

## 9 DVODIMENZIONALNI SLUČAJNI VEKTOR

**Definicija 9.1** (DVODIMENZIONALNI SLUČAJNI VEKTOR)  
-(random vector)

Neka su su  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Funkciju  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  zovemo dvodimenzionalna slučajna varijabla (slučajni vektor) ako vrijedi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} \subset \mathcal{F}$$

i označavamo  $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)), \omega \in \Omega$ .

**Definicija 9.2** (n-dim SLUČAJNI VEKTOR)-(random vector)

Neka su su  $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ...,  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Funkciju  $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  zovemo n-dim na slučajni vektor ako vrijedi

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\} \subset \mathcal{F}$$

i označavamo  $(X_1, X_2, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)), \omega \in \Omega$ .

**Definicija 9.3** (FUNKCIJA DISTRIBUCIJE DISKRETNOG n-dim SLUČAJNOG VEKTORA)-(distribution function of random vector)

Neka je  $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  n-dim diskretni slučajni vektor. Funkciju  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu na sljedeći način:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) := P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \sum_{u_1 \leq x_1} \dots \sum_{u_n \leq x_n} f(u_1, \dots, u_n)$$

zovemo funkcija distribucije diskretnog n-dim slučajnog vektora  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

### 9.1 DISKRETNi DVODIMENZIONALNI SLUČAJNI VEKTOR

**Definicija 9.4** DISKRETNi n-dim SLUČAJNI VEKTOR

---

<sup>1</sup>VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

Ako su slučajne varijable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  diskretne slučajne varijable, onda za slučajni vektor  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  kažemo da je diskretni  $n$ -dim slučajni vektor.

**Definicija 9.5** (FUNKCIJA VJEROJATNOSTI  $n$ -dim SLUČAJNOG VEKTORA)-  
(probability function of random vector)

Neka je  $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$   $n$ -dim diskretni slučajni vektor. Funkciju  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu na sljedeći način:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{cases} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n), & (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}(X_1, X_2, \dots, X_n), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

zovemo funkcija vjerojatnosti diskretnog  $n$ -dim slučajnog vektora  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

**Definicija 9.6** DISKRETNI 2-dim SLUČAJNI VEKTOR

Ako su slučajne varijable  $X$  i  $Y$  diskretne slučajne varijable, onda za slučajni vektor  $(X, Y)$  kažemo da je diskretni dvodimenzionalni slučajni vektor

**Definicija 9.7** (FUNKCIJA VJEROJATNOSTI 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)-  
(probability function of random vector)

Neka su  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diskretne slučajne varijable sa slikama  $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $\mathcal{R}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$  Funkciju  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu na sljedeći način:

$$f(x, y) := \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & x = x_i \in \mathcal{R}(X), y = y_j \in \mathcal{R}(Y), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

zovemo funkcija vjerojatnosti diskretnog 2-dim slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

SVOJSTVA funkcije vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ .

(i)  $0 \leq f(x_i, y_j) \leq 1$ ,

(ii)  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1$ .

**Dokaz:**

(i) Za  $(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$ ,  $P(X = x_i, Y = y_j) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}) \Rightarrow$

$0 \leq f(x_i, y_j) \leq 1$ .

(ii) Za  $(x_i, y_j) \neq (x_k, y_l) \Rightarrow \{\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\} \cap \{\omega : X(\omega) = x_k, Y(\omega) = y_l\} = \emptyset$ , svojstvo (ii) slijedi prema svojstvu (P3), prebrojive aditivnosti funkcije

P:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = P(\Omega) = 1.$$

**NAPOMENA 9.1** Diskretani 2-dim slučajni vektor je zadana sa svojim slikom  $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, \dots; j = 1, \dots\}$  i funkcijom vjerojatnosti slučajne varijable  $f$ , vrijednostima  $\{f(x_i, y_j), i = 1, \dots; j = 1, \dots\}$ .

U literaturi se zato može naći zapis slučajnog vektora  $(X, Y)$  kao uređene sheme:

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & & p_{1j} & \dots \\ x_2 & p_{21} & & & p_{2j} & \\ \dots & & & & & \\ x_i & p_{i1} & & & p_{ij} & \\ \dots & & & & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

gdje su  $p_{ij} = f(x_i, y_j), i, j \in \{1, 2, \dots\}$ .

