Sadržaj

Poglavlje 11

MATEMATIČKA STATISTIKA

Matematička statistika je znanstvena disciplina koja provjerava matematičke modele slučajnog pokusa u realnosti. Proučava svojstva slučajnog uzoraka i donosi zaključke o populaciji iz koje je uzet slučajni uzorak. Statističke metode daju zaključke s nekom vjerojatnošću pa se temelje na teoriji vjerojatnosti.

Deskriptivna statistika bavi se uređivanjem prikupljenih, empirijskih podataka, njihovim grafičkim prikazivanjem i opisivanjem pomoću numeričkih vrijednosti: prosjek, standardna devijacija, korelacijski koeficijent,...

Induktivna statistika (Inferencijalna statistika)bavi se metodama koje se zasnivaju na teoriji vjerojatnosti i koje omogućavaju da se donose zaključci o populaciji pomoću uzoraka iz populacije.

Tri pravca u matematčkoj statistici (induktivnoj statististici) su:
- teorija procjene,
- teorija testiranja statističkih hipoteza,
- teorija planiranja eksperimenata.

U teoriji procjene osvnut ćemo se na:
- točkaste procjenitelje,
- metodu max vjerojatnosti za određivanje procjenitelja,*tko želi znati više*
- intervale povjerenja za procjenitelje za parametre normalne razdiobe.

U teoriji testiranja osvnut ćemo se na:
- test hipoteze o parametrima normalne razdiobe,

Teorija planiranja eksperimenta razvija metodu sekvencijalne analize, broj promatranja je slučajan, pa se provjera statstičkih hipoteza ovom metodom izvodi postepeno, u etapama. Hipoteza se može prihhvatiti, odbiti ili produžiti eksperiment.

11.1 DESKRIPTIVNA STATISTIKA

Definicija 11.1 *(POPULACIJA)*

Populacija (osnovni skup, statistički skup) je skup svih elemenata od kojih bismo mogli uzeti podatke o određenim veličinama.
Populacija može biti konačna ili beskonačna.

PRIMJER 11.1 *Populacija - sve obitelji u jednoj zgradi.*
Veličine koje možemo razmatrati: broj djece, mjesečni dohodak..

Definicija 11.2 *(STATISTIČKA VARIJABLA-OBILJEŽJE)*

Statističko obilježje (vaijabla) je numeričko svojstvo elemenata statističkog skupa.
Ako je skup vrijednosti R(X) statističkog obilježja diskretan onda za X kažemo da je diskretno obilježje, a ako je R(X) $\subseteq$ R kažemo da je kontinuirano obilježje.
Uzorak je podskup populacije koji uzimamo na unaprijed određen način.

Definicija 11.3 *(FREKVENCIJA, RELATIVNA FREKVENCIJA, KUMULATIVNA RELATIVNA FREKVENCIJA, ARITMETIČKA SREDINA,*
VARIJANCA, STANDARDNA DEVIJACIJA)

Neka je X statističko obilježje i neka se mjerenje ponovi n, konačno mnogo puta (nezavisno) i dobije n statističkih podataka x_i, $i = 1, .., n$. Slika R(X)=$\{x_k^*, k = 1, .., r\}$ sadrži r različitih statističkih podataka. Ako se x_k^* pojavi f_k puta onda kažemo da x_k^* pripada frekvencija f_k i relativna frekvencija $\frac{f_k}{n}$, za $k = 1, .., r$.
Vrijedi: $\sum\limits_{k=1}^{r} f_k = n$, $\sum\limits_{k=1}^{r} \frac{f_k}{n} = 1$.
Za $x \in R$ kažemo da ima kumulativnu relativnu frekvenciju $F_n(x)$=$\sum\limits_{k,\, x_k \leq x} \frac{f_k}{n}$.
Aritmetička redina n statističkih podataka x_i, $i = 1, .., n$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} x_k^* f_k.$$

Varijanca n statističkih podataka x_i, $i = 1, .., n$:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2,$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}(x_k^* - \overline{x})^2 f_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}(x_k^*)^2 f_k - \overline{x}^2.$$

Standardna devijacija je $\widehat{\sigma}$.

