Sadržaj

Poglavlje 13

INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE

Definicija 13.1 *(KVANTIL)*

Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F(x)$i neka je zadan $q \in (0,1)$. Broj z_q zove se kvantil distribucije F ako vrijedi $F(z_q) = q$.

Definicija 13.2 *(INTERVAL POVJERENJA POUZDANOSTI γ)*

Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable X koja ima poznatu distribuciju s nepoznatim parametrom t i neka je zadana pouzdanost $\gamma \in (0,1)$.
Za procjenitelje $G_1 = h_1(X_1, X_2, ..X_n)$ i $G_2 = h_2(X_1, X_2, ..X_n)$ za parametar t kažemo da čine interval povjerenja (G_1, G_2) za parametar t s pouzdanošću γ ako vrijedi: $P(G_1 < t < G_2) \geq \gamma$.
Parametar t poprimit će vrijednosti unutar intervala (g_1, g_2) s puzdanošću γ, gdje je $g_1 = h_1(x_1, x_2, ..x_n)$, $g_2 = h_2(x_1, x_2, ..x_n)$.

13.1 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE ako je veliki uzorak $n \to \infty$

MOTIV 13.1 *Slučajni uzorak od 50 studenata za broj bodova (max 100 bodova) iz VIS-a od ukupno 200 studenata ove generacije pokazuje uzoraču aritmetičku sredinu 75 i korigiranu uzoračku standardnu devijaciju 10.*
(a) Odredite interval povjerenja za očekivani broj bodova iz VIS-a za ovu genaraciju studenata s pouzdanošću 95%.
(b) Kolika je pouzdanost da će interval povjerenja za očekivani broj bodova biti $[74, 76]$?
(c) Odredite interval povjerenja za očekivani broj bodova iz VIS-a s pouzdanošću 95% *ako je ovo bio uzorak iz podataka za sve generacije studenata koje je nastavnik vodio.*

TEOREM 13.1 *Neka je* $(X_1, X_2, ..X_n)$ *slučajni uzorak slučajne varijable* X *koja ima poznatu distribuciju s nepoznatim parametrom očekivanje* μ *i poznatom varijancom* σ^2 *(ili poznatom korigiranom uzoračkom varijancom* $\widehat{s}^2$*).*
Ako je veliki uzorak $(n \to \infty)$ *onda inerval povjerenja* (G_1, G_2) *za parametar očekivanje* μ *s pouzdanošću* γ *čine procjenitelji*

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad i \quad G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

ili

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \quad i \quad G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}},$$

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Dokaz: *tko želi znati više*

Prema Centralnom graničnom teormu za aritmetčku sredinu

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1), \qquad n \to \infty.$$

Primijenimo CGT na simetrični interval $(-\lambda, \lambda)$:
$P(-\lambda < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda) \approx F^*(\lambda) - F^*(-\lambda) = 2F^*(\lambda) - 1$
tj.
$P(\overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 2F^*(\lambda) - 1.$

Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \mu < G_2) = \gamma$, onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F^*(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$ tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Zaključujemmo da je za velike n $P(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma$.

Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ čine interval povjerenja

$$(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

za parametar očekivanja μ slučajne varijable X s puzdanošću γ ako je poznata varijanca σ^2.

Parametar očekivanja μ s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu $(\overline{x} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 13.1 *Ova procjena parametra očekivanja slučajne varijable može se koristi u zadacima za određivanje*
(a) $\delta = 2\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *širine inervala*
(b) $n = 4\lambda^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}$ *minimalne veličine uzorka*
uz zadanu pozdanost γ *za interval povjerenja* $(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, *gdje je* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 13.2 *(uzorak bez vračanja u konačnoj populaciji)*

Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ *slučajni uzorak slučajne varijable X koja ima poznatu distribuciju s nepoznatim parametrom očekivanje* μ *i poznatom varijancom* σ^2 *(ili poznatom korigiranom uzoračkom varijancom* $\widehat{s^2}$*).*
Neka je uzet uzorak bez vraćanja iz konačne populacije veličine N. Ako je veliki uzorak $(n \to \infty)$, $(\ n \leq 30)$ *onda interval povjerenja* (G_1, G_2) *za parametar očekivanja* μ *s puzdanošću* γ *čine procjenitelji*

$$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

$$G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

ili

$$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

$$G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 13.1 *motiv*

Slučajni uzorak od 50 studenata za broj bodova (max 100 bodova) iz VIS-a od ukupno 200 studenata ove generacije pokazuje uzoraču aritmetičku sredinu 75 i korigiranu uzoračku standardnu devijaciju 10.
(a) Odredite interval povjerenja za očekivani broj bodova iz VIS-a za ovu genaraciju studenata s pouzdanošću 95%.
(b) Kolika je pouzdanost da će interval povjerenja za očekivani broj bodova biti $[74, 76]$*?*
(c) Odredite interval povjerenja za očekivani broj bodova iz VIS-a s pouzdanošću 95% *ako je ovo bio uzorak iz podataka za sve generacije studenata koje je nastavnik vodio.*

Rješenje: Pretpostavljamo da je X slučajna varijabla (statističko obilježe) broj bodova na ispitu iz VIS-a.
Prema prethodnoj napomeni odredit ćemo interval povjerenja za očekivanje ako je veličina uzorka velika $n > 30$ za konačnu populaciju $N = 200$ pri uzorku bez vraćanja.

Iz zadatka iščitavamo podatke: $\widehat{s} = 10$, $N = 200$, $n = 50$, $\overline{x} = 75$.

(a) Za pouzdanost $\gamma = 0.95$ koeficijent $\lambda = 1.96$.

$$g_1 = \overline{x} - \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 75 - 2.4,$$

$$g_2 = \overline{x} + \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 75 + 2.4$$

Uz pouzdanost 95% broj bodova za kolegij VIS za studente ove generacije je unutar intervala $[75 - 2.4, 75 + 2.4]$.

(b) Ako je širina intervala $\delta = 2$ onda je

$$\delta = 2\lambda \cdot \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 2$$

pa je $2\lambda \cdot 1.23 = 2$ Dobili smo vrijednost $\lambda = 0.81$.
Veza λ i γ dana izrazom $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$. Kako je kvantil $z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 0.81$ iz tablice za normalnu razdiobu očitamo da je $F(0.81) = 0.791$.
Pouzdanost γ određujemo iz izraza $\frac{1+\gamma}{2} = 0.791$
Tražena puzdanost je $\gamma = 0.582$.

Uz pouzdanost 58.2% broj bodova za kolegij VIS u populaciji ove generacije je unutar intervala $[75 - 1, 75 + 1]$.

(c) U ovom slučaju imamo veliku populaciju pa je interval povjerenja (G_1, G_2) za parametar očekivanja μ s puzdanošću γ

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \;\; G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

gdje je $\overline{X}$ uzoračka aritmetička sredina, a $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^{*}(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Za pouzdanost $\gamma = 0.95$ koeficijent $\lambda = 1.96$.

$$g_1 = \overline{x} - \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} = 75 - 2.77$$

$$g_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} = 75 + 2.77$$

Uz pouzdanost 95% broj bodova za kolegij VIS u cjelokupnoj populaciji je unutar intervala $[75 - 2.77, 75 + 2.77]$.

13.2 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE NORMALNE distribucije ako je varijanca poznata

MOTIV 13.2 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznatog očekivanja i poznate varijance $\sigma^2 = 0.64$. Koliki minimalni uzorak treba uzeti da bi greška procjene očekivanja μ bila najviše jednaka 0.5, uz pouzdanost $\gamma = 0.95$?*

TEOREM 13.2 *Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s nepoznatim parametrom očekivanje μ i poznatom varijancom σ^2. Interval povjerenja (G_1, G_2) za parametar očekivanja μ s puzdanošću γ čine procjenitelji*

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \;\; G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

gdje je $\overline{X}$ uzoračka aritmetička sredina, a $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Dokaz: *tko želi znati više*