**PRIMJER 9.1** Neka je  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  diskretni vjerojatnosni prostor slučajnog pokusa bacanje igraće kocke.  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_6\}$ ,  $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, \dots, 6$ .

Neka je  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla definirana na sljedeći način:

$X =$  broj koji je pao.

Neka je  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla definirana na sljedeći način:

$Y = 1$  ako je paran broj pao veći od 3, inače 0.

$X$  je slučajna varijabla. Slika slučajne varijable je skup  $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

$Y$  je slučajna varijabla. Slika slučajne varijable je skup  $\mathcal{R}(Y) = \{0, 1\}$ .

Naći funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

**Rješenje:** Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable  $X$  je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & x = x_i \in \mathcal{R}(X), y = y_j \in \mathcal{R}(Y) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = x_i \in \{4, 6\}, y = y_j \in \{1\} \\ \frac{1}{6}, & x = x_i \in \{1, 2, 3, 5\}, y = y_j \in \{0\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Slučajni vektor  $(X, Y)$  možemo za zadati s

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 2 & \frac{1}{6} & 0 \\ 3 & \frac{1}{6} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

**PRIMJER 9.2** Neka je  $(X; Y)$  slučajni vektor za slučajni pokus izbora dva broja iz  $\{1, 2, 3\}$ , pri čemu je  $X =$  prvi izabrani broj,  $Y =$  izabrani broj nije manji od prvog. Naći funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora.

**Rješenje:**

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**Definicija 9.8** (FUNKCIJA DISTRIBUCIJE DISKRETNOG 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)-(distribution function of random vector)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom  $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, \dots; j = 1, \dots\}$ . Funkciju  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiraju na sljedeći način:

$$F(x, y) := P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i: x_i \leq x} \sum_{j: y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

zovemo funkcija distribucije diskretnog 2-dim slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

SVOJSTVA FUNKCIJE DISTRIBUCIJE diskretnog 2-dim slučajnog vektora:

$$(F1) \lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(-\infty, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty) = 0$$

$$(F2) \lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, \infty) = 1$$

$$(F3) 0 \leq F(x, y) \leq 1$$

$$(F4)$$

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2),$$

$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}, a_1 < b_1, a_2 < b_2.$

(F6) F je rastuća funkcija po svakoj varijabli.

**Dokaz:**

(F1) Kako je događaj  $X \leq -\infty, Y \leq -\infty$  nemoguć događaj

$$F(-\infty, -\infty) := P(X \leq -\infty, Y \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0.$$

$$F(-\infty, y) = P(X \leq -\infty \cap Y \leq y) = P(\emptyset \cap Y \leq y) = P(\emptyset) = 0.$$

(F2) Budući je događaj  $X \leq \infty, Y \leq \infty$  siguran događaj onda je

$$F(\infty, \infty) = P(\Omega) = 1.$$

(F3) tvrdanja slijedi iz svojstava (F1) i (F2).

(F4) Neka su  $a, b \in \mathbb{R}, a_1 < b_1, a_2 < b_2.$  Računamo

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$$

$$= P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2) - P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq a_2)$$

$$= (F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)).$$

(F6) Neka su  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}, a_1 < b_1.$

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq y) &= F(b_1, y) - F(a_1, y) - F(b_1, -\infty) + F(a_1, -\infty) \\ &= F(b_1, y) - F(a_1, y) \geq 0. \end{aligned}$$

Iz svojstva (F5) slijedi da je  $F(a_1, y) \leq F(b_1, y),$  funkcija je rastuća po prvoj varijabli.

**PRIMJER 9.3** Za slučajni vektor  $(X, Y)$  iz primjera zadan s

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 2 & \frac{1}{6} & 0 \\ 3 & \frac{1}{6} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

odredite vrijednost funkcije distribucije  $F(1, 0), F(1, 1), F(2, 0), F(2, 1), F(4, 0).$

Izračunajte vjerojatnost  $P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1)$  i  $P(1 < X \leq 4, Y \leq 0)$

**Rješenje:**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i: x_i \leq x} \sum_{j: y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

$$F(1, 0) = f(1, 0) = p_{11} = \frac{1}{6},$$

$$F(1, 1) = f(1, 0) + f(1, 1) = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned}
F(2, 0) &= f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0) = p_{11} + p_{12} + p_{21} = \frac{2}{6}, \\
F(2, 1) &= f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0) + f(2, 1) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = \frac{2}{6}, \\
F(4, 0) &= f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0) + f(2, 1) + f(3, 0) + f(3, 1) + f(4, 0) \\
&= p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} + p_{41} = \frac{3}{6}.
\end{aligned}$$

