

1 UVOD

TEOREM 1.1 AKSIOM MATEMATIČKE INDUKCIJE (AMI)

Ako je $M \subseteq \mathbb{N}$, \mathbb{N} skup prirodnih brojeva i vrijedi:

- (i) $1 \in M$,
(ii) $(\forall m \in \mathbb{N}), m \in M \Rightarrow m + 1 \in M$
onda je $M = \mathbb{N}$.

Glavna primjena AMI je u dokazivanju općenite valjanosti određene formula koje sadrže varijablu $n \in \mathbb{N}$.

PRIMJER 1.1 Dokaži da vrijedi formula

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje:

$$\text{Neka je } M = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \right\}.$$

T: $M = \mathbb{N}$.

D: Baza indukcije $1 \in M$:

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1}{2}1(1+1)$$

$$1 = 1.$$

Pretpostavka indukcije (P.I.) $m \in M$:

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2}m(m+1).$$

Korak indukcije: Treba dokazati pomoću (P.I.) $m+1 \in M$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

Računamo:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^m k + (m+1)$$

$$= \text{P.I.}$$

¹VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m(m+1) + (m+1) \\
&= \frac{1}{2}(m+1)(m+2).
\end{aligned}$$

Zaključujemo prema AMI da je $M=\mathbb{N}$.

Definicija 1.1 *Definicija (FAKTORIJEJEL)*

Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, definiramo prirodan broj "n faktorijela":

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

a dogovorno $0! = 1$.

Definicija (BINOMNI KOEFICIJENT)

Neka su $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Binomni koeficijent je prirodni broj u oznaci

$\binom{n}{k}$ ("n povrh k") definiran na slijedeći način:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

a dogovorno: $\binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1$.

NAPOMENA 1.1 *Stirlingova formula*

Za približno izračunavanje faktorijela velikih brojeva možemo primijeniti aproksimativnu Stirlingovu formulu:

$$n! = n^n * e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

T: Svojstva binomnih koeficijenata:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

D: (i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

(ii)
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

TEOREM 1.2 *TEOREM (BINOMNI TEOREM)*

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Binomni teorem izražava razvoj n -te potencije binoma formulom:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

DOKAZ:

Tvrdnja se dokazuje pomoću aksioma matematičke indukcije (AMI).

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right\}.$$

T: $M = \mathbb{N}$.

D: Baza indukcije $1 \in M$:

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$$

$$a+b = b+a.$$

Pretpostavka indukcije (P.I.) $m \in M$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

Treba pokazati koristeći P.I. korak indukcije $m+1 \in M$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}.$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1} &= (a+b)^m (a+b) \\ &= \text{P.I.} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} * (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 \\ &\quad + \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 \\ &\quad + \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &= \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^m [\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}] a^k b^{m+1-k} \\ &\quad + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^m [\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}] a^k b^{m+1-k} \\
&+ \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0 \\
&= \binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&+ \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo prema AMI da je $M=\mathbb{N}$.

1.1 ELEMENTI KOMBINATORIKE

KOMBINATORIKA- grana matematike -osnovna svojstva konačnih skupova.

Poznati kombinatorni problemi:

Problem izbora, problem Konugsberskih mostova, problem magičnih kvadrata, problem 4 boje...

TEOREM 1.3 (PRINCIP SUME)

Neka konačni skupovi imaju n_i elemenata, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $|S_i| = n_i$ i neka su disjunktne za svaki izbor $i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset$.

Ako je $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$,

onda skup S ima $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ elemenata:

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_k|.$$

TEOREM 1.4 (PRINCIP PRODUKTA)

Neka konačni skupovi S_i imaju n_i elemenata, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $|S_i| = n_i$. Ako je

$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$ (kartezijev produkt skupova),

onda skup S ima $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ elemenata (uređenih k -torki $s = (s_1, s_2, \dots, s_k)$):

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_k|.$$

PRIMJER 1.2 Bacamo dvije kockice različite boje.

(a) Koliko različitih ishoda ima ako bacamo jednu za drugom?

(b) Na koliko različitih načina mogu pasti ako ih bacamo zajedno?

Rješenje:

S_1 ima $n_1 = 6$ elemenata, S_2 ima $n_2 = 6$ elemenata.