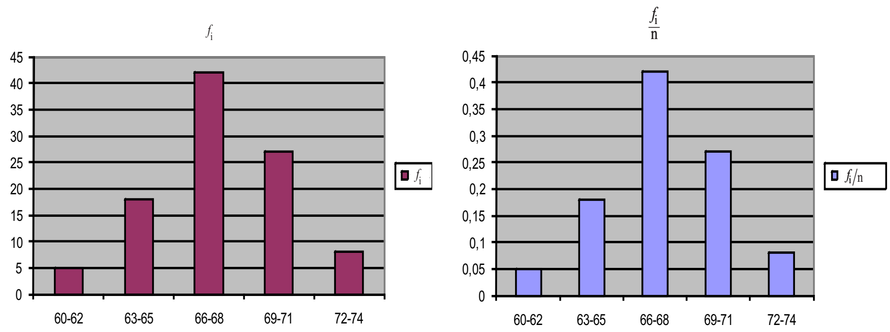
Statističke podatke koji se dobiju mjerenjem statističkog obilježja X možemo prikazati:
tablično: tablicom frekvencija i tablicom relativnih frekvencija,
grafički: grafikonom frekvencija, relativnih frekvencija, kumulativnih frekvencija,
histogramom (nad dobivenim podacima x_k^* nacrtani su pravokutnici visine jednake frekvenciji $f_k$ili relativnoj frekvenciji $\frac{f_k}{n}$),
poligonom (izlomljena linija koja spaja točke (x_k^*, f_k)).
Ako je n veliki i skup vrijednosti ima veliki broj elemenata (posebno kod kontinuirane slučajne varijable-statističkog obilježja) formiramo r razreda. Prilikom tabličnog i grafičkog prikazivanja vrijednosti slučajnog uzorka na apscisu nanosimo r podintervala (razreda), sa sredinama razreda x_{ksr}^*, a na ordinatu sumu frekvencija f_k elemenata iz tog razreda.
Broj razreda r ponekad se računa po formulama: $r = \sqrt{n}$, $r = 2\sqrt[3]{n}$.
U praksi se koristi slijedeća shema za izbor broja razreda:

n	r
40-60	6-8
60-100	7-10
100-200	8-12
200-500	12-17
> 500	21

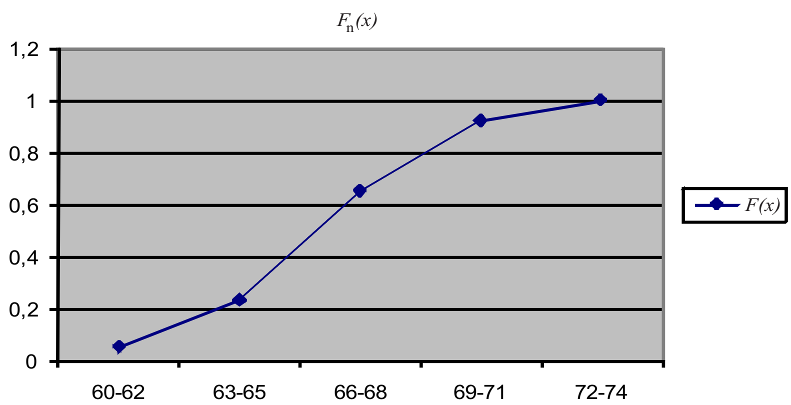
PRIMJER 11.2 *Mjerenjem kontinuirane slučajne varijable X= prosječne težine studenata jednog turnusa na uzorku veličine 100 dobivena je vrijednost slučajnog uzorka* $(x_1, x_2, ..., x_{100})$ *dana u tablici:*

razred	x_{ksr}^*	f_k	$\frac{f_k}{n}$	$F_n(x)$
60-62	*61*	*5*	*0,05*	*0,05*
63-65	*64*	*18*	*0,18*	*0,23*
66-68	*67*	*42*	*0,42*	*0,65*
69-71	*70*	*27*	*0,27*	*0,92*
72-74	*73*	*8*	*0,08*	*1,00*
ukupno		*n=100*	*1,00*	