Koristimo formule

$$\begin{aligned}
P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \\
P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2) &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1) &= F(2, 1) - F(1, 1) - F(2, 0) + F(1, 0) = \\
\frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} &= 0. \\
P(1 < X \leq 4, Y \leq 0) &= F(4, 0) - F(1, 0) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.
\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1) &= P(\emptyset) = 0, \\
P(1 < X \leq 4, Y \leq 0) &= P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.
\end{aligned}$$

**PRIMJER 9.4** *Bacimo istovremeno dva novčića od 1 kune i od 5 kuna. Neka su  $X$  i  $Y$  slučajne varijable definirane:*

$X=1$  ako je pao slavuj, inače 0

$Y=1$  ako je pao medo, inače 0.

Promatramo slučajni vektor  $(X, Y)$ .

Napišite funkciju vjerojatnosti s slučajnog vektora.

Odredite  $F(1, 1)$ ,  $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$  i  $P(0 < X \leq 1, Y \leq 0)$ .

**Rješenje:**

$$\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}, \mathcal{R}(Y) = \{0, 1\}.$$

$$\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, 2; j = 1, 2\} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = x_i \in \{0, 1\}, y = y_j \in \{0, 1\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = \frac{1}{4}$$

$$F(x, y) := P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i: x_i \leq x} \sum_{j: y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

$$F(0, 0) = f(0, 0) = p_{11} = \frac{1}{4}$$

$$F(0, 1) = f(0, 0) + f(0, 1) = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F(1, 0) = f(0, 0) + f(1, 0) = p_{11} + p_{21} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F(1, 1) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0) + f(1, 1) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$$

Koristimo formule

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

$$P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)$$

$$P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) = F(1, 1) - F(0, 1) - F(1, 0) + F(0, 0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(0 < X \leq 1, Y \leq 0) = F(1, 0) - F(0, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ili

$$P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) = P(\{(s, m)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(0 < X \leq 1, Y \leq 0) = P(\{s, 5\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**PRIMJER 9.5** Promatramo slučajan pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu  $X =$  suma brojeva koji su pali i slučajnu varijablu  $Y =$  broj 1 ako su pali jednaki brojevi, inače 0. Nađite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora  $(X, Y)$ . Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 3 a manji ili jednak 6 i da su puta pali isti brojevi?

**Rješenje:**

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$P(3 < X \leq 6, Y = 1) = f(4, 1) + f(5, 1) + f(6, 1) = \frac{1}{36} + 0 + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

**Definicija 9.9** (MARGINALNA FUNKCIJA VJEROJATNOSTI komponenti 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)-(marginal distribution)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom  $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, \dots; j = 1, \dots\}$  i funkcijom vjerojatnosti  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$

$$f(x, y) := \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & (x, y) = (x_i, y_j) \in \mathcal{R}((X, Y)) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkciju  $f_1(x) = f(X = x, Y = \text{proizvoljno}) = \sum_j f(x, y_j)$ , zovemo marginalna funkcija vjerojatnosti komponente  $X$  slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

Funkciju  $f_2(y) = f(X = \text{proizvoljno}, Y = y) = \sum_i f(x_i, y)$  zovemo marginalna funkcija vjerojatnosti komponente  $Y$  slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

$$\begin{pmatrix} X/Y & y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & f_1(x) \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & \sum_j p_{1j} \\ x_2 & p_{21} & & & p_{2j} & \dots & \sum_j p_{2j} \\ \dots & \dots & & & \dots & & \dots \\ x_i & p_{i1} & & & p_{ij} & & \sum_j p_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ f_2(y) & \sum_i p_{i1} & \dots & & \sum_i p_{ij} & & \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{pmatrix}$$

**PRIMJER 9.6** U prethodnim primjerima slučajnih vektora odredite marginalne funkcije vjerojatnosti komponenti  $X$  i  $Y$  slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

Rješenje: (a) 
$$\begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 2 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 3 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 4 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 6 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ f_2(y) & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

