# Sadržaj

# Poglavlje 1

# ELEMENTI KOMBINATORIKE

KOMBINATORIKA je grana grana matematike koja se bavi osnovnim svojstvima konačnih skupova i metodama prebrojavanja. Poznati kombinatorni problemi su: problem izbora upravnog odbora, problem mostova u Konigsbergu, problem magičnih kvadrata, problem 4 boje. Zadatak ovog poglavlja je da se upozanju metode prebrojavanja koje će se iskoristiti za računanje vjerojatnosti slučajnih događaja.

## 1.1 UVOD

**MOTIV 1.1** *Izračunajte koeficijent uz* $x^6$ *u razvoju* $(1 + x^3)^{14}$.

**Definicija 1.1** *(FAKTORIJEL)*

*Za prirodan broj* $n \in \mathbb{N}$*, definiramo prirodan broj "n faktorijela" u oznaci* $n!$ *sa:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

*a dogovorno* $0! = 1$.

*(BINOMNI KOEFICIJENT)*

*Neka su* $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$*. Binomni koeficijent je prirodni broj u oznaci* $\binom{n}{k}$ *("n povrh k") definiran na sljedeći način:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

*a dogovorno:* $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$.

**PRIMJER 1.1** ***T: Svojstva binomnih koeficijenata:***

*(i)* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

*(ii)* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

**Rješenje:**
**D:** *tko želi znati više*

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

**NAPOMENA 1.1** *Stirlingova formula*

*Za približno izračunavanje faktorijela velikih brojeva možemo primijeniti aproksimativnu Stirlingovu formulu:*

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

**PRIMJER 1.2** *Izračunajte* 5! *pomoću Stirlingove formule. Kolika je greška aproksimacije?*

**Rješenje:**
Pomoću Stirlingove formule računamo $5! \approx 5^5 \cdot e^{-5}\sqrt{2\pi 5} = 118.019$. Kako je po definiciji $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ greška aproksimacije je 1.981.

Peti Peanov aksiom prirodnih brojeva je aksiom matematičke indukcije koji ćemo koristiti u dokazima formula za broj permutacija, varijacija i kombinacija.

**TEOREM 1.1** *AKSIOM MATEMATIČKE INDUKCIJE (AMI)*
*Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva. Ako je $M \subseteq \mathbb{N}$, i vrijedi:*

*(i)* $1 \in M$,

*(ii)* $(\forall m \in \mathbb{N}),\ m \in M \Rightarrow m + 1 \in M$

*onda je $M = \mathbb{N}$.*

AMI primijenjujemo pri dokazivanju općenite valjanosti formula koje sadrže varijablu $n \in \mathbb{N}$.

**TEOREM 1.2** *(BINOMNI TEOREM)*
*Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Binomni teorem izražava razvoj $n$-te potencije binoma formulom:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

**Dokaz:** *tko želi znati više*
Tvrdnja se dokazuje pomoću aksioma matematičke indukcije (AMI). Neka je

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right\}.$$

Treba dokazati da je $M = \mathbb{N}$.
(B.I) $1 \in M$:

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^1 b^{1-k} \\ a+b &= b+a. \end{aligned}$$

(P.I.) $m \in M$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

(K.I.) Treba pokazati koristeći (P.I.) da je $m+1 \in M$ tj.

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)^m(a+b) \\
&= P.I. \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} * (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 + \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} [\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}] a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 \\
&= \binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} [\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}] a^k b^{m+1-k} + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0 \\
&= \binom{m+1}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo prema AMI da je $M = \mathbb{N}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.3** *motiv*

*Izračunajte koeficijent uz* $x^6$ *u razvoju* $(1+x^3)^{14}$.

**Rješenje:**

Prema binomnom teoremu računamo $(1 + x^3)^{14} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (x^3)^{n-k}$. U razvoju ćemo odrediti $k$ iz uvjeta da je $(x^3)^{n-k} = x^6$. Za $n = 14$ dobili smo da je $k = 12$. Dvanaesti član u razvoju je $x^6$, pa je njegov koeficijent $\binom{n}{k} = \binom{14}{12} = 91$. Traženi koeficijent uz potenciju $x^6$ je 91.

## 1.2 PRINCIPI PREBROJAVANJA

**MOTIV 1.2** *U gradu ima 8 studentskih restorana ravnomjerno raspoređenih u 4 gradske četvrti. U okolini svakog restorana nalaze se dvije sportske dvorane. Student želi unajmiti stan. Na koliko načina može odabrati četvrt, studentski restoran i sportsku dvoranu ako: a) nije bitno ni da studentski restoran bude u istoj četvrti niti dvorana; b) nije bitno da studentski restoran bude u istoj četvrti ali dvorana treba biti; c) sve bude u najbližoj okolini.*

**TEOREM 1.3** *(PRINCIP SUME)*

*Neka konačni skupovi imaju $n_i$ elemenata, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, .., k$, $|S_i| = n_i$ i neka su disjunktni za svaki izbor $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$.*
*Ako je $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$, onda skup S ima n=$n_1 + n_2 + ... + n_k$ elemenata:*

$$|S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_k|.$$

**TEOREM 1.4** *(PRINCIP PRODUKTA)*

*Neka konačni skupovi $S_i$ imaju $n_i$ elemenata, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, .., k$,*
*$|S_i| = n_i$. Ako je $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ (kartezijev produkt skupova), onda skup S ima n=$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ elemenata (uređenih k-torki s=($s_1$,$s_2$, ...,$s_k$)):*

$$|S_1 \times S_2 \times ... \times S_k| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot ... \cdot |S_k|.$$

**PRIMJER 1.4** *Bacamo dvije igraée kocke različite boje.*
*(a) Koliko različitih ishoda ima ako bacamo jednu za drugom?*
*(b) Na koliko različitih načina mogu pasti ako ih bacamo zajedno?*

**Rješenje:**
$S_1$ ima $n_1 = 6$ elemenata, $S_2$ ima $n_2 = 6$ elemenata.
(a) $S = S_1 \cup S_2$, $|S| = |S_1| + |S_2| = n_1 + n_2 = 12$.
(b) $S = S_1 \times S_2$, $|S| = |S_1| \cdot |S_2| = n_1 n_2 = 36$.