Relativne frekvencije odgovaraju pojmu statističke vjerojatnosti.
$P(66 < X < 68) \approx 0,42$



Slika 11.1: Histogrami frekvencija i relativnih frekvencija iz primjera 11.2.



Slika 11.2: Graf kumulativnih relativnih frekvencija iz primjera 11.2.

Definicija 11.4 *(STATISTIČKA RAZDIOBA)*

Statističko obilježje (slučajna varijabla) X sa skupom vrijednosti R(X) opisano grafom relativnih frekvencija ili grafom kumulativnih relativnih frekvencija ima statističku funkciju distribucije $F_n(x)$. *Slučajna varijabla X ima i teorijsku funkciju distribucije* $F(x)$.

TEOREM 11.1 *(GLIVENKO)*

Ako su vrijednosti u uzorku slučajne varijable X (statističkog obilježja) nezavisni, onda je

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \|F_n(x) - F(x)\| \to 0\right) = 1, \quad \textit{kad } n \to \infty.$$

Kad je uzorak dovoljno velik, onda se s vjerojatnošću skoro 1 statistička razdioba malo razlikuje od teorijske razdiobe.

Definicija 11.5 *(Kvantil, medijan, prvi kvartil, treći kvartil)*
Ako je F funkcija distribucije slučajne varijable X onda se rješenje jednadžbe $F(x_p) = p$ *zove kvantil reda p.*
Medijan $Me = x_{0.5}$; $F(Me) = 0.5$ *tj.* $P(X \le Me) = 0.5$
Prvi kvartil $Q_1 = x_{0.25}$; $F(Q_1) = 0.25$ *tj.* $P(X \le Q_1) = 0.25$
Drugi kvartil $Q_2 = x_{0.5} = Me$
Treći kvartil $Q_3 = x_{0.75}$; $F(Q_3) = 0.75$ *tj.* $P(X \le Q_3) = 0.75$

PRIMJER 11.3 *Računanje medijana statističkog obilježja X:*
(A) Ako je niz statističkih podataka, vrijednosti nekog statističkog obilježja X rastući $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, *onda je*

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \textit{za } n \textit{ neparan;} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \textit{za } n \textit{ paran.} \end{cases}$$

PRIMJER 11.4 *Odredite medijan za zadani niz statističkih podataka*
3 4 4 5 6 8 8 8 10, n=9, neparan.
$Me = x_{\frac{n+1}{2}} = x_5 = 6.$

PRIMJER 11.5 *Računanje medijana statističkog obilježja X:*
(B) Ako su vrijednosti statističkog obilježja date u razredima s odgovarajućim frekvencijama f_i *onda je*

$$Me = L_{Me} + d \cdot \frac{\frac{n}{2} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}},$$

gdje je k izabran tako da je

$$F_k' = (f_1 + f_2 + ... + f_k) \le \frac{n}{2} \le f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1} = F_{k+1}',$$

L_{Me} *je lijevi rub* $k+1$ *razreda, d je širina razreda.*

PRIMJER 11.6 *Računanje prvog kvartila statističkog obilježja X:*
(A) Ako je niz statističkih podataka, vrijednosti nekog statističkog obilježja X rastući $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$*, onda je*

$$Q_1 = \begin{cases} x_{cijelo(\frac{n}{4}+1)}, & za\ n\ nije\ djeljiv\ s\ 4; \\ \dfrac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2}, & za\ n\ djeljiv\ s\ 4. \end{cases}$$

