u $\mu - \sigma$ i $\mu + \sigma$. Os x je horizontalna asimptota.

Ako $\sigma < 1$ graf se sužava i maksimalna vrijednost raste, a ako je $\sigma > 1$ graf se širi i maksimalna vrijednost pada.

PRIMJER 8.5 Neka je $X^* \sim N(0, 1)$. Tada možemo izračunati vjerojatnost da slučajna varijabla X^* poprimi vrijednost iz nekog intervala $[a, b]$:

$$P(\alpha \leq X^* \leq \beta) = F^*(\beta) - F^*(\alpha).$$

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tada možemo izračunati vjerojatnost da slučajna varijabla $X = \sigma \cdot X^* + \mu$ poprimi vrijednost iz nekog intervala $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = F^*\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

NAPOMENA 8.2 U literaturi je poznata Laplaceova funkcija

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Ona je obično tabelirana.

Veza funkcija F^* , F i $L(x)$ je sljedeća:

$$F^*(x) = \frac{1}{2} + L(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + L\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

PRIMJER 8.6 Slučajna varijabla $X \sim N(20, 4)$. Provjerite

(a) $P(18 \leq X \leq 22) = 0.68$

(b) $P(16 \leq X \leq 24) = 0.95$

(c) $P(14 \leq X \leq 26) = 0.99$

Rješenje:

(a) $P(18 \leq X \leq 22) = F^*\left(\frac{22-20}{2}\right) - F^*\left(\frac{18-20}{2}\right) = F^*(1) - F^*(-1) = F^*(1) - (1 - F^*(1)) = 2F^*(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = 0.68$

PRIMJER 8.7 Slučajna varijabla $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Provjerite

(a) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68$

(b) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$

(c) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.99$

8.2 UNIFORMNA DISTRIBUCIJA

Definicija 8.2 (UNIFORMNA DISTRIBUCIJA)

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da ima uniformnu distribuciju na se segmentu $[a, b]$, ako je slika $R(X) = R, a$ funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

i označavamo $X \sim U(a, b)$

PRIMJER 8.8 Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable $X \sim U(a, b)$ je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

PRIMJER 8.9 Za $X \sim U(a, b)$, $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Rješenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{a+b}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

PRIMJER 8.10 Skiciraj graf funkcije gustoće vjerojatnosti i graf funkcije distribucije vjerojatnosti.

Funkcija $f(x)$ ima prekid u točkama a i b , a funkcija $F(x)$ je neprekinuta na \mathbb{R} .

8.3 EKSPONENCIJALNA DISTRIBUCIJA

Eksponencijalna distribucija se pojavljuje u problemima teorije opsluživanja.

Definicija 8.3 (EKSPONENCIJALNA DISTRIBUCIJA)

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da ima eksponencijalnu s parametrom λ , ako je slika $R(X) = R, a$ funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

i označavamo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

PRIMJER 8.11 Funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

PRIMJER 8.12 Za $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Rješenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \text{parc.int.} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \text{par.int.} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

PRIMJER 8.13 Skiciraj graf funkcije gustoće i funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Funkcija $f(x)$ je padajuća funkcija na $[0, \infty)$, prekinuta u nuli. Funkcija distribucije je neprekinuta funkcija R , rastuća, konkavna, ima horizontalnu asimptotu $y = 1$.

PRIMJER 8.14 Vrijeme trajanja sijalica je slučajna varijabla koja ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ . Uzimamo uzorak i 5% sijalica traje do 100 sati.

(a) Odredite parametar λ .

(b) Kolika je vjerojatnost da će nova sijalica trajati duže od 200 sati?

Rješenje:

(a) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$,

$$P(X < 100) = 0.05 \Rightarrow F(100) = 0.05$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x, \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot 100} = 0.05$$

$$e^{-\lambda \cdot 100} = 0.95$$

$$\lambda \cdot 100 \approx 0.051$$

$$\lambda \approx 0.00051.$$

(b) $P(X > 200) = 1 - P(X < 200)$

$$= e^{-\lambda \cdot 200}$$

$$\approx (e^{-\lambda \cdot 100})^2$$

$$= (0.95)^2$$

$$= 0.9025.$$

8.4 GAMA DISTRIBUCIJA

Definicija 8.4 (GAMA DISTRIBUCIJA)

Gama distribucija je generalizacija eksponencijalne distribucije.