Princip produkta ili osnovni princip kombinatorike ima drugu interpretaciju u teoremu o uzastopnom prebrojavanju.

**TEOREM 1.5** *( TEOREM O UZASTOPNOM PREBROJAVANJU)*

*Proučavamo uređene k-torke. Neka prvi element uređene k-torke možemo izabrati na $n_1$ načina, a za već izabrani prvi element, drugi možemo izabrati na $n_2$ načina i tako dalje do k-tog koji možemo izabrati na $n_k$ načina. Tada uređenu k-torku možemo izabrati na n=$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ načina.*

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.5** *motiv*

*U gradu ima 8 studentskih restorana ravnomjerno raspoređenih u 4 gradske četvrti. U okolini svakog restorana nalaze se dvije sportske dvorane. Student želi unajmiti stan. Na koliko načina može odabrati četvrt, studentski restoran i sportsku dvoranu ako: a) nije bitno ni da studentski restoran bude u istoj četvrti niti dvorana; b) nije bitno da studentski restoran bude u istoj četvrti ali dvorana treba biti; c) sve bude u najbližoj okolini.*

**Rješenje:**

a) $n = 4{\cdot}8{\cdot}16{=}512$,

b) $n = 4{\cdot}8{\cdot}4{=}128$

c) $n = 4{\cdot}2{\cdot}2{=}16$.

## 1.3 PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

**MOTIV 1.3** *Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5 ako nije dozvoljeno ponavljanje znakova?*

**Definicija 1.2** *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaka uređena n-torka elemenata skupa S zove se permutacija skupa S.*

T: Broj svih $n$-članih permutacija je

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1;$$

D: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na $n$ načina, drugi možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći na $(n-2)$ načina itd.

D: *tko želi znati više*

Pomoću AMI po $n$ : Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} : P_n = n!\}$.
(B.I) Provjeravamo je li $1 \in M$. Za $n = 1$ broj uređenih jednorki iz skupa koji ima samo 1 element jednak $P_1 = 1$. Prema formuli $n! = 1! = 1$ za $n = 1$; Tako je $1 \in M$.
(P.I) Pretpostavimo $m \in M$,
tj. vrijedi formula $V_m = m!$.
(K.I) U koraku indukcije trebamo pokazati da je $m + 1 \in M$,
tj. treba pokazati da vrijedi $P_{m+1} = (m + 1)!$.
Skup svih permutacija od $m + 1$ element možemo podijeliti na $m + 1$ podskupova u kojima su permutacije s fiksnim prvim elementom npr. $a_1$, sve permutacije s fiksnim prvim elementom $a_2$ itd. Tako je

$$P_{m+1} = (m+1) \cdot P_m = (P.I.) = (m+1) \cdot m! = (m+1)!,$$

pa smo pokazali da je $m + 1 \in M$.
Prema AMI zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.6** *motiv*

*Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako nije dozvoljeno ponavljanje znakova.*

**Rješenje:**
Svaka lozinka je jedna permutacija bez ponavljanja $n = 4$-članog skupa $S = \{v, c, 1, 5\}$. Ukupan broj permutacija bez ponavljanja je $P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Možemo formirati 24 lozinke.

**PRIMJER 1.7** *Koliko ima svih četveroznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki skupa S={1,2,3,4} takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

**Rješenje:**
Svaki 4-znamenkasti broj je permutacija $n = 4$-članog skupa S. Broj permutacija je $P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

### 1.3.1 PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

**MOTIV 1.4** *Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako sa slovo v ponovi 2 puta?*

**MOTIV 1.5** *Eksperiment koji ima k=3 ishoda ponavljamo n=7 puta. Koliko je mogućih nizova eksperimenata takvih da se prvi ishod dogodi 1 put, drugi ishod 2 puta, a treć ishod 4 puta?*

**Definicija 1.3** *Neka skup S ima n elemenata od kojih je $n_1$ jedne vrste, $n_2$ druge vrste, ... , $n_k$ k-te vrste, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. Uređena n-torka elemenata skupa S zove se n-člana permutacija s ponavljanjem.*

T: Broj $n$-članih permutacija s ponavljanjem je

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

D: *tko želi znati više*

Pretpostavimo da su svi elementi u permutaciji sa ponavljanjem različiti i da imamo permutaciju bez ponavljanja od $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ elemenata. Ukupan broj tih permutacija je $(n_1 + n_2 + ... + n_k)!$ . U permutaciji s ponavljanjem možemo zamijeniti mjesta na kojima su elementi prve vrste na $n_1!$ načina i pri tom se permutacija neće promijeniti. Slično zaključujemo i za elemnte druge, ..., k-te vrste. Za svaku permutaciju s ponavljanjem postoji $n_1!n_2!...n_k!$ permutacija bez ponavljanja u kojima se ne mijenja poredak različitih elemnata skupa S. Mijenjajući poredak različitih elemenata dobili bismo ukupan broj permutacija bez ponavljanja od $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ elemenata. Stoga je ukupan broj permutacija bez ponavljanja jednak $(n_1 + n_2 + ... + n_k)! = n_1!n_2!...n_k!\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k)$. Otuda slijedi da je ukupan broj permutacija s ponavanjem dan formulom

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.8** *motiv*

*Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v (malo slovo) i brojeva 1 i 5, ako se slovo v ponovi 2 puta?*

**Rješenje:**
Lozinka je je 4-člana permutacija s ponavljanjem elemenata iz skupa $S = \{v, v, 1, 5\}$, tako da je $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 1 + 1 = 4$. Broj permutacija s ponavljanjem je $\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \overline{P}_4(2, 1, 1) = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$. Možemo formirati 12 lozinki.