PRIMJER 11.7 *Odredite prvi kvartil za niz statističkih podataka*
3 4 4 5 6 8 8 8 10, $n = 9$*, nije djeljiv s 4.*
$Q_1 = x_{cijelo(\frac{n}{4}+1)} = x_3 = 4.$

PRIMJER 11.8 *Računanje prvog kvartila statističkog obilježja X:*
(B) Ako su vrijednosti statističkog obilježja date u razredima s odgovarajućim frekvencijama f_i *onda je*

$$Q_1 = L_{Q_1} + d \cdot \frac{\frac{n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}},$$

gdje je k izabran tako da je

$$F_k^{'} = (f_1 + f_2 + ... + f_k) \leq \frac{n}{4} \leq f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1} = F_{k+1}^{'},$$

L_{Q_1} *je lijevi rub* $k + 1$ *razreda, d je širina razreda.*

PRIMJER 11.9 *Računanje trećeg kvartila:*
(A) Ako je niz statističkih podataka, vrijednosti nekog statističkog obilježja X rastući $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$*, onda je*

$$Q_3 = \begin{cases} x_{cijelo(\frac{3n}{4}+1)}, & za\ n\ nije\ djeljiv\ s\ 4; \\ \dfrac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2}, & za\ n\ djeljiv\ s\ 4. \end{cases}$$

PRIMJER 11.10 *Odredite treći kvartil niz statističkih podataka*
3 4 4 5 6 8 8 8 10, $n = 9$*, nije djeljiv s 4.*
$Q_3 = x_{cijelo(\frac{3n}{4}+1)} = x_7 = 8.$

PRIMJER 11.11 *Računanje trećeg kvartila:*
(B) Ako su vrijednosti statističkog obilježja date u razredima s odgovarajućim frekvencijama f_i *onda je*

$$Q_3 = L_{Q_3} + d \cdot \frac{\frac{3n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}},$$

gdje je k izabran tako da je

$$F'_k = (f_1 + f_2 + ... + f_k) \leq \frac{3n}{4} \leq f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1} = F'_{k+1},$$

L_{Q_3} *je lijevi rub* $k+1$ *razreda, d je širina razreda.*

Definicija 11.6 *(MOD)*
Mod je vrijednost statističkog obilježja koja ima najveću frekvenciju. Može se dogoditi da mod ne postoji ili da postoji više modova.

PRIMJER 11.12 *Odredite mod niza statističkih podataka*
3 4 4 5 6 8 8 8 10.

x_i	f_i
3	1
4	2
5	1
6	1
8	3
10	1

$x_i = 8$ *ima maksimalnu frekvenciju* $f_i = 3$, $Mo = 8$.

PRIMJER 11.13 *Računanje moda:*
Ako su vrijednosti statističkog obilježja date u razredima s odgovarajućim frekvencijama f_i *onda je*

$$Mo = L_{Mo} + d \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2},$$

gdje je k izabran tako da je f_k *maksimalan,* L_{Mo} *je lijevi rub* $k-$*tog razreda, d je širina razreda,* $\Delta_1 = f_k - f_{k-1}$, $\Delta_2 = f_k - f_{k+1}$.

Definicija 11.7 *(koeficijent varijacije)*
Koeficijent varijacije je relativna mjera standardne devijacija i računa se na dva načina $K_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$ *ili pomoću kvartila* $K_V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$.