(b) 
$$\begin{pmatrix} X/Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{6}{18} \\ 2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{6}{18} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{6}{18} \\ f_2(y) & \frac{2}{18} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) 
$$\begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ f_2(y) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 & \frac{2}{36} \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 & \frac{4}{36} \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 & \frac{6}{36} \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 & \frac{4}{36} \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 & \frac{2}{36} \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ f_2(y) & \frac{30}{36} & \frac{6}{36} & 1 \end{pmatrix}$$

**Definicija 9.10** (MARGINALNA FUNKCIJA DISTRIBUCIJE VJEROJATNOSTI komponenti 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)-(marginal distribution)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom  $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, \dots, j = 1, \dots\}$  i funkcijom distribucije vjerojatnosti  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$

$$F(x, y) := P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i: x_i \leq x} \sum_{j: y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Funkciju  $F_1(x) := F(x, \infty) = P(X \leq x, -\infty < Y \leq \infty) = \sum_{u \leq x} f_1(u)$ , zovemo marginalna funkcija distribucije vjerojatnosti komponente  $X$  slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

Funkciju  $F_2(y) := F(\infty, y) = P(-\infty < X \leq \infty, Y \leq y) = \sum_{u \leq y} f_2(u)$  zovemo marginalna funkcija distribucije vjerojatnosti komponente  $Y$  slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

**Definicija 9.11** (NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)-(independent variables)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  2-dim slučajni vektor sa funkcijom distribucije vjerojatnosti  $F(x, y)$ . Za slučajne varijable  $X$  i  $Y$  kažemo da su nezavisne ako je za svaki  $(x, y)$

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  diskretni 2-dim slučajni vektor sa funkcijom vjerojatnosti  $f(x, y)$ . Za slučajne varijable  $X$  i  $Y$  kažemo da su nezavisne ako je za svaki  $(x, y)$

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Inače su  $X$  i  $Y$  zavisne.

**PRIMJER 9.7** U primjerima provjeri jesu li slučajne varijable u slučajnim vektorima  $(X, Y)$  nezavisne.

**Rješenje:**

(a) nisu jer je npr.  $f(4, 1) \neq f_1(4) \cdot f_2(1)$ ,

$$f(4, 1) = \frac{1}{6}, f_1(4) = \frac{1}{6}, f_2(1) = \frac{2}{6};$$

(b) nisu jer je npr.  $f(1, 1) \neq f_1(1) \cdot f_2(1)$ ,

$$f(1, 1) = \frac{1}{9}, f_1(1) = \frac{6}{18}, f_2(1) = \frac{2}{18};$$

(c) jesu jer je  $f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j), i, j = 1, 2$ ;

(d) nisu jer je npr.  $f(6, 1) \neq f_1(6) \cdot f_2(1)$ ,

$$f(6, 1) = \frac{1}{36}, f_1(6) = \frac{5}{36}, f_2(1) = \frac{6}{36}.$$

**Definicija 9.12** (OČEKIVANJE 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  2-dim slučajni vektor i neka komponente  $X$  i  $Y$  su slučajne varijable koje imaju očekivnje  $E(X)$  i  $E(Y)$  onda se matematičko očekivanje slučajnog vektora definira s

$$E(X, Y) = (E(X), E(Y)).$$

**Definicija 9.13** (OČEKIVANJE funkcije DISKRETNOG 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom  $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, \dots, j = 1, \dots\}$  i funkcijom vjerojatnosti  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$

$$f(x, y) := \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & (x, y) = (x_i, y_j) \in \mathcal{R}((X, Y)) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je zadana funkcija  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Kažemo da je slučajna varijabla  $h(X, Y)$  funkcija od slučajnog vektora  $(X, Y)$  i za nju definiramo očekivanje ako red  $\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$  konvergira i označavamo

$$E(h(X, Y)) : = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j).$$

**PRIMJER 9.8**  $E(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j f(x_i, y_j)$

za  $h(x, y) = x \cdot y$ .

**PRIMJER 9.9** Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable onda je

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

jer

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_i^\infty \sum_j^\infty x_i \cdot y_j f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i^\infty \sum_j^\infty x_i \cdot y_j f_1(x_i) \cdot f_2(y_j) \\ &= \sum_i^\infty x_i f_1(x_i) \cdot \sum_j^\infty y_j f_2(y_j) = E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

**PRIMJER 9.10** Ako je  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $n$ -dim slučajni vektor i sve varijable nezavisne onda

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n)$$

**PRIMJER 9.11**  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

za  $h(x, y) = x + y$ .