**PRIMJER 1.9** *Koliko ima peteroznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ponavljaju i to znamenka 1 dva puta?*

**Rješenje:**
Svaki 5-znamenkasti broj je 5-člana permutacija s ponavljanjem elemenata tako da je $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$. Broj permutacija je $\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \overline{P}_5(2, 1, 1, 1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$.

**PRIMJER 1.10** *U kutiji je 10 kuglica: 4 crne, 2 bijele, 2 crvene, 1 zelene i 1 plava. Izvlačim ih jednu po jednu i slažem po redu u niz. (zapišemo i vratimo). Koliko mogućih nizova možemo napraviti?*

**Rješenje:**
Svaki niz duljine 10 je permutacija s ponavljanjem, tako da je $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$. Broj permutacija je $\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \overline{P}_{10}(4, 2, 2, 1, 1) = \frac{10!}{4!2!2!1!1!} = 604800$.

**PRIMJER 1.11** *Koliko različitih riječi se može napraviti od slova u riječi VIVAMARIA?*

**Rješenje:** $\overline{P}_9(2,2,3)$.

**PRIMJER 1.12** *Uzorak s vraćanjem*

*Skup S ima n elemenata od kojih je $n_1$ jedne vrste, $n_2$druge vrste, ... , $n_k$ k-te vrste, n=$n_1 + n_2 + ... + n_k$. Uređena r-torka ima $r_1$ elemenata prve skupine, $r_2$ elemenata druge skupine, ...,$r_k$ elemenata k - te skupine r=$r_1$+$r_2$+...+$r_k$. Broj uređenih r-torki s vraćanjem je:*

$$\overline{P}_r(r_1, r_2, ..., r_k) \cdot (n_1)^{r_1}(n_2)^{r_2} \cdot ... \cdot (n_k)^{r_k}.$$

*Ako je n veliki a r mali u odnosu na n možemo odrediti broj uređenih r-torki s vraćanjem:*

$$\overline{P}_r(r_1, r_2, ..., r_k).$$

**PRIMJER 1.13** *U velikoj kutiji su crvene, bijele i plave olovke. Na koliko načina možemo izabrati uzorak od 9 olovaka takav da su 2 crvene, 3 bijele i 4 plave olovke.*

**Rješenje:**
Koristimo formulu za uzorak s vraćanjem (veliki $n$ u odnosu na $r$).
Osnovni skup je velik $n$(nepoznat)). Uzorak je uređena $r$-torka sastavljena od $r = r_1 + r_2 + r_3$ =2+3+4=9 olovaka.
Broj uzoraka je broj uzoraka s vraćanjem je $\overline{P}_9(4,2,3)$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.14** *motiv*

*Ponavljamo eksperiment koji ima k=3 ishoda n=7 puta a da se uvjeti eksperimenta ne mijenjaju. Broj mogućih nizova eksperimenata takvih da se prvi ishod dogodi $n_1 = 1$ puta, $n_2 = 2$ puta,...,k-ti ishod $n_k = 4$ puta je:*

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k),$$
$$\overline{P}_7(1,2,4) = \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 4!}.$$

*jer je broj različitih nizova eksperimenata jednak broju uzoraka s vraćanjem.*

## 1.4 VARIJACIJE BEZ PONAVLJANJA

**MOTIV 1.6** *(a) Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako nije dozvoljeno ponavljanje znakova*
*(b) Koliko se lozinki duljine 3 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako nije dozvoljeno ponavljanje znakova*

**Definicija 1.4** *Neka skup $S$ ima $n$ različitih elemenata. Uređena $r$-torka ($r \leq n$) elemenata skupa $S$ zove se varijacija $r$-tog razreda od $n$ elemenata.*

T: Broj svih varijacija $r$-tog razreda od $n$ elemenata je

$$V_n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!};$$

$$V_n^{(n)} = P(n) = n!$$

D: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na $n$ načina, drugi možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći na $(n-2)$ načina, $r$-ti na $(n-r+1)$ način.

D: *tko želi znati više*

Pomoću AMI po $n$ : Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} : V_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!},\ 1 \leq r \leq n\}$.
(B.I) Provjeravamo je li $1 \in M$. Za $n = 1$ parametar $1 \leq r \leq n$ može poprimiti samo vrijednost $r = 1$ pa je broj uređenih jednoorki iz skupa koji ima samo 1 element jednak $V_1^{(1)} = 1$. Prema formuli $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{1!}{(1-1)!} = 1$ za $n = 1$; Tako je $1 \in M$.
(P.I) Pretpostavimo $m \in M$,
pa tada za svaki dani $1 \leq r \leq m$ vrijedi formula $V_m^{(r)} = \frac{m!}{(m-r)!}$.
(K.I) U koraku indukcije trebamo pokazati da je $m + 1 \in M$.
(i) Ako je $r = 1$ onda je očito broj svih uređenih jeednorki iz skupa koji ima $m + 1$ element jednak $V_{m+1}^{(1)} = m+1$. Prema formuli $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-1)!} = (m+1)$ za $n = m+1$ i $r = 1$.
Tako je $m + 1 \in M$ za $r = 1$.
(ii) Ako je $2 \leq r \leq m + 1$ treba pokazati da vrijedi $V_{m+1}^{(r)} = \frac{(m+1)!}{(m+1-r)!}$.
Za svaki fiksni $r$ možemo skup svih varijacija podijeliti na $m + 1$ podskupove u kojima su varijacije s fiksnim prvim elementom npr. $a_1$, sve varijacije s fiksnim prvim elementom $a_2$ itd. Tako je

$$V_{m+1}^{(r)} = (m+1)\cdot V_m^{(r-1)} = (P.I.) = (m+1)\cdot \frac{m!}{(m-r+1)!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-r)!}.$$