Neka je slučajni pokus ponavljanje događaja u vremenu s zadanim konstantnim intezitetom (λ). Slučajna varijabla koja daje vrijeme potrebno da se događaj dogodi određeni broj puta (α) ima gama distribuciju s parametrima α i λ .

Definicija 8.5 (GAMA DISTRIBUCIJA)

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da ima gama distribuciju s parametrima α i λ , (α i $\lambda > 0$), ako je slika $\mathcal{R}(X) = \mathbb{R}$, a funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

gdje je $C = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$,

$$\text{a } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt, \text{ Gama funkcija, } x > 0$$

i označavamo $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

PRIMJER 8.15 Funkcija distribucije gama distribucije $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C \cdot \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t} dt, & x \geq 0. \end{cases}$$

PRIMJER 8.16 SVOJSTVA gama funkcije:

(a) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$,

(b) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$,

(c) $\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1) \cdot \Gamma(n - 2) = \dots = n!, n \in \mathbb{N}$,

PRIMJER 8.17 Za $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

PRIMJER 8.18 Za $\alpha > 1$ funkcije gustoće gama distribucije ima maksimum u $x = \frac{\alpha-1}{\lambda}$, ima zvonoliki oblik i os x je horizontalna asimptota, a za $\alpha < 1$, $f(x)$ je strogo padajuća, konkavna funkcija koja ima vertikalnu asimptotu os y , a horizontalnu os x .

Definicija 8.6 (NEPOTPUNA GAMA FUNKCIJA)

Tabilirana je nepotpuna gama funkcija $\gamma(z, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$.

Veza je $F(x; \alpha, \lambda) = \gamma(\lambda x, \alpha)$.

PRIMJER 8.19 *Potrošnja materijala u nekom proizvodnom procesu je slučajan pokus. U prosjeku svaki dan se potroši 20 komada. Svaki mjesec se nabavlja 640 komada potrošnog materijala. Neka je X slučajna varijabla = vrijeme potrebno da se potroši zaliha (dogodi događaj α puta).*

(a) *Kolika je vjerojatnost da ponestane potrošnog materijal?*

(b) *Kolika mora biti mjesečna nabavka da vjerojatnost nestašice bude 0.01*

$$\lambda = 20, \alpha = 640.$$

$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) = \Gamma(640, 20).$$

Rješenje:

(a) $P(X < 30) = F(30) = F(30; 640, 20)$

$$F(x; \alpha, \lambda) = \gamma(\lambda x, \alpha)$$

$$F(30; 640, 20) = \gamma(20 \cdot 30, 640) = \gamma(600, 640) = 0.057.$$

Vjerojatnost da bude nestašica je 0.057.

(b) $P(X < 30) = 0.01$

$$F(30; \alpha, 20) = 0.01$$

$$F(30; \alpha, 20) = \gamma(20 \cdot 30, \alpha) = \gamma(600, \alpha) = 0.01$$

$$\alpha = 660.$$

Potrebne su mjesečne zalihe potrošnog materijala 660 komada da bi vjerojatnost nestašice bila 0.01 (mala).

PRIMJER 8.20 *Za $\alpha = 1$, gama distribucija je eksponencijalna distribucija*

$$X \sim \Gamma(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda).$$

8.5 HI KVADRAT DISTRIBUCIJA

Definicija 8.7 *(HI KVADRAT DISTRIBUCIJA)*

Za $\alpha = \frac{n}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ gama distribucija je $\chi^2(n)$, hi kvadrat distribucija s parametrom n .

$$X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n).$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{gdje je } C = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

PRIMJER 8.21 Tabelira se $\chi^2(n)$, za $n = 1, 2, \dots, 30$. ali u obliku:

Za $X \sim \chi^2(n)$ i zadanu vjerojatnost $p = P(X > x_p)$

u tabeli možemo očitati vrijednosti x_p .