(a) $S = S_1 \cup S_2$, $|S| = |S_1| + |S_2| = n_1 + n_2 = 12$.

(b) $S = S_1 \times S_2$, $|S| = |S_1| \cdot |S_2| = n_1 n_2 = 36$.

Princip produkta ili osnovni princip kombinatorike ima drugu interpretaciju u teoremu o uzastopnom prebrojavanju.

TEOREM 1.5 (TEOREM O UZASTOPNOM PREBROJAVANJU)

Proučavamo uređene k -torke. Neka prvi element uređene k -torke možemo izabrati na n_1 načina, a za već izabrani prvi element, drugi možemo izabrati na n_2 načina i tako dalje do k -tog koji možemo izabrati na n_k načina. Tada uređenu k -torku možemo izabrati na $n = n_1 n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ načina.

PRIMJER 1.3 *U gradu ima 8 studentskih restorana ravnomjerno raspoređenih u 4 gradske četvrti. U okolini svakog restorana nalaze se dvije sportske dvorane. Student želi unajmiti stan. Na koliko načina može odabrati četvrt, studentski restoran i sportsku dvoranu ako: a) nije bitno ni da studentski restoran bude u istoj četvrti niti dvorana; b) nije bitno da studentski restoran bude u istoj četvrti ali dvorana treba biti; c) sve bude u najbližoj okolini.*

Rješenje:

a) $n = 4 \cdot 8 \cdot 16 = 512$,

b) $n = 4 \cdot 8 \cdot 4 = 128$

c) $n = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

1.1.1 PERMUTACIJE

Skup S ima n različitih elemenata.

Svaka uređena n -toraka elemenata skupa S zove se permutacija skupa S .

Broj svih n -članih permutacija je

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Dokaz: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na n načina, drugi možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći na $(n-2)$ načina itd.

PRIMJER 1.4 *Koliko ima svih 4-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki skupa $S=\{1,2,3,4\}$ takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

Rješenje:

4-znamenkasti broj je permutacija $n=4$ -članog skupa S .

Ima $P(4)=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ broja.

1.1.2 PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

Skup S ima n elemenata od kojih je n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, ..., n_k k -te vrste, $n=n_1+n_2+\dots+n_k$.

Uređena n -torka elemenata skupa S zove se n -člana permutacija s ponavljanjem. Broj n -članih permutacija s ponavljanjem je

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

PRIMJER 1.5 *Koliko ima svih 5-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki skupa $S=\{1,2,3,4\}$ takvih da se znamenke ponavljaju i to znamenka 1 dva puta?*

Rješenje:

5-znamenkasti broj je 5-člana permutacija s ponavljanjem elemenata iz S .

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4=2+1+1+1=5$$

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \bar{P}_5(2, 1, 1, 1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60.$$

PRIMJER 1.6 *U kutiji je 10 kuglica: 4 crne, 2 bijele, 2 crvene, 1 zelene i 1 plava. Izvlačim ih jednu po jednu i slažem po redu u niz. (zapišemo i vratimo). Koliko mogućih nizova možemo napraviti?*

Rješenje:

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=4+2+2+1+1=10$$

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \bar{P}_{10}(4, 2, 2, 1, 1) = \frac{10!}{4!2!2!1!1!} = 37800.$$

PRIMJER 1.7 *Koliko različitih riječi se može napraviti od slova u riječi VIVAMARIA?*

Rješenje:
 $\overline{P}_9(2, 2, 3)$.

PRIMJER 1.8 *Uzorak s vraćanjem.*

Skup S ima n elemenata od kojih je n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, ... , n_k k -te vrste, $n=n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Uređena r -torka ima r_1 elemenata prve skupine, r_2 elemenata druge skupine, ..., r_k elemenata k -te skupine $r=r_1+r_2+\dots+r_k$

Broj uređenih r -torki s vraćanjem je:

$$\overline{P}_r(r_1, r_2, \dots, r_k) \cdot (n_1)^{r_1} (n_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (n_k)^{r_k}.$$

Isti broj koristimo u slučaju ponavljanja r eksperimenta koji imaju k mogućih različitih rezultata ako se uvjeti eksperimenta ne mijenjaju.