Tako smo pokazali da je $m + 1 \in M$ za $2 \leq r \leq m + 1$.
Prema AMI zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.15** *motiv*
*(a) Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako nije dozvoljeno ponavljanje znakova*
*(b) Koliko se lozinki duljine 3 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako nije dozvoljeno ponavljanje znakova*

**Rješenje:**
(a) Lozinka duljine 4 znaka je jedna varijacija 4.tog razreda od $n = 4$-članog skupa$S = \{v, c, 1, 5\}$ tj. permutacija bez ponavljanja od 4 elementa. Broj varijacija je $V_4^{(4)} = P(4) = 4! = 24$. Možemo formirati 24 lozinke. (b) Lozinka duljine 3 znaka je jedna varijacija 3-eg razreda od $n = 4$-članog skupa$S = \{v, c, 1, 5\}$. Broj varijacija je $V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$. Možemo formirati 24 lozinke.

**PRIMJER 1.16** *Koliko ima dvoznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa* $S$=$\{1, 2, 3, 4\}$ *, takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

**Rješenje:**
Svaki 2-znamenkasti broj je varijacija 2-og razreda od $n = 4$-članog skupa S. Broj varijacija je $V_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$..

**PRIMJER 1.17** *Koliko ima četveroznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa* $S$=$\{0, 1, 2, 5, 7\}$ *, takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

**Rješenje:**
Svaki 4-znamenkasti broj je varijacija 4-og razreda od $n = 5$ elemeata. Broj varijacija je $V_5^{(4)} = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$.
Nula ne može biti na prvom mjestu pa od $V_5^{(4)}$ moramo oduzeti sve varijacije 3-eg razreda od 4 elementa $V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$. Traženih brojeva ima $V_5^{(4)} - V_4^{(3)} = 120 - 24 = 96$.

**PRIMJER 1.18** *Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 5 sastavljenih od znamenki iz skupa* $S = \{0, 1, 2, 5, 7\}$ *, takvih da se znamenke ne ponavljaju?*

**Rješenje:**
Broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka 0 ili 5.
Prvo, fiksiramo zadnju znamenku 5.
Svaki takav troznamenkasti broj je varijacija 3-eg razreda od $n = 4$-članog skupa $S = \{0, 1, 2, 7\}$. Broj varijacija je $V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.
Nula ne može biti na prvom mjestu pa od $V_4^{(3)}$ moramo oduzeti sve varijacije 2-og razreda od 3 elementa iz skupa $\{1, 2, 7\}$ $V_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.
Zatim, fiksiramo zadnju znamenku 0. Svaki takav 3-znamenkasti broj je varijacija 3-eg razreda od $n = 4$-članog skupa
$S = \{1, 2, 5, 7\}$, pa ih ukupno ima $V_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.
Ukupan broj traženih brojeva je $V_4^{(3)} - V_3^{(2)} + V_4^{(3)} = 24 - 6 + 24 = 42$.

**PRIMJER 1.19** *Na koliko se načina u razredu u kojem je 30 učenika može odabrati glumačka družina za "Crvenkapicu"? Likovi su Crvenkapica, vuk, baka i lovac.*

**Rješenje:** $V_{30}^{(4)}$.

### 1.4.1 VARIJACIJE S PONAVLJANJEM

**MOTIV 1.7** *Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako je dozvoljeno ponavljanje znakova.*

**Definicija 1.5** *Neka skup S ima n različitih elemenata. Uređena r-torka elemenata n-članog skupa S ali tako da se elementi mogu i ponavljati (r može biti i veće od n) zove se varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata.*

T: Broj varijacija s ponavljanjem $r$-tog razreda od $n$ elemenata

$$\overline{V}_n^{(r)} = n^r.$$

D: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na $n$ načina, drugi možemo izabrati na $n$ načina, treći na $n$ načina, itd., $r$-ti na $n$ načina jer je dozvoljeno ponavljanje elemenata iz skupa S.

D: *tko želi znati više*

Pomoću AMI po $r$ : Neka je $M = \{r \in \mathbb{N} : \overline{V}_n^{(r)} = n^r,\ n \in \mathbb{N}\}$.
(B.I) Provjeravamo je li $1 \in M$. Za $r = 1$ broj uređenih jednorki iz skupa koji ima samo $n$ element jednak $\overline{V}_n^{(1)} = n$. Prema formuli $n^r = n^1 = n$ za $r = 1$; pa je $1 \in M$.
(P.I) Pretpostavimo da je $m \in M$,
tj. vrijedi formula $\overline{V}_m^{(r)} = n^m$.
(K.I) U koraku indukcije trebamo pokazati da je $m + 1 \in M$.
tj. treba pokazati da vrijedi $\overline{V}_n^{(m+1)} = n^{m+1}$.
Skup svih varijacija s ponavljanjem možemo podijeliti na $n$ podskupova u kojima su varijacije s ponavljanjem s fiksnim prvim elementom npr. $a_1$, sve varijacije s fiksnim prvim elementom $a_2$ itd. Tako je

$$\overline{V}_n^{(m+1)} = n \cdot \overline{V}_n^{(m)} = (P.I.) = n \cdot n^m = n^{m+1}.$$

Pokazali da je $m + 1 \in M$ za $n \in \mathbb{N}$.
Prema AMI zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.20** *motiv*

*(a) Koliko se lozinki duljine 4 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako je dozvoljeno ponavljanje znakova. (b) Koliko se lozinki duljine 3 znaka može formirati od slova v i c (mala slova) i brojeva 1 i 5, ako je dozvoljeno ponavljanje znakova.*

**Rješenje:**
(a) Lozinka je varijacija s ponavljanjem 4-tog razreda od $n = 4$-članog skupa $S = v, c, 1, 5$. Broj varijacija je $\overline{V}_4^{(4)} = 4^4 = 256$. Možemo formirati 256 lozinki.
(b) Lozinka je varijacija s ponavljanjem 3-tog razreda od $n = 4$-članog skupa $S = v, c, 1, 5$. Broj varijacija je $\overline{V}_4^{(3)} = 4^3 = 64$. Možemo formirati 256 lozinki.