**PRIMJER 9.12** Ako je  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $n$ -dim slučajni vektor onda

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

**PRIMJER 9.13** Neka je  $(X, Y)$  diskretni 2-dim slučajni vektor takav da  $Y$  ne poprima vrijednost 0. Odredi  $E(\sin \frac{X}{Y})$ .

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \sin \frac{x}{y} \\ E(\sin \frac{X}{Y}) &= \sum_i^\infty \sum_j^\infty g(x_i, y_j) f(x_i, y_j) = \sum_i^\infty \sum_j^\infty \sin \frac{x_i}{y_j} f(x_i, y_j) \end{aligned}$$

**Definicija 9.14** (KOVARIJANCA SLUČAJNOG VEKTORA)-(covariance of  $X$  and  $Y$ )

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  2-dim slučajni vektor. Kovarianca slučajnog vektora  $(X, Y)$  je

$$\mu_{XY} = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable onda je  $\mu_{XY} = 0$ .

**PRIMJER 9.14** (a)  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\mu_{XY}$

(b) Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable onda je

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

**Dokaz:**

Ako je  $h(x, y) = x + y$  onda je  $Z = X + Y$  slučajna varijabla, funkcija slučajnog vektora  $(X, Y)$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\ &= E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2X \cdot Y + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(X \cdot Y) + E(Y^2) - ((E(X))^2 + 2E(X) \cdot E(Y) + (E(Y))^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)) \end{aligned}$$

Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable onda je  $\mu_{XY} = 0$  pa tvrdnja slijedi iz (a).

**Definicija 9.15** (KOEFIKIJENT KORELACIJE)-(regression coefficient)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  2-dim slučajni vektor. Neka je  $\mu_{XY}$  kovarijanca slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ , a  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  njihove standardne devijacije. Koeficijent korelacije komponenti  $X$  i  $Y$  slučajnog vektora je definiran s

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}.$$

SVOJSTVA KOEFICIJENTA KORELACIJE  $\rho_{XY}$  :

- (i)  $\rho_{XY} = \rho_{YX}$ ,
- (ii)  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ ,
- (iii)  $\rho_{XY} = 1$  ako je  $Y = aX + b, a > 0$ ,  
 $\rho_{XY} = -1$  ako je  $Y = aX + b, a < 0$ ,
- (iv)  $\rho_{UV} = \rho_{XY}$ , ako je  $U = aX + b, V = cY + d, a, c \neq 0$ .

**Dokaz:**

(ii) Za slučajnu varijablu  $U = \sigma_2 X - \sigma_1 Y$ , odredimo varijancu:

$$\begin{aligned} \text{Var}(U) &= E(U^2) - (E(U))^2 \\ &= E(\sigma_2^2 X^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 XY + \sigma_1^2 Y^2) - (\sigma_2 E(X) - \sigma_1 E(Y))^2 \\ &= \sigma_2^2 E(X^2) - 2\sigma_1 \sigma_2 E(XY) + \sigma_1^2 E(Y^2) - (\sigma_2^2 (E(X))^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 E(X)E(Y) + \sigma_1^2 (E(Y))^2) \\ &= \sigma_2^2 \text{Var}(X) + \sigma_1^2 \text{Var}(Y) - 2\sigma_1 \sigma_2 (E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= \sigma_2^2 \cdot \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \mu_{XY} \\ &= 2\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \mu_{XY}. \end{aligned}$$

Budući je varijanca pozitivan broj zaključujemo da je  $\mu_{XY} \leq \sigma_1 \sigma_2$ ,

$$\rho_{XY} \leq 1.$$

Analogno, promatrajući slučajnu varijablu  $U = \sigma_2 X + \sigma_1 Y$  dobit ćemo nejednakost

$$\mu_{XY} \geq -\sigma_1 \sigma_2, \rho_{XY} \geq -1.$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad \mu_{XY} &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(X(aX + b)) - E(X)E(aX + b) \\
&= aE(X^2) + bE(X) - a(E(X))^2 + bE(X) \\
&= a\text{Var}(X) \\
&= a\sigma_1^2. \\
\sigma_2^2 &= \text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X) = a^2\sigma_1^2. \\
\rho_{XY} &= \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{a\sigma_1^2}{\sigma_1 \cdot \sigma_1 |a|} = \frac{a}{|a|}.
\end{aligned}$$

**Definicija 9.16** (NEKORELIRANE SLUČAJNE VARIJABLE)

Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  2-dim slučajni vektor. Neka je  $\mu_{XY}$  kovarijanca slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ , a  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  njihove standardne devijacije.