Ako je n veliki a r mali u odnosu na n možemo odrediti broj uređenih r -torki s vraćanjem:

$$\overline{P}_r(r_1, r_2, \dots, r_k).$$

PRIMJER 1.9 *U velikoj kutiji su crvene, bijele i plave olovke. Na koliko načina možemo izabrati uzorak od 9 olovaka takav da su 2 crvene, 3 bijele i 4 plave olovke.*

Rješenje:

Koistimo formulu za uzorak s vraćanjem (veliki n u odnosu na r).

Osnovni skup je velik n velik (nepoznat), a biramo uzorak uređenu r -torku, $r=9$ (malo u odnosu na n). Uzorak je uređena r -torka sastavljena od $r = r_1 + r_2 + r_3 = 2+3+4=9$ olovaka.

Broj uzoraka je broj uzoraka s vraćanjem:

$$\overline{P}_9(4, 2, 3).$$

1.1.3 VARIJACIJE

Skup S ima n različitih elemenata.

Uređena r -torka ($r \leq n$) elemenata skupa S zove se varijacija r -tog razreda od n elemenata. Broj svih varijacija r -tog razreda od n elemenata je

$$V_n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

$$V_n^{(n)} = P(n) = n!$$

Dokaz: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na n načina, drugi možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći na $(n-2)$ načina, r -ti na $(n-r+1)$ način.

PRIMJER 1.10 *Koliko ima 2-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S=\{1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

Rješenje:

2-znamenkasti broj je varijacija 2-og razreda od $n=4$ -članog skupa S .

Ima $V_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ brojeva.

PRIMJER 1.11 *Koliko ima 4-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S=\{0, 1, 2, 5, 7\}$, takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

Rješenje:

4-znamenkasti broj je varijacija 4-og razreda od $n=5$ -članog skupa S .

$V_5^{(4)} = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$ brojeva.

Nula ne može biti na prvom mjestu pa od $V_5^{(4)}$ moramo oduzeti sve varijacije 3-eg razreda od 4 elemenata $\{1, 2, 5, 7\}$.

$V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.

$V_5^{(4)} - V_4^{(3)} = 120 - 24 = 96$.

PRIMJER 1.12 *Koliko ima 4-znamenkastih brojeva djeljivih s 5 sastavljenih od znamenki iz skupa $S=\{0, 1, 2, 5, 7\}$, takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

Rješenje:

Broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka 0 ili 5.

Prvo, fiksiramo da zadnju znamenku 5.

3-znamenkasti broj je varijacija 3-og razreda od $n=4$ -članog skupa $S=\{0, 1, 2, 7\}$.

$V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.

Nula ne može biti na prvom mjestu pa od $V_4^{(3)}$ moramo oduzeti sve varijacije 2-eg razreda od 3 elemenata $\{1, 2, 7\}$.

$V_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

$V_4^{(3)} - V_3^{(2)} = 24 - 6 = 18$.

Zatim, fiksiramo da zadnju znamenku 0.

3-znamenkasti broj je varijacija 3-og razreda od n=4-članog skupa $S=\{1, 2, 5, 7\}$.

$$V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

Ukupno ima $V_4^{(3)} - V_3^{(2)} + V_4^{(3)} = 24 - 6 + 24 = 42$ broja.

PRIMJER 1.13 *Na koliko se načina u razredu u kojem je 30 učenika može odabrati glumačka družina za "Crvenkapicu"? Likovi su Crvenkapica, vuk, baka i lovac.*

Rješenje:

$$V_{30}^{(4)}.$$

1.1.4 VARIJACIJE S PONAVLJANJEM

Skup S ima n različitih elemenata.

Uređena r-torke elemenata n-članog skupa S ali tako da se elementi mogu i ponavljati (r može biti i veće od n) zove se varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata. Broj varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata je

$$\overline{V}_n^{(r)} = n^r.$$

Dokaz: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na n načina, drugi možemo izabrati na n načina, treći na n načina, itd., r-ti na n načina jer je dozvoljeno ponavljanje elemenata iz skupa S.

PRIMJER 1.14 *Koliko ima 2-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S=\{1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ponavljaju?*

Rješenje:

2-znamenkasti broj je varijacija s ponavljanjem 2-og razreda od n=4-članog skupa S.

Ima $\overline{V}_4^{(2)} = 4^2 = 16$ brojeva.