**PRIMJER 1.21** *Koliko ima dvoznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ponavljaju?*

**Rješenje:**
Svaki takav dvoznamenkasti broj je varijacija s ponavljanjem 2-og razreda od $n = 4$-članog skupa S. Broj varijacija je $\overline{V}_4^{(2)} = 4^2 = 16$.

**PRIMJER 1.22** *Razdioba različitih predmeta*

*Svaka razdioba r različitih predmeta na n različitih mjesta je varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata. Broj razdioba je: $\overline{V}_n^{(r)}$.*

**PRIMJER 1.23** *3 kuglice različitih boja raspoređujemo u 6 kutija. Koliko razdioba možemo dobiti?*

**Rješenje:** $\overline{V}_6^{(3)}$

**PRIMJER 1.24** *Uočimo da je izbor r kuglica iz jedne kutije u kojoj je n različitih kuglica s vraćanjem u kutiju (a poredak je važan), analogan rasporedu r različitih kuglica u n različitih kutija.*

**PRIMJER 1.25** *Iz kutije u kojoj je šest kuglica različitih boja izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem ponovo u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti tim postupkom?*

**Rješenje:** $\overline{V}_6^{(3)}$.

**PRIMJER 1.26** *Listić sportske prognoze ima 10 parova. Svaki par može dobiti oznaku 0,1 ili 2 (poraz, neriješeno,pobjeda domaćina). Koliko listića treba ispuniti da bi sigurno jedan listić bio dobitni?*

**Rješenje:** $S = \{0, 1, 2\}$, $n = 3$.
Listić je varijacija s ponavljanjem $r = 10$-og razreda od $n = 3$ elementa. Broj varijacija je $\overline{V}_3^{(10)} = 3^{10} = 59049$.

## 1.5 KOMBINACIJE BEZ PONAVLJANJA

**MOTIV 1.8** *U skladištu je 100 proizvoda, 70 proizvoda prve klase, 20 proizvoda druge klase i 10 proizvoda treće klase. Kontrolor testira tri proizvoda i daje pozitvnu ocjenu ako su svi proizvodi prve klase. Na osnovu koliko posto svih uzoraka će kontrolor dati pozitivnu ocjenu proizvoda?*

**Definicija 1.6** *Neka skup $S$ ima $n$ različitih elemenata. Svaki $r$-člani podskup ($r \leq n$) (redoslijed elemenata u skupu nije bitan) $n$-članog skupa $S$ zove se kombinacija $r$-tog razreda od $n$ elemenata.*

T: Broj svih kombinacija $r$-tog razreda je od $n$ elemenata je

(i) $C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$;

(ii) $C_n^{(r)} = \frac{V_n^{(r)}}{r!}$.

D: (i) Budući da u $r$-članom skupu redoslijed nije bitan onda broj uređenih $r$-torki od $n$ elemenata moramo podijeliti s brojem permutacija $r$-članog skupa.
(ii) Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, prvi element možemo izabrati na $n$ načina, drugi možemo izabrati na $(n-1)$ načina, treći na $(n-2)$ načina, $r$-ti na $(n-r+1)$ način.

D: *tko želi znati više*

Pomoću AMI po $n$ :
Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} : C_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!},\ 1 \leq r \leq n\}$.
(B.I) Provjeravamo je li $1 \in M$. Za $n = 1$ parametar $1 \leq r \leq n$ može poprimiti samo vrijednost $r = 1$ pa je broj jednočlanih podskupova iz skupa koji ima samo 1 element jednak $C_1^{(1)} = 1$. Prema formuli $\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{1!}{(1-1)!\cdot 1!} = 1$ za $n = 1$; Tako je $1 \in M$.
(P.I) Pretpostavimo $m \in M$,
pa tada za svaki dani $1 \leq r \leq m$ vrijedi formula $C_m^{(r)} = \frac{m!}{(m-r)!\cdot r!}$.
(K.I) U koraku indukcije trebamo pokazati da je $m+1 \in M$.
($*$) Ako je $r = 1$ onda je očito broj svih jednočlanih podskupova iz skupa koji ima

$m+1$ element jednak $C_{m+1}^{(1)} = m+1$. Prema formuli $\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-1)!\cdot r!} = (m+1)$ za $n = m+1$ i $r = 1$.
Pokazali smo da je $m+1 \in M$ za $r = 1$.
$(**)$ Ako je $2 \leq r < m+1$ treba pokazati da vrijedi $C_{m+1}^{(r)} = \frac{(m+1)!}{(m+1-r)!\cdot r!}$.
Za svaki fiksni $r$ možemo skup svih kombinacija podijeliti na dva podskupa u kojima su kombinacije bez ponavljanja koje sadrže fiksni element npr. $a_1$, i podskup u kojem su kombinacije bez ponavljanja koje ne sadrže fiksni element $a_1$. Tako je

$$C_{m+1}^{(r)} = \cdot C_m^{(r-1)} + C_m^{(r)} = (P.I.) = \frac{m!}{(m-r+1)\cdot(r-1)!} + \frac{m!}{(m-r)\cdot r!} = \frac{m+1!}{(m+1-r)!\cdot r!}.$$

Tako smo pokazali da je $m+1 \in M$ za $2 \leq r < m+1$.
$(***)$ Ako je $r = m+1$ onda je očito broj svih $m+1$ -članih podskupova iz skupa koji ima $m+1$ element jednak $C_{m+1}^{(m+1)} = 1$. Prema formuli $\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-(m+1))!\cdot(m+1)!} = 1$ za $n = m+1$ i $r = m+1$.
Vrijedi $m+1 \in M$ za $r = m+1$.