Za slučajne varijable  $X$  i  $Y$  kažemo da su nekorelirane ako je koeficijent korelacije  $\rho_{XY} = 0$ .

Ako je  $\rho_{XY} \neq 0$  slučajne varijable su korelirane.

**PRIMJER 9.15** (a) Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable onda su one nekorelirane.

(b) Ako su  $X$  i  $Y$  nekorelirane slučajne varijable onda one ne moraju biti nezavisne.

**Dokaz:**

(a)  $X$  i  $Y$  nezavisne  $\Rightarrow \mu_{XY} = 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 0 \Rightarrow X$  i  $Y$  nekorelirane.

(b)  $X$  i  $Y$  nekorelirane  $\Rightarrow \rho_{XY} = 0$  ali ne moraju biti  $X$  i  $Y$  nezavisne (mogu se naći primjeri).

**NAPOMENA 9.2** Regresijska analiza (regression analysis) je statistička metoda za odođivanje veze međslučajnim varijablama. Promatramo u slučajnom vektoru  $(X, Y)$  jednu slučajnu varijablu (npr.  $X$ ) kao nezavisnu-kontroliranu (njene vrijednosti zadajemo). Druga varijabla  $Y$  je slučajna varijabla i nas zanima kako ona ovisi o  $X$ . Model pretpostavlja da je  $E(Y)$  dano pomoću formule koja sadrži neke nepoznate parametre, koeficijente regresije (regression coefficient).

**PRIMJER 9.16** Neka je  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  2-dim slučajni vektor. Neka je  $\mu_{XY}$  kovarijanca slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ ,  $\rho_{XY}$  koeficijent korelacije,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  njihove standardne devijacije, a  $\mu_1, \mu_2$  njihova očekivanja. Pretstavimo da su  $X$  i  $Y$  zavisne slučajne varijable takve da je  $Y = aX + b$ . Parametre  $a$  i  $b$  možemo odrediti metodom najmanjih kvadrata tako da  $E((Y - (aX + b))^2)$  ima minimalnu vrijednost.

$a = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}$  je koeficijent regresije  $Y$  po  $X$ .

$b = \mu_2 - \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1 = \mu_2 - \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2} \cdot \mu_1$ .

$y - \mu_2 = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2} (x - \mu_1)$ ,  $y - \mu_2 = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)$

je pravac regresije  $Y$  po  $X$

Analogno, ako je  $X = aY + b$

$a = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_2^2}$  je koeficijent regresije  $X$  po  $Y$

$x - \mu_1 = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_2^2} (Y - \mu_2)$ ,  $x - \mu_1 = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2)$

je pravac regresije  $X$  po  $Y$ .

### Dokaz:

(metoda najmanjih kvadrata)

Označimo

$$\begin{aligned} K(a, b) &= E((Y - aX - b)^2) \\ &= E(Y - \mu_2 - a(X - \mu_1) - b + \mu_2 - a\mu_1)^2 \\ &= \sigma_2^2 + a^2\sigma_1^2 - 2a\mu_{XY} + (\mu_2 - b - a\mu_1)^2 \end{aligned}$$

$K(a, b)$  je funkcija od 2 varijable i tražimo njen ekstrem. Nužni uvjeti su

$$\frac{\partial K}{\partial a} = 2a\sigma_1^2 - 2\mu_{XY} - 2(\mu_2 - b - a\mu_1) = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -2(\mu_2 - b - a\mu_1) = 0.$$

Rješavanjem ovog sustava od 2 jed. s 2 nepoznanice dobit ćemo

$$a = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2},$$

$$b = \mu_2 - a\mu_1 = \mu_2 - \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2} \cdot \mu_1.$$

**NAPOMENA 9.3** Pravci regresije sijeku se u točki  $(\mu_1, \mu_2)$  koja se zove centar zajedničke distribucije  $X$  i  $Y$ .

$$\text{Kut između pravaca regresije } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \rho_{XY}^2}{\rho_{XY}} \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Ako je  $\rho_{XY} = 1$  ili  $-1$  pravci regresije se poklapaju i tada postoji potpuna linearna zavisnost između  $X$  i  $Y$ .