PRIMJER 1.15 *Razdioba različitih predmeta.*

Svaka razdioba r različitih predmeta na n različitih mjesta je varijacija s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata.

Broj razdioba je: $\overline{V}_n^{(r)}$.

PRIMJER 1.16 3 kuglice različitih boja raspoređujemo u 6 kutija. Koliko razdioba možemo dobiti?

Rješenje:

$$\overline{V}_6^{(3)}$$

PRIMJER 1.17 Uočimo da je izbor r kuglica iz jedne kutije u kojoj je n različitih kuglica s vraćanjem u kutiju (a poredak je važan), analogan rasporedu r različitih kuglica u n različitih kutija.

PRIMJER 1.18 %textitPRIMJER

Iz kutije u kojoj je šest kuglica različitih boja izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem ponovo u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti tim postupkom?

Rješenje:

$$\overline{V}_6^{(3)}.$$

PRIMJER 1.19 Listić sportske prognoze ima 10 parova. Svaki par može dobiti oznaku 0,1, ili 2 (poraz, neriješeno, pobjeda domaćina). Koliko listića treba ispuniti da bi sigurno jedan listić bio dobitni?

Rješenje:

$$S = \{0, 1, 2\} \quad n = 3.$$

Listić je varijacija s ponavljanjem $r = 10$ tog razreda od $n = 3$ elementa.

$$\overline{V}_3^{(10)} = 3^{10} = 59049.$$

1.1.5 KOMBINACIJE

Skup S ima n različitih elemenata.

Svaki r -člani podskup ($r \leq n$) (redoslijed elemenata u skupu nije bitan) n -članog skupa S zove se kombinacija r -tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija r -tog razreda je

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

$$C_n^{(r)} = \frac{V_n^{(r)}}{r!}.$$

Dokaz: Budući da u r-članom skupu redoslijed nije bitan onda broj uređenih r-torki od n elemenata moramo podijeliti s brojem permutacija r-članog skupa.

PRIMJER 1.20 *Loto ima 39 brojeva. Izvlači se slučajno 7 brojeva. Koliko različitih listića s kombinacijama 7 brojeva treba ispuniti da se dobije jedan siguran pogodak?*

Rješenje:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 39\}, n = 39.$$

Listić je kombinacija 7-razreda ($r=7$) od 39 elemenata.

$$C_{39}^{(7)} = \binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7!} = 15380937.$$

Treba ispuniti 15380937 listića da bi bili sigurni da ćemo imati jedan dobitak.

PRIMJER 1.21 *U ravnini je 5 točaka od kojih nikoje 3 ne leže na istom pravcu.*

- Koliko pravaca određuju te točke?*
- Koliko trokuta određuju te točke?*

Rješenje:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, n = 5.$$

a) Pravac je kombinacija 2-razreda ($r=2$) od 5 elemenata.

$$C_5^{(2)} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

Točke određuju 10 pravaca.

b) Trokut je kombinacija 3-razreda ($r=3$) od 5 elemenata.

$$C_5^{(3)} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10.$$

Točke određuju 10 trokuta.

PRIMJER 1.22 *Uzorak bez vraćanja.*

Skup S ima n elemenata od kojih je n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, ..., n_k k-te vrste, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Uređena r-torka ima r_1 elemenata prve skupine, r_2 elemenata druge skupine, ..., r_k elemenata k - te skupine $r = r_1 + r_2 + \dots + r_k$

Broj uređenih r-torki bez vraćanjem je:

$$C_{n_1}^{r_1} \cdot C_{n_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot C_{n_k}^{r_k}.$$

PRIMJER 1.23 *Studenti dva turnusa biraju po tri predstavnika u Klub studenata prve godine GF. Prvi turnus ima 20 studenata, a drugi 30 studenata. Koliko moguće je različitih sastava Kluba studenata?*

Rješenje:

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja (koristimo teorem o uzastopnom prebrojavanju i broj kombinacija r_i -razreda od n_i elemenata).

$$n=n_1 + n_2 =20+30, r=r_1 + r_2 =3+3.$$

Ukupan broj načina da se dobije 6-člani Klub je

$$C_{20}^{(3)} \cdot C_{30}^{(3)} = \binom{20}{3} \cdot \binom{30}{3} = 4628400.$$