Prema AMI zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$.

**PRIMJER 1.27** *Loto ima 39 brojeva. Izvlači se slučajno 7 brojeva. Koliko različitih listića s kombinacijama 7 brojeva treba ispuniti da se dobije jedan siguran pogodak?*

**Rješenje:** $S = \{1, 2, 3, ..., 39\}$, $n = 39$.
Listić je kombinacija 7-og razreda ($r = 7$) od 39 elemenata. Broj kombinacija je $C_{39}^{(7)} = \binom{39}{7} = \frac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33}{7!} = 15380937$. Treba ispuniti 15380937 listića da bi bili sigurni da ćemo imati jedan dobitak.

**PRIMJER 1.28** *U ravnini je 5 točaka od kojih 3 nikada ne leže na istom pravcu.*
*a) Koliko pravaca određuju te točke?*
*b) Koliko trokuta određuju te točke?*

**Rješenje:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = 5$.
a) Pravac je kombinacija 2-og razreda ($r = 2$) od 5 elemenata. Broj kombinacija je $C_5^{(2)} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{2!} = 10$. Točke određuju 10 pravaca.
b) Trokut je kombinacija 3-eg razreda ($r = 3$) od 5 elemenata. Broj kombinacija je $C_5^{(3)} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$. Točke određuju 10 trokuta.

**PRIMJER 1.29** *Uzorak bez vraćanjem*

*Skup S ima n elemenata od kojih je $n_1$ jedne vrste, $n_2$druge vrste, ... , $n_k$ k-te vrste, n=$n_1 + n_2 + ... + n_k$. Uređena r-torka ima $r_1$ elemenata prve skupine, $r_2$ elemenata druge skupine, ...,$r_k$ elemenata k - te skupine r=$r_1$+$r_2$+...+$r_k$*

*Broj uređenih r-torki bez vraćanja je: $C_{n_1}^{r_1} \cdot C_{n_2}^{r_2} \cdot ... \cdot C_{n_k}^{r_k}$.*

**PRIMJER 1.30** *Studenti dva turnusa biraju po tri predstavnika u Klub studenata prve godine GF. Prvi turnus ima 20 studenata, a drugi 30 studenata. Koliko moguće je različitih sastava Kluba studenata?*

**Rješenje:**

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja (koristimo teorem o uzastopnom prebrojavanju i broj kombinacija $r_i$-razreda od $n_i$ elemenata).

$n = n_1 + n_2$ =20+30,$r = r_1 + r_2$ =3+3.

Ukupan broj načina da se dobije 6-člani Klub je

$C_{20}^{(3)} \cdot C_{30}^{(3)} = \binom{20}{3} \cdot \binom{30}{3} = 4628400.$

**PRIMJER 1.31** *U skupu od 27 proizvoda 7 je neispravnih. Na koliko načina se može dobiti uzorak koji se sastoji od 5 dobrih i 3 neispravna proizvoda?*

**Rješenje:**

Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja (koristimo teorem o uzastopnom prebrojavanju i broj kombinacija $r_i$-razreda od $n_i$ elemenata).

$S = 20T + 7D$, $n = n_T + n_D$; $n_T = 20$, $n_D = 7$.

Uzorak $r = 5T + 3D$, $r = r_T + r_D$; $r_T = 5$, $r_D = 3$.

Broj traženih uzoraka je $C_{20}^{(5)} \cdot C_{7}^{(3)} = \binom{20}{5} \cdot \binom{7}{3} = 542640.$

**PRIMJER 1.32** *Ako želimo ispitati kvalitetu 10 proizvoda od kojih je 6 ispravnih i 4 neispravna uzimamo uzorak od tri proizvoda. Koliko uzoraka ima u kojima*

*a) nema neispravnih proizvoda*

*b) ima jedan neispravan proizvod*

*c) ima barem dva ispravna proizvoda?*

**Rješenje:** Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja.
a) Osnovni skup ima $n = 10$ elemenata; $n = n_T + n_D = 6+4$. Uzorak bez neispravnih proizvoda ima $r = r_T + r_D = 3 + 0$.
Broj uzoraka koji nemaju neispravnih proizvoda je: $C_6^{(3)} \cdot C_4^{(0)}$ =20.
b) Osnovni skup ima $n = 10$ elemenata; $n = n_T + n_D = 6+4$. Uzorak s 1 neispravnim proizvodom ima $r = r_T + r_D = 2 + 1$.
Broj uzoraka koji imaju 1 neispravni proizvod je: $C_6^{(2)} \cdot C_4^{(1)} = 60$ .
c) Osnovni skup ima $n = 10$ elemenata; $n = n_T + n_D = 6 + 4$. Uzorak s bar dva ispravna proizvoda može biti ako ima 1 ili 0 neispravna proizvoda.
Broj uzoraka s bar 2 ispravna proizvoda je:
$c) = a) + b) = C_6^{(3)} \cdot C_4^{(0)} + C_6^{(2)} \cdot C_4^{(1)} = 20 + 60 = 80$ .