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, a $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.
Na simetričnom intervalu $(-\lambda, \lambda)$:
$P(-\lambda < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda) = F^*(\lambda) - F^*(-\lambda) = 2F^*(\lambda) - 1$
tj.
$P(\overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2F^*(\lambda) - 1.$
Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \mu < G_2) = \gamma$, onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F^*(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$ tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ je kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ čine interval povjerenja

$$(\overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \; \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

za parametar očekivanja μ slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s pouzdanošću γ ako je poznata varijanca σ^2.
Parametar očekivanja μ s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(\overline{x} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^{*}(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 13.3 *Ova procjena parametra očekivanja slučajne varijable* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *poznate varijance, može se koristi u zadacima za određivanje*
(a) $\delta = 2\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *širine inervala*
(b) $n = 4\lambda^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}$ *minimalne veličine uzorka*
uz zadanu pozdanost γ *za interval povjerenja* $(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, *gdje je* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^{*}(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 13.4 *Kvantili za standardnu normalnu distribuciju*
$F^{*}(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.90	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.95	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	1.65	1.96	2.58

PRIMJER 13.2 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju*
$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 0.64)$. *Uzet je uzorak veličine* $n = 5$ *i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine* $\overline{x} = 10.2$. *Odredite interval povjerenja za očekivanje slučajne varijable s pouzdanošću* $\gamma = 0.95$.

Rješenje: $P(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma$.
Za očekivanje μ interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\overline{X} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka $n = 5$, $\overline{x} = 10.2$ dobivamo interval povjerenja za μ :

$$(\overline{x} - \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (10.2 - 1.96 * \frac{0.8}{\sqrt{5}}, 10.2 + 1.96 * \frac{0.8}{\sqrt{5}}) = (9.49, 10.90).$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 13.3 *motiv*

Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *nepoznatog očekivanja i poznate varijance* $\sigma^2 = 0.64$. *Koliki minimalni uzorak treba uzeti da bi greška procjene očekivanja* μ *bila najviše jednaka 0.5, uz pouzdanost* $\gamma = 0.95$?

Rješenje: $n = 4\lambda^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2} = \lambda^2 \frac{\sigma^2}{greska^2}$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne, $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$.

$$n = 1.96^2 * \frac{1}{0.5^2} * 0.64 = 9.8345.$$

13.3 INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE NORMALNE distribucije ako je varijanca nepoznata

MOTIV 13.3 *U četiri mjerenja Rockwellove tvrdoće jedne ploče radnici du dobili sljedeće vrijednosti:*
64.9, 64.1, 63.8, 64.0.
Odredite interval povjerenja za očekivanu vrijednost tvrdoće s pouzdanošću 99%.

TEOREM 13.3 *Neka je* $(X_1, X_2, ..X_n)$ *slučajni uzorak slučajne varijable* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *s nepoznatim parametrom očekivanje* μ *i nepoznatom varijancom* σ^2.
(i) Interval povjerenja (G_1, G_2) *za parametar očekivanja* μ *s pouzdanošću* γ *čine procjenitelji :*

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} \;\; i \;\; G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}},$$

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina,* $\widehat{S}^2$ *korigirana uzoračka varijanca, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil sudentove distribucije* $t(n-1)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
(ii) Interval povjerenja (G_1, G_2) *za parametar očekivanja* μ *s pouzdanošću* γ *čine procjenitelji:*

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\widehat{\Sigma}}{\sqrt{n-1}}, \;\; G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\widehat{\Sigma}}{\sqrt{n-1}},$$

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina,* $\widehat{\Sigma}^2$ *uzoračka varijanca, a* $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil studentove distribucije* $t(n-1)$.

Dokaz: *tko želi znati više*

(i) Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $Y = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\widehat{S}} \sim t(n-1)$.
Na simetričnom intervalu $(-\lambda, \lambda)$:
$P(-\lambda \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\widehat{S}} \leq \lambda) = F(\lambda) - F(-\lambda) = 2F(\lambda) - 1$
tj.
$P(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}) = 2F(\lambda) - 1.$
Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \mu < G_2) = \gamma$, onda možemo odrediti λ tako da

vrijedi $F(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$ tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Procjenitelji

$$G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}$$

čine interval povjerenja

$$(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}})$$

za parametar očekivanja μ slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s puzdanošću γ ako je nepoznata varijanca σ^2.
Parametar očekivanja μ s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u intervalu

$$(\overline{x} - \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}),$$

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije
$F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Ako je tablica studentove distribucije $Y \sim t(n-1,)$ dana u obliku
$P(|Y| > \varepsilon) = p$, onda λ tražimo tako da je $P(|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\widehat{S}}| < \lambda) = \frac{1-\gamma}{2}$.
(ii) Koristimo vezu $\widehat{S}^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{\Sigma}^2$.