PRIMJER 1.24 *U skupu od 27 proizvoda 7 je neispravnih. Na koliko načina se može dobiti uzorak koji se sastoji od 5 dobrih i 3 neispravna proizvoda?*

Rješenje:

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja (koristimo teorem o uzastopnom prebrojavanju i broj kombinacija r_i -razreda od n_i elemenata).

$$S=20T+7D, n = n_T + n_D; n_T = 20, n_D = 7.$$

$$\text{uzorak}=5T+3D, r = r_T + r_D; r_T = 5, r_D = 3.$$

$$\text{Broj traženih uzoraka je } C_{20}^{(5)} \cdot C_7^{(3)} = \binom{20}{5} \cdot \binom{7}{3} = 542640.$$

PRIMJER 1.25 *Ako želimo ispitati kvalitetu 10 proizvoda od kojih je 6 ispravnih i 4 neispravna uzimamo uzorak od tri proizvoda. Koliko uzoraka ima u kojima*

- a) *nema neispravnih proizvoda*
- b) *ima jedan neispravan proizvod*
- c) *ima barem dva ispravna proizvoda?*

Rješenje:

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja.

a) Osnovni skup ima $n=10$ elemenata; $n=n_T + n_D=6 +4$. Uzorak bez neispravnih proizvoda ima $r=r_T + r_D = 3 + 0$.

Broj uzoraka koji nemaju neispravnih proizvoda je:

$$C_6^{(3)} \cdot C_4^{(0)} =20.$$

b) Osnovni skup ima $n=10$ elemenata; $n=n_T + n_D=6 +4$. Uzorak s 1 neispravnim proizvodom ima $r=r_T + r_D = 2 + 1$.

Broj uzoraka koji imaju 1 neispravni proizvod je:

$$C_6^{(2)} \cdot C_4^{(1)} = 60.$$

c) Osnovni skup ima $n=10$ elemenata; $n=n_T + n_D=6 + 4$.

Uzorak s bar dva ispravna proizvoda može biti ako ima 1 ili 0 neispravna proizvoda.

Broj uzoraka s bar 2 ispravna proizvoda je:

$$c)=a)+b)=C_6^{(3)} \cdot C_4^{(0)} + C_6^{(1)} \cdot C_4^{(2)} = 20+60=80.$$

PRIMJER 1.26 U skladištu je 100 proizvoda, 70 proizvoda prve klase, 20 proizvoda druge klase i 10 proizvoda treće klase. Kontrolor testira tri proizvoda i daje pozitivnu ocjenu ako su svi proizvodi proizvodi prve klase. Na osnovu koliko posto svih uzoraka će kontrolor dati pozitivnu ocjenu proizvoda?

Rješenje:

Broj uzoraka veličine $r=3$ od $n=100$ elemenata je

$$C_{100}^{(3)} = 161700.$$

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja.

Osnovni skup ima $n=100=n_1 + n_2 + n_3=70+20+10$.

Uzorak sa elementima prve klase ima $r=3=r_1 + r_2 + r_3 = 3 + 0 + 0$.

Broj "pozitivnih" uzoraka je: $C_{70}^{(3)} \cdot C_{20}^{(0)} \cdot C_{10}^{(0)} = 54740$.

Kontrolor će dati pozitivnu ocjenu u $54740/161700=0.3385$ ili u 33,8% slučajeva.

1.1.6 KOMBINACIJE S PONAVLJANJEM

Skup S ima n različitih elemenata.

Svaki r -člani podskup ($r \in \mathbb{N}$), n -članog skupa S gdje se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u r -torci nije bitan) zove se kombinacija s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata je

$$(i) \bar{C}_n^{(r)} = C_{n+r-1}^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}.$$

$$(ii) \bar{C}_n^{(r)} = \bar{P}_{n+r-1}(n-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Dokaz:

(i) Pokazat ćemo na primjeru $n=3$, $r=2$ da formula vrijedi.

Neka je skup $S=\{1,2,3\}$.

Sve kombinacije s ponavljanjem 2-og razreda od 3 elementa su (elemente smo poredali po uzlaznim vrijednostima):

$\{1,1\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,2\}$ $\{2,3\}$ $\{3,3\}$.

Tih kombinacija ima $\overline{C}_3^{(2)} = 6$.