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.33** *motiv*

*U skladištu je 100 proizvoda, 70 proizvoda prve klase, 20 proizvoda druge klase i 10 proizvoda treće klase. Kontrolor testira tri proizvoda i daje pozitvnu ocjenu ako su svi proizvodi prve klase. Na osnovu koliko posto svih uzoraka će kontrolor dati pozitivnu ocjenu proizvoda?*

**Rješenje:**
Broj uzoraka veličine $r = 3$ od $n = 100$ elemenata je $C_{100}^{(3)}$ =161700.
Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja.
Osnovni skup ima $n = 100 = n_1 + n_2 + n_3 = 70 + 20 + 10$ proizvoda
Uzorak prve klase ima $r = r_1 + r_2 + r_3 = 3 + 0 + 0 = 3$ proizvoda.
Broj uzoraka prve klase je: $C_{70}^{(3)} \cdot C_{20}^{(0)} \cdot C_{10}^{(0)}$ =54740.
Kontrolor će dati pozitivnu ocjenu u $\frac{54740}{161700} = 0.3385$ ili u $33,8\%$ slučajeva.

## 1.5.1 KOMBINACIJE S PONAVLJANJEM *tko želi znati više*

**MOTIV 1.9** *Na koliko načina možmo rasporediti 3 bagera (jednaki) na 6 gradilišta?*

**Definicija 1.7** *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaki r-člani podskup ($r \in \mathbb{N}$), n-članog skupa S gdje se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u r-torci nije bitan) zove se kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata.*

T: Broj svih kombinacija s ponavljanjem $r$-tog razreda od $n$ elemenata je

(i) $\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$;

(ii) $\overline{C}_n^{(r)} = C_{n+r-1}^{(r)}$;

(iii) $\overline{C}_n^{(r)} = \overline{P}_{n+r-1}(n-1, r)$.

D: *tko želi znati više*

(i) Pomoću AMI po $s = n + r - 1$ :
Neka je $M = \{s = n + r - 1 \in \mathbb{N} : \overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}, n, r \in \mathbb{N}\}$.
(B.I) Provjeravamo je li $1 \in M$.
Za $s = 1$ tj. $n + r = 1$, parametari su $r = 1$, $n = 1$. Broj 1-čl. podskupova iz skupa koji ima samo 1 element jednak je $\overline{C}_1^{(1)} = 1$. Prema formuli $\binom{n+r-1}{r} = \frac{1!}{(1-1)! \cdot 1!} = 1$ za $s = 1$; pa je $s = 1 \in M$.
(P.I) Pretpostavimo da $s = m \in M$,
tj. za $n + r - 1 = m$ vrijedi formula $\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.
(K.I) U koraku indukcije trebamo pokazati da je $s = m + 1 \in M$
tj. da za $n + r - 1 = m + 1$ vrijedi formula $\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.

($*$) Ako je $r = 1$ onda je očito broj svih 1-članih podskupova s ponavljanjem iz skupa koji ima $n = m + 1$ element jednak $\overline{C}_{m+1}^{(1)} = m + 1$. Prema formuli $\binom{n+r-1}{r} = \binom{m+1}{1} = (m + 1)$ za $n = m + 1$ i $r = 1$.
Pokazali smo da je $s = m + 1 \in M$ za $r = 1$.
($**$) Ako je $n = 1$ onda je očito broj svih $m+1$-članih podskupova s ponavljanjem iz skupa koji ima $n = 1$ element jednak $\overline{C}_1^{(m+1)} = 1$. Prema formuli $\binom{n+r-1}{r} = \binom{m+1}{m+1} = 1$ za $n = 1$ i $r = m + 1$.
Tako je $s = m + 1 \in M$ za $n = 1$.
($* * *$) U ostalim slučajevima, skup svih kombinacija s ponavljanjem možemo podijeliti na dva podskupa u kojima su kombinacije sa ponavljanjem koje sadrže fiksni element npr. $a_1$, i kombinacije sa ponavljanjem koje ne sadrže fiksni element $a_1$.

Zato je

$$\overline{C}_n^{(r)} = \overline{C}_n^{(r-1)} + \overline{C}_{n-1}^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1} + \binom{n+r-2}{r} = (P.I.) = \binom{n+r-1}{r}.$$

Pokazali smo da je $s = m + 1 \in M$ za $2 \leq r$ i $2 \leq n$.

Prema AMI zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$.

(ii) Pokazat ćemo na primjeru $n = 3$, $r = 2$ da formula vrijedi.
Neka je skup $S = \{1, 2, 3\}$. Sve kombinacije s ponavljanjem 2-og razreda od 3 elementa su (elemente smo poredali po uzlaznim vrijednostima):
{1,1} {1,2} {1,3} {2,2} {2,3} {3,3}.
Tih kombinacija ima $\overline{C}_3^{(2)}$ =6.
Definirajmo preslikavanje koje će ovim podskupovima pridijeliti podskupove dobivene tako da prvom članu podskupa dodamo 0, a drugom članu 1.

{1,1}→{1,2}
{1,2}→{1,3}
{1,3}→{1,4}
{2,2}→{2,3}
{2,3}→{2,4}
{3,3}→{3,4}.

Slike su kombinacije bez ponavljanja 2-og razreda od 4-članog skupa {1,2,3,4}. Preslikavanje je bijekcija između skupa svih kombinacija s ponavljanjem 2-razreda od 3 elementa i kombinacija 2-razreda od 4 elementa. Budući da postoji bijekcija, ti su skupovi jednakobrojni pa vrijedi $\overline{C}_3^{(2)} = C_4^{(2)} = 6$.