Definicija 11.8 *(koeficijent asimetrije-eng. skewness)*
Koeficijent asimetrije za slučajnu varijablu X je broj K_A *koji karakterizira simetriju razdiobe i definira se kao kvocijent trećeg centralnog momenta i kuba standardne devijacije* σ :

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Definicija 11.9 *Koeficijent asimetrije statističkog obilježja X, ako su vrijednosti statističkog obilježja date kao niz x_i^* s frekvencijama f_i, $i = 1, ..., r$, definira se kao*

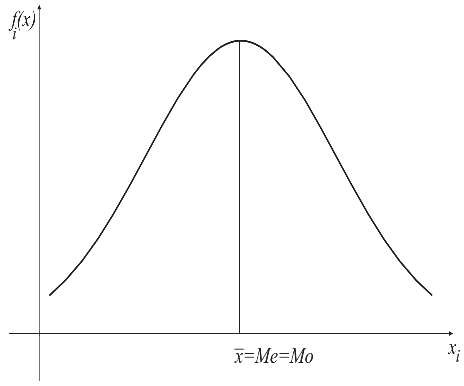
$$K_A = \frac{\widehat{\mu_3}}{\widehat{\sigma^3}},$$

gdje je

$$\widehat{\mu_3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_{isr}^* - \overline{x})^3 f_i, \quad (\sum_{i=1}^{r} f_i = n);$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_{isr}^* - \overline{x})^2 f_i, \quad (\sum_{i=1}^{r} f_i = n).$$

NAPOMENA 11.1 *Ako je $K_A = 0$ onda je razdioba frekvencija simetrična u odnosu na pravac $x = \overline{x}$ onda se poklapaju $\overline{x} = Me = Mo$. (Normalna razdioba ima $K_A = 0$)*



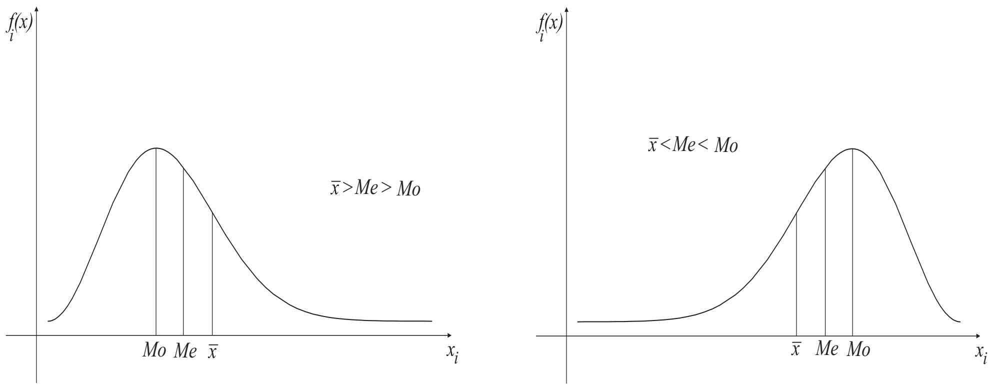
Ako je $K_A > 0$ onda je razdioba frekvencija asimetrična u odnosu na pravac $x = \overline{x}$, asimetrija je pozitivna i vrijedi $\overline{x} > Me > Mo$.
Ako je $K_A < 0$ onda je razdioba frekvencija asimetrična u odnosu na pravac $x = \overline{x}$, asimetrija je negativna i vrijedi $\overline{x} < Me < Mo$.

Definicija 11.10 *(koeficijent spljoštenosti (eksces)-engl. kurtosis)*
Koeficijent spljoštenosti slučajne varijable X je broj K_E koji karakterizira zaobljenost razdiobe i definira se kao pomoću kvocijenta četvrtog centralnog momenta i četvrte potencije standardne devijacije σ :

$$K_E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Definicija 11.11 *Koeficijent spljoštenosti statističkog obilježja X, ako su vrijednosti statističkog obilježja date kao niz x_i^* s frekvencijama f_i, $i = 1, ..., r$, definira se kao*