NAPOMENA 13.5 *Širina intervala povjerenja za očekivanje slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance je*

$$\delta = 2\lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}$$

uz zadanu pozdanost γ, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 13.6 *Kvantili za studentovu distribuciju za $n = 5$, $t(4)$,*
$F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	2.78	4.60

PRIMJER 13.4 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju*
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2. Uzet je utorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 10.2$, i vrijednost korigirane uzoračke varijance $\widehat{s^2} = 0.64$. Odredite interval povjerenja za očekivanje slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.

Rješenje: $P(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}) = \gamma$.
Za očekivanje μ interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$.
Za n=5, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ je kvantil studentove distribucije $t(4)$.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 2.78$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\overline{x} = 10.2$, i $\widehat{s^2} = 0.64$ dobivamo interval povjerenja za μ :

$$(\overline{x} - \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}) = (10.2 - 2.78 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{5}}, 10.2 + 2.78 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{5}}) = (9.20, 11.19).$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 13.5 *motiv*

U četiri mjerenja Rockwellove tvrdoće jedne ploče radnici du dobili sljedeće vrijednosti: $64.9, 64.1, 63.8, 64.0$.
Odredite interval povjerenja za očekivanu vrijednost tvrdoće s pouzdanošću 99%.

Rješenje: Za zadanu pouzdanost $\gamma = 0.99$ interval povjerenja za očekivanje određujemo iz
$P(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}) = \gamma$.
Za očekivanje μ interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}})$, gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil studentove distribucije $t(n-1)$.
Za $n = 4$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ je kvantil studentove distribucije $t(3)$.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.99$, vrijednost $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 5.84$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\overline{x} = 64.2$, i $\widehat{s^2} = 0.233$ dobivamo interval povjerenja za μ :

$$(\overline{x} - \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \lambda\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}) = (64.2 - 5.84 \cdot \frac{0.482}{\sqrt{4}}, 64.2 + 5.84 \cdot \frac{0.482}{\sqrt{4}}) = (64.2 - 1.4, 64.2 + 1.4).$$

S pouzdanošću 99% očekivana vrijednost tvrdoće po Rockwellu će se biti u intervalu $[62.8, 65.6]$.

13.4 INTERVAL POVJERENJA ZA VJEROJATNOST BINOMNE DISTRIBUCIJE n ($n \to \infty$)

MOTIV 13.4 *U anketi za izbore dobiveni su podatci za kandidata A:*
u uzorku od n=2500 glasača kandidat je dobio 1000 glasova.
Odredite interval povjerenja za postotak glasova koji će dobiti kandidat A na izborima s pouzdanošću 0.95.
(Pretpostavimo da je izbor binomna distribucija)

U Bernoullijevoj shemi s $X_i \sim B(1,p)$, $i = 1, ..., n$ slučajna varijabla $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ broj uspjeha u Bernoullijevoj shemi ima binomnu distribuciju $X \sim B(n,p)$.
Relativna frekvencija uspjeha u Bernoullijevoj shemi je slučajna varijabla $\frac{X}{n}$ koja odgovara $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ uzoračkoj aritmetičkoj sredini slučajnog uzorka $(X_1, X_2, ..X_n)$.
Prisjetimo se da je $\overline{X} = \frac{X}{n}$ je procjenitelj za vjerojatnost p u Binomnoj distibuciji.

TEOREM 13.4 *Ako je broj ponavljanja u Bernoullijevoj shemi velik* ($n \to \infty$), *onda interval povjerenja* (G_1, G_2) *za parametar* p, *vjerojatnost događaja A u slučajnom pokusu s pouzdanošću* γ *čine procjenitelji*

$$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \;\; i \;\; G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})},$$

gdje je $\overline{X}$ *uzoračka aritmetička sredina* ($\overline{X} = \frac{X}{n}$ *relativna frekvencija uspjeha u Bernoullijevoj shemi), a*
(a) $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantil standardne normalne