(ii) Uočimo da je izbor $r$ kuglica iz jedne kutije u kojoj je $n$ različitih kuglica s vraćanjem u kutiju, analogan rasporedu $r$ jednakih kuglica u $n$ različitih kutija. Svaki raspored kako se $r$ kuglica može rasporediti u $n$ kutija je kombinaciju s ponavljanjem $r$-tog razreda od $n$ elemenata. Zamislimo da imamo $n$ kutija poredanih u niz i da u njih bacamo $k$ kuglica.
Problem je sada kao da slažemo kuglice i pregrade između njih. Jedan raspored možemo gledati kao uređenu $n - 1 + r$ -torku gdje imamo $n - 1$ izbor pregrada i $r$ izbora za kuglice. Svaki takav raspored je permutacija s ponavljanjem od $n - 1 + r$ elementata od kojih jedne vrste ima $n - 1$, a druge $r$. Ukupan broj takvih permutacija s ponavljanjem ima $\overline{P}_{n-1+r}(n - 1, r)$.

**PRIMJER 1.34** *Zamislimo da imamo n=5 kutija poredanih u niz i da u njih bacamo r=9 kuglica.*
*Problem možemo razmatrati kao da slažemo kuglice i pregrade među kutijama. Imamo n-1=4 jednake pregrade i r=9 jednakih kuglica. Dakle, imamo permutacije n+r-1=13 elemenata od kojih su 4 jedne vrste i 9 druge vrste pa je njihov broj:* $\overline{P}_{13}(4, 9)$.

**PRIMJER 1.35** *Razdioba jednakih predmeta*

*Svaka razdioba r jednakih predmeta na n različitih mjesta je kombinacija s ponavljanjem r -tog razreda od n elemenata.*

*Broj razdioba je* $\overline{C}_n^{(r)}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

**PRIMJER 1.36** *motiv*

*Na koliko načina možmo rasporediti 3 bagera (jednaki) na 6 gradilišta?*

**Rješenje:** Bagere možemo rasporediti na $\overline{C}_6^{(3)} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$ načina.

**PRIMJER 1.37** *3 kuglice iste boje raspoređujemo u 6 kutija. Koliko razdioba možemo dobiti?*

**Rješenje:** $\overline{C}_6^{(3)}$.

**PRIMJER 1.38** *Uočimo da je izbor r kuglica iz jedne kutije u kojoj je n različitih kuglica s vraćanjem u kutiju ( redoslijed nije važan), analogan rasporedu r jednakih kuglica u n različitih kutija.*

**PRIMJER 1.39** *Iz kutije u kojoj je 6 kuglica različite boje izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Koliko uzoraka možemo dobiti ako redoslijed nije važan?*

**Rješenje:** $\overline{C}_6^{(3)}$.

**PRIMJER 1.40** *U prodavaonici se može kupiti 5 vrsta čarapa. Koliko različitih poklona može napraviti prodavač ako je pakirao po 9 pari?*

**Rješenje:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = 5$ vrsta čarapa.
Poklon je kombinacija s ponavljanjem 9-razreda ($r = 9$) od 5 elemenata.
Broj poklona je $\overline{C}_5^{(9)} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9} = 715$.

**PRIMJER 1.41** *Iz kutije u kojoj je šest kuglica različitih boja izvlačimo tri odjednom (bez vraćanja). Koliko takvih kombinacija možemo dobiti ako redoslijed nije važan?*

**Rješenje:** $C_6^{(3)}$.

**PRIMJER 1.42** *Iz kutije u kojoj je 6 kuglica različitih boja izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Koliko uzoraka možemo dobiti ako redoslijed nije važan?*

**Rješenje:** $\overline{C}_6^{(3)}$.

## 1.6 Ponovimo

BEZ PONAVLJANJA

| | |
|---|---|
| broj permutacija od $n$ elemenata | $P(n) = n!$ |
| broj varijacija $r-$tog razreda od $n$ elemenata | $V_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$ |
| broj kombinacija $r-$tog razreda od $n$ elemenata | $C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ |

S PONAVLJANJEM

| | |
|---|---|
| br. permutacija s pon. od $n$ el. | $\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ |
| br. varijacija s pon. $r-$tog raz. od $n$ el. | $\overline{V}_n^{(r)} = n^r$ |
| br. kombinacija s pon. $r-$tog raz. od $n$ el. | $\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$ |

IZBOR - s vraćanjem

| | |
|---|---|
| IZBOR: r-čl. uzorka iz n-čl. skupa različitih elemenata | |
| nije važan poredak | $\overline{C}_n^{(r)}$ |
| važan poredak | $\overline{V}_n^{(r)}$ |

IZBOR - bez vraćanja

| | |
|---|---|
| IZBOR: r-čl. uzoraka iz n-čl. skupa različitih elemenata | |
| nije važan poredak | $C_n^{(r)}$ |
| važan poredak | $V_n^{(r)}$ |

RAZDIOBE - proizvoljno predmeta u kutijama

| | |
|---|---|
| RAZDIOBE: r predmeta u n različitih kutija | |
| jednakih predmeta | $\overline{C}_n^{(r)}$ |
| različitih predmeta | $\overline{V}_n^{(r)}$ |

RAZDIOBE - najviše po jedan predmet u kutiji

| | |
|---|---|
| RAZDIOBE: r predmeta u n različitih kutija | |
| jednakih predmeta | $C_n^{(r)}$ |
| različitih predmeta | $V_n^{(r)}$ |

UZORCI

| UZORCI: veličine $r = r_1 + r_2 + .. + r_k$ | iz $n = n_1 + n_2 + .. + n_k$-čl. skupa |
|---|---|
| bez vraćanja | $C_{n_1}^{(r_1)} \cdot C_{n_2}^{(r_2)} \cdot \cdot C_{n_k}^{(r_k)}$ |
| s vraćanjem | $\overline{P}_r(r_1, r_2, ..., r_k) \cdot (n_1)^{r_1} (n_2)^{r_2} \cdot ... \cdot (n_k)^{r_k}$ |
| s vraćanjem $n \gg r$ | $\overline{P}_r(r_1, r_2, ..., r_k)$ |