$$K_E = \frac{\widehat{\mu_4}}{\widehat{\sigma^4}} - 3,$$

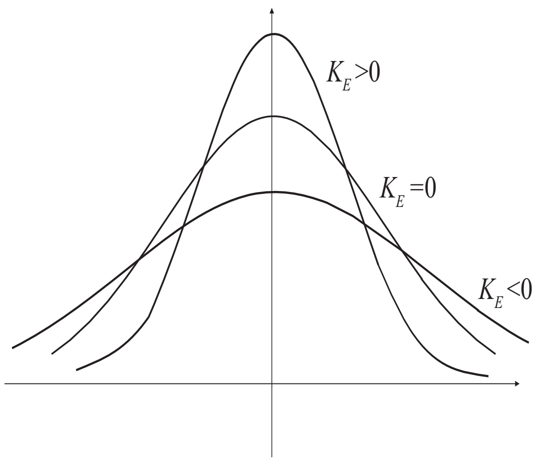


gdje je

$$\widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_{isr}^{*} - \overline{x})^4 f_i, \quad (\sum_{i=1}^{r} f_i = n);$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_{isr}^{*} - \overline{x})^2 f_i, \quad (\sum_{i=1}^{r} f_i = n).$$

NAPOMENA 11.2 *Ako je $K_E = 0$ onda je razdioba frekvencija normalna razdioba. (Normalna razdioba ima $K_E = 0$)*
Ako je $K_E > 0$ onda je graf funkcije razdiobe frekvencija uži od grafa normalne razdiobe (spljoštenost je manja).
Ako je $K_E < 0$ onda je graf funkcije razdioba frekvencija širi od normalne razdiobe (spljoštenost je veća).



Slika 11.3: Spljoštenost

PRIMJER 11.14 *Mjerenjem kontinuirane slučajne varijable X= prosječne težine studenata jednog turnusa na uzorku veličine 100 dobivena je vrijednost slučajnog uzorka* $(x_1, x_2, ..., x_{100})$ *dana u tablici:*

razred	x^*_{isr}	f_i	F'_i	$\frac{f_i}{n}$	$F_n(x)$
60-62	*61*	*5*	*5*	*0,05*	*0,05*
63-65	*64*	*18*	*23*	*0,18*	*0,23*
66-68	*67*	*42*	*65*	*0,42*	*0,65*
69-71	*70*	*27*	*92*	*0,27*	*0,92*
72-74	*73*	*8*	*100*	*0,08*	*1,00*
ukupno		*n=100*		*1,00*	

Odrediti očekivanje, varjancu, standardnu devijaciju, mod, medijan, prvi kvartil, treći kvartil, koeficijent varijacije, koeficijent asimetrije, koeficijent spljoštenosti.
NAPOMENA: Razredi su u tablici dati smbolično npr. razred $60-62$ *je razred* $59.5-62.5$ *tako da je širina razreda* $d = 3$.

Rješenje:

očekivanje $\overline{x} = \dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{5} x^*_{isr} f_i = 67.45$

varijanca $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x^*_{isr} - \overline{x})^2 f_i = 8.527$

medijan $Me = L_{Me} + d \cdot \dfrac{\frac{n}{2} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}}$, gdje je $k+1 = 3$ izabran tako da je $F'_k = f_1 + f_2 = 23 \le \dfrac{n}{2} = 50 \le f_1 + f_2 + f_3 = 65 = F'_{k+1}$,
$L_{Me} = 65.5$ je lijevi rub $k+1 = 3$. razreda, $d = 3$ je širina razreda.

$$Me = L_{Me} + d \cdot \frac{\frac{n}{2} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}} = 65.5 + 3 \cdot \frac{50 - 23}{42} = 67.4.$$

prvi kvartil $Q_1 = L_{Q_1} + d \cdot \dfrac{\frac{n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}}$, gdje je $k+1 = 3$ izabran tako da je $F'_k = f_1 + f_2 = 23 \le \dfrac{n}{4} = 25 \le f_1 + f_2 + f_3 = 65 = F'_{k+1}$,
$L_{Q_1} = 65.5$ je lijevi rub $k+1 = 3$. razreda, $d = 3$ je širina razreda.