Ako je  $\rho_{XY} = 0$  onda su pravci regresije  $y = \mu_2, x = \mu_1$  okpmiti, a ne postoji linearna zavisnost slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ .

### Definicija 9.17 ( REZIDUALNA DISPERZIJA $Y$ u odnosu na $X$ )

Rezidualna disperzija slučajne varijable  $Y$  u odnosu na slučajnu varijablu  $X$  je maksimalna vrijednost  $E((Y - aX - b)^2)$  je veličina  $\sigma_2^2(1 - \rho_{XY}^2)$ .

Rezidualna disperzija  $Y$  u odnosu na  $X$  je mjeri grešku aproksimacije kada se  $Y$  zamijeni linearnom funkcijom  $aX + b$ .

Analogno je  $\sigma_1^2(1 - \rho_{XY}^2)$  rezidualna disperzija slučajne varijable  $X$  u odnosu na  $Y$ .

Ako je  $\rho_{XY} = 1$  ili  $-1$  rezidualna disperzija je jednaka 0, a  $X$  i  $Y$  su povezani linearnom funkcijskom zavisnošću  $Y=aX+b$  ili  $X=aY+b$ .

**PRIMJER 9.17** Za primjer slučajnog vektora  $(X, Y)$  nađite kovarijanca, koeficijent korelacije i pravce regresije.

$$\begin{pmatrix} X/Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) & \sum y_j p_{ij} & x_i \sum y_j p_{ij} \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{6}{18} & \frac{6}{9} & \frac{6}{9} \\ 2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{6}{18} & \frac{5}{6} & \frac{10}{6} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{6}{18} & \frac{3}{3} & \frac{6}{3} \\ f_2(y) & \frac{2}{18} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} & 1 & \frac{45}{18} & \frac{96}{18} \\ \sum x_i p_{ij} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{36}{18} & & \\ y_j \sum x_i p_{ij} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{36}{18} & & \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = E(X) = \sum x_i f_1(x_i) = 1 \cdot \frac{6}{18} + 2 \cdot \frac{6}{18} + 3 \cdot \frac{6}{18} = \frac{36}{18}$$

$$\mu_2 = E(Y) = \sum y_j f_2(y_j) = 1 \cdot \frac{2}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 3 \cdot \frac{11}{18} = \frac{45}{18}$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f_1(x_i) = 1 \cdot \frac{6}{18} + 4 \cdot \frac{6}{18} + 9 \cdot \frac{6}{18} = \frac{84}{18}$$

$$E(Y^2) = \sum y_j^2 f_2(y_j) = 1 \cdot \frac{2}{18} + 4 \cdot \frac{5}{18} + 9 \cdot \frac{11}{18} = \frac{121}{18}$$

$$\sigma_1^2 = Var(X) = \frac{84}{18} - \left(\frac{36}{18}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_2^2 = Var(Y) = \frac{121}{18} - \left(\frac{45}{18}\right)^2 = \frac{17}{36}$$

$$\sum y_j p_{ij} = \frac{45}{18}$$

$$\sum x_i p_{ij} = \frac{36}{18}$$

$$\sum \sum x_i y_j p_{ij} = \frac{96}{18}$$

Kovarijanca je

$$\mu_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{96}{18} - \frac{36}{18} \cdot \frac{45}{18} = \frac{1}{3}$$

Pravac regresije Y po X je

$$y - \mu_2 = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}(x - \mu_1),$$

$$y - \frac{45}{18} = \frac{1}{3}(x - \frac{36}{18}), y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Pravac regresije X po Y je

$$x - \mu_1 = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_2^2}(y - \mu_2),$$

$$x - \frac{36}{18} = \frac{1}{\frac{17}{36}}(y - \frac{45}{18}), x = \frac{12}{17}y + \frac{4}{17}, y = \frac{17}{12}x - \frac{1}{3}$$

Pravci se sijeku u točki  $(\mu_1, \mu_2) = (2, \frac{5}{2})$ .

$$tg \varphi = \frac{\frac{17}{12} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{17}{12} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{22}{41}$$

Kut između pravaca regresije je  $\varphi = 28.2^\circ$ .

Koeficijent korelacije je

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{17}{36}}} = 0.59409.$$