Definirajmo preslikavanje ϕ koje ovim podskupovima pridijeliti podskupove dobivene tako da prvom članu podskupa dodamo 0, a drugom članu 1.

$\{1,1\} \rightarrow \{1,2\}$
 $\{1,2\} \rightarrow \{1,3\}$
 $\{1,3\} \rightarrow \{1,4\}$
 $\{2,2\} \rightarrow \{2,3\}$
 $\{3,3\} \rightarrow \{3,4\}$.

Slike su kombinacije bez ponavljanja 2-og razreda od 4-članog skupa $\{1,2,3,4\}$. Preslikavanje je bijekcija između skupa svih kombinacija s ponavljanjem 2-razreda od 3 elementa i kombinacija 2-razreda od 4 elemenata. Budući da postoji bijekcija, ti su skupovi jednakobrojni pa vrijedi $\overline{C}_3^{(2)} = C_4^{(2)} = 6$.

(ii) Uočimo da je izbor r kuglica iz jedne kutije u kojoj je n različitih kuglica s vraćanjem u kutiju, analogan rasporedu r jednakih kuglica u n različitih kutija. Svaki raspored kako se r kuglica može rasporediti u n kutija je kombinaciju s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata. Zamislimo da imamo n kutija poredanih u niz i da u njih bacamo k kuglica.

Problem je sada kao da slažemo kuglice i pregrade između njih. Jedan raspored možemo gledati kao uređenu $n-1+r$ -torcu gdje imamo $n-1$ izbor pregrada i r izbora za kuglice. Svaki takav raspored je permutacija s ponavljanjem od $n-1+r$ elementata od kojih jedne vrste ima $n-1$, a druge r . Ukupan broj takvih permutacija s ponavljanjem ima $\overline{P}_{n-1+r}(n-1, r)$.

PRIMJER 1.27 Zamislimo da imamo $n=5$ kutija poredanih u niz i da u njih bacamo $r=9$ kuglica.

Problem možemo razmatrati kao da slažemo kuglice i pregrade među kutijama. Imamo $n-1=4$ jednake pregrade i $r=9$ jednakih kuglica. Dakle, imamo permutacije $n+r-1=13$ elemenata od kojih su 4 jedne vrste i 9 druge vrste pa je njihov broj: $\overline{P}_{13}(9, 4)$.

PRIMJER 1.28 Razdioba jednakih predmeta.

Svaka razdioba r jednakih predmeta na n različitih mjesta je kombinacija s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata.

Broj razdioba je $\overline{C}_n^{(r)}$.

PRIMJER 1.29 3 kuglice iste boje raspoređujemo u 6 kutija. Koliko razdioba možemo dobiti?

Rješenje:

$$\overline{C}_6^{(3)}.$$

PRIMJER 1.30 Uočimo da je izbor r kuglica iz jedne kutije u kojoj je n različitih kuglica s vraćanjem u kutiju (redosljed nije važan), analogan rasporedu r jednakih kuglica u n različitih kutija.

PRIMJER 1.31 Iz kutije kojoj je 6 kuglice različite boje izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Koliko uzoraka možemo dobiti ako redosljed nije važan?

Rješenje:

$$\overline{C}_6^{(3)}.$$

PRIMJER 1.32 U prodavaonici se može kupiti 5 vrsta čarapa. Koliko različitih poklona može napraviti prodavač ako je pakirao po 9 pari?

Rješenje:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = 5$ vrsta čarapa.

Polkon je kombinacija s ponavljanjem 9-razreda ($r = 9$) od 5 elemenata.

Broj poklona je $\overline{C}_5^{(9)} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9} = 715$.

PRIMJER 1.33 Iz kutije u kojoj je šest kuglica različitih boja izvlačimo tri odjednom (bez vraćanja). Koliko takvih kombinacija možemo dobiti ako redosljed nije važan?

Rješenje:

$$C_6^{(3)}.$$

PRIMJER 1.34 Iz kutije kojoj je 6 kuglice različite boje izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Koliko uzoraka možemo dobiti ako redosljed nije važan?