$$Q_1 = L_{Q_1} + d \cdot \frac{\frac{n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}} = 65.5 + 3 \cdot \frac{25 - 23}{42} = 65.643$$

treći kvartil $Q_3 = L_{Q_3} + d \cdot \dfrac{\frac{3n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}}$, gdje je $k+1 = 4$ izabran tako da

je $F_k^{'} = f_1 + f_2 + f_3 = 65 \leq \frac{3n}{4} = 75 \leq f_1 + f_2 + f + f_4 = 92 = F_{k+1}^{'}$,
$L_{Q_3} = 68.5$ je lijevi rub $k + 1 = 4$. razreda, $d = 3$ je širina razreda.

$$Q_3 = L_{Q_3} + d \cdot \frac{\frac{3n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)}{f_{k+1}} = 68.5 + 3 \cdot \frac{75 - 65}{27} = 69.611.$$

mod $Mo = L_{Mo} + d \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$, gdje je $k = 3$ izabran tako da je $f_k = 42$ maksimalan, $L_{Mo} = 65.5$ je lijevi rub $k = 3$. razreda, $d = 3$ je širina razreda, $\Delta_1 = f_k - f_{k-1} = f_3 - f_2 = 42 - 18$, $\Delta_2 = f_k - f_{k+1} = f_3 - f_4 = 42 - 27$.

$$Mo = L_{Mo} + d \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 65.5 + 3 \cdot \frac{24}{24 + 15} = 67.346.$$

koeficijent varijacije $K_V = \frac{\widehat{\sigma}}{\overline{x}} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{8.527}}{67.45} \cdot 100\% = 4.32\%$
$K_V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{69.611 - 65.643}{69.611 + 65.643} = 2.933\,7 \times 10^{-2}$
koeficijet asimetrije i spljoštenosti $\widehat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} (x_{isr}^{*} - \overline{x})^3 f_i = -2.293$

$\widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} (x_{isr}^{*} - \overline{x})^4 f_i = 199.37$

$$K_A = \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} = -0.14, \quad K_E = \frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}^4} - 3 = -0.26$$

11.2 Ponovimo

STATISTIČKO OBILJEŽJE

statističko obilježje	X
vrijednosti stat. obilježja	$x_1, x_2, ..., x_n$
r različitih vrijednosti	$x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$
frkvencije	$f_1^*, f_2^*, ..., f_r^*$
relativne frkvencije	$\frac{f_1^*}{n}, \frac{f_2^*}{n}, ..., \frac{f_r^*}{n}$
kumulativne rel. frkvencije	$F_n(x) = \frac{f_1^*}{n} + \frac{f_2^*}{n} + ... + \frac{f_j^*}{n}$
	j takav da je $x \leq x_j^*$
statistička razdioba za X st. obilj.	$F_n(x)$
teorijska razdioba za sl. var.X	$F(x)$
$F_n(x) \to F(x)$	po vjerojatnosti kad $n \to \infty$

MJERE POLOŽAJA

vrijednosti stat. obilj.	ARITMETIČKA SREDINA
$x_1, x_2, ..., x_n$	$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$
$x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$	$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} x_j^* \cdot f_j^*$
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r;\ x_{jsr}$	$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} x_{jsr}^* \cdot f_j^*$

vrijednosti stat. obilj.	MOD
$x_1, x_2, ..., x_n$	x_k ako je je $f_k max$
$x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$	x_k^* ako je je $f_k^* max$
$x_{1sr}, x_{2sr}, ..., x_{rsr}$	x_{ksr}^* ako je je $f_k^* max$
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r$	$Mo = L_{Mo} + d \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2},$
k	ako je f_k max
L_{Mo}	lijevi rub k razreda L_k,
d	širina razreda
Δ_1	$f_k - f_{k-1}$
Δ_2	$f_k - f_{k+1}$