Najčešće su tražene vrijednosti za x_p , ako je zadana vjerojatnost

$p = 0.99, p = 0.95, p = 0.5, p = 0.1, p = 0.05$

PRIMJER 8.22 Neka je $X \sim \chi^2(20)$ i $P(X > x_p) = 0.1$. Od koje vrijednosti slučajna varijabla poprimi veću vrijednost s vjerojatnošću 0.05?

U tablici očitamo za $n = 20$, i $p = 0.1$, $x_p = 28.41$.

PRIMJER 8.23 Neka su slučajne varijable X_1, X_2, \dots, X_n takve da sve imaju standardnu normalnu distribuciju, $X_i \sim N^*(0, 1), i = 1, \dots, n$.

Tada slučajna varijabla

$Y = \sum_{i=1}^n (X_i)^2$ ima hi kvadrat distribuciju,

$Y \sim \chi^2(n)$.

Dokaz: (vidi u literaturi)

PRIMJER 8.24 Za $X \sim \chi^2(n)$, $E(X) = n$, $Var(X) = 2n$.

Rješenje:

Koristimo formulu za očekivanje i varijancu gama distribucije s parametrima

$\alpha = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{\frac{n}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2n.$$

PRIMJER 8.25 Za $X \sim \chi^2(n)$ i $n \rightarrow \infty$, $X \sim N(n, 2n)$.

Za $X \sim \chi^2(n)$ i $n > 30$, dobra aproksimacija je $X \sim N(n, 2n)$.

Rješenje: (vidi literaturu)

8.6 STUDENTOVA DISTRIBUCIJA

U matematičkoj statistici važna je Studentova distribucija koju je 1908 definirao S. Gosset pod pseudonimom Student.

Definicija 8.8 (STUDENTOVA DISTRIBUCIJA)

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da ima Studentovu distribuciju ili t -distribuciju s parametrom n (stupanj slobode) i označavamo

$X \sim t(n)$ ako ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

PRIMJER 8.26 *Skicirati graf funkcije gustoće vjerojatnosti $f(x)$. Funkcija je pozitivna, simetrična u odnosu na os y , parna, dostiže maksimum u $x = 0$, os x je horizontalna asimptota. Kad $n \rightarrow \infty$, graf postaje Gaussova krivulja.*

PRIMJER 8.27 *Tabelira se $t(n)$, za $n = 1, 2, \dots, 30$. ali u obliku:*

Za $X \sim t(n)$ i zadanu vjerojatnost $p = P(|X| > x_p)$

u tabeli možemo očitati vrijednosti x_p .

Najčešće su tražene vrijednosti za x_p , ako je zadana vjerojatnost

$p = 0.9, p = 0.8, p = 0.7, \dots, p = 0.1$.

PRIMJER 8.28 *Neka je $X \sim t(20)$ i $P(|X| > x_p) = 0.1$. Izvan kojih granica slučajna varijabla poprimi vrijednost s vjerojatnošću 0.1?*

U tablici očitamo za $n = 20$, i $p = 0.1$ $x_p = 1.725$.

PRIMJER 8.29 *Neka su slučajne varijable $X^* \sim N(0, 1)$ i $Y \sim \chi^2(n)$.*

Tada slučajna varijabla

$T = \frac{X^}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ ima Studentovu distribuciju,*

$T \sim t(n)$.

PRIMJER 8.30 *Za $X \sim t(n)$, $E(X) = 0$, $Var(X) = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$.*

Rješenje: (vidi literaturu)

PRIMJER 8.31 *Za $X \sim t(n)$ i $n \rightarrow \infty$, $X \sim N(0, 1)$.*

Za $X \sim t(n)$ i $n > 30$, dobra aproksimacija je $X \sim N(0, 1)$.

Rješenje: (vidi literaturu)

PRIMJER 8.32 *Za $n = 1$, Studentova distribucija je Cauchyjeva distribucija*

Rješenje: (vidi literaturu)