Rješenje:

$$\overline{C}_6^{(3)}.$$

PRIMJER 1.35 PRIMJERI:

IZBOR BEZ VRAĆANJA

1. (poredak nije bitan)

U kutiji je 5 loptica različite boje. Koliko ima izbora 3 kuglice bez vraćanja ako poredak izabranih kuglica nije bitan?

$$n = 5, r = 3$$

$$C_n^{(r)} = C_5^{(3)} = \binom{5}{3} = \frac{5*4*3}{1*2*3} = 20.$$

2. (poredak bitan)

U kutiji je 5 loptica različite boje. Koliko ima izbora 3 kuglice bez vraćanja ako je poredak izabranih kuglica bitan (stavljamo ih u niz)?

$$n=5, r=3$$

$$V_n^{(r)} = V_5^{(3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5*4*3*2*1}{1*2} = 60.$$

IZBOR S VRAĆANJEM

1. (poredak nije bitan)

U kutiji je 5 loptica različite boje. Koliko ima izbora 3 kuglice s vraćanjem ako poredak izabranih kuglica nije bitan?

$$n=5, r=3$$

$$\overline{C}_n^{(r)} = \overline{C}_5^{(3)} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7*6*5}{1*2*3} = 35.$$

2. (poredak bitan)

U kutiji je 5 loptica različite boje. Koliko ima izbora 3 kuglice s vraćanjem ako je poredak izabranih kuglica bitan (stavljamo ih u niz)?

$$n=5, r=3$$

$$\overline{V}_n^{(r)} = \overline{V}_5^{(3)} = 5^3 = 125.$$

RAZDIOBE (u svaku kutiju najviše 1 predmet)

1. (jednaki predmeti)

U kutiji su 3 loptica iste boje. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 5 različitih kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo najviše 1 predmet?

$$n = 5, r = 3,$$

$$C_n^{(r)} = C_5^{(3)} = \binom{5}{3} = \frac{5*4*3}{1*2*3} = 20.$$

2. (različiti predmeti)

U kutiji su 3 loptice različite boje. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 5 različitih kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo najviše 1 predmet?

$$n = 5, r = 3, \\ V_n^{(r)} = V_5^{(3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5*4*3*2*1}{1*2} = 60.$$

RAZDIOBE (u svaku kutiju proizvoljno predmeta)

1. (jednaki predmeti)

U kutiji su 3 loptice iste boje. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 5 različitih kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj predmeta?

$$n = 5, r = 3, \\ \overline{C}_n^{(r)} = \overline{C}_5^{(3)} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7*6*5}{1*2*3} = 35.$$

2. (različiti predmeti)

U kutiji su 3 loptice različite boje. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 5 različitih kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj predmeta?

$$n = 5, r = 3, \\ \overline{V}_n^{(r)} = \overline{V}_5^{(3)} = 5^3 = 125.$$

NAPOMENA 1.2 IZBOR- s vraćanjem

IZBOR: r -čl. uzorka iz n -čl. skupa različitih elemenata	
nije važan poredak	$\overline{C}_n^{(r)}$
važan poredak	$\overline{V}_n^{(r)}$

NAPOMENA 1.3 IZBOR- bez vraćanja

IZBOR: r -čl. uzorka iz n -čl. skupa različitih elemenata	
nije važan poredak	$C_n^{(r)}$
važan poredak	$V_n^{(r)}$

NAPOMENA 1.4 RAZDIOBE-proizvoljno predmeta u kutijama

RAZDIOBE: r predmeta u n različitih kutija	
jednakih predmeta	$\overline{C}_n^{(r)}$
različitih predmeta	$\overline{V}_n^{(r)}$

NAPOMENA 1.5 RAZDIOBE-najviše po jedan predmet u kutiji

RAZDIOBE: r predmeta u n različitih kutija	
jednakih predmeta	$C_n^{(r)}$
različitih predmeta	$V_n^{(r)}$

NAPOMENA 1.6 UZORCI

UZORCI: veličine $r = r_1 + r_2 + \dots + r_k$	iz $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ -čl. skupa
bez vraćanja	$C_{n_1}^{(r_1)} \cdot C_{n_2}^{(r_2)} \cdot \dots \cdot C_{n_k}^{(r_k)}$
s vraćanjem	$\overline{P}_r(r_1, r_2, \dots, r_k) \cdot (n_1)^{r_1} (n_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (n_k)^{r_k}$
s vraćanjem $n \gg r$	$\overline{P}_r(r_1, r_2, \dots, r_k)$