vrijednosti stat. obilj.	MEDIJAN
$x_1, x_2, ..., x_n$ uzlazan niz	$Me = x_{\frac{n+1}{2}}$, za n neparan;
$x_1, x_2, ..., x_n$ uzlazan niz	$Me = \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$, za n paran;
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r$	$Me = L_{Me} + d \cdot \frac{1}{f_{k+1}} \cdot \left(\frac{n}{2} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)\right)$
k	$f_1 + f_2 + ... + f_k \leq \frac{n}{2} \leq f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1}$
L_{Me}	lijevi rub $k+1$ razreda L_{k+1},
d	širina razreda.

KVANTILI

kvantil reda p	x_p takav da je $F(x_p) = p$
prvi kvartil	$Q_1 = x_{\frac{1}{4}}$
drugi kvartil= MEDIJAN	$Me = x_{\frac{1}{2}}$
treći kvartil	$Q_3 = x_{\frac{3}{4}}$

vrijednosti stat. obilj.	Q_1
$x_1, x_2, ..., x_n$ uzlazan niz	$Q_1 = x_{cijelo(\frac{n}{4}+1)}$, za n nije djeljiv s 4;
$x_1, x_2, ..., x_n$ uzlazan niz	$Me = \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{n}} + x_{\frac{n}{4}+1})$, za n djeljiv s 4;
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r$	$Q_1 = L_{Q_1} + d \cdot \frac{1}{f_{k+1}} \cdot \left(\frac{n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)\right)$
k	$f_1 + f_2 + ... + f_k \leq \frac{n}{4} \leq f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1}$
L_{Q_1}	lijevi rub $k+1$ razreda L_{k+1},
d	širina razreda.

vrijednosti stat. obilj.	Q_3
$x_1, x_2, ..., x_n$ uzlazan niz	$Q_3 = x_{cijelo(\frac{3n}{4}+1)}$, za n nije djeljiv s 4;
$x_1, x_2, ..., x_n$ uzlazan niz	$Me = \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{3n}{n}} + x_{\frac{3n}{4}+1})$, za n djeljiv s 4;
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r$	$Q_3 = L_{Q_3} + d \cdot \frac{1}{f_{k+1}} \cdot \left(\frac{3n}{4} - (f_1 + f_2 + ... + f_k)\right)$
k	$f_1 + f_2 + ... + f_k \leq \frac{3n}{4} \leq f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1}$
L_{Q_3}	lijevi rub $k+1$ razreda L_{k+1},
d	širina razreda.

MJERE RASIPANJA

vrijednosti stat. obilj.	VARIJANCA
$x_1, x_2, ..., x_n$	$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) - \overline{x}^2$
$x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$	$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_j^*)^2 \cdot f_j^* - \overline{x}^2$
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r; x_{jsr}$	$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_{jsr}^*)^2 \cdot f_j^* - \overline{x}^2$

vrijednosti stat. obilj.	$\widehat{\mu_3}$
$x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$	$\widehat{\mu_3} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_j^* - \overline{x}^2)^3 \cdot f_j^*$
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r;\ x_{jsr}$	$\widehat{\mu_3} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_{jsr}^* - \overline{x}^2)^3 \cdot f_j^*$

vrijednosti stat. obilj.	$\widehat{\mu_4}$
$x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$	$\widehat{\mu_4} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_j^* - \overline{x}^2)^4 \cdot f_j^*$
r razreda $[L_j, D_j],\ j = 1, ...r;\ x_{jsr}$	$\widehat{\mu_4} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_{jsr}^* - \overline{x}^2)^4 \cdot f_j^*$

MJERE OBLIKA

koeficijent asimetrije	$K_A = \frac{\widehat{\mu_3}}{\widehat{\sigma^3}}$
koeficijent spljoštenosti	$K_E = \frac{\widehat{\mu_4}}{\widehat{\sigma^4}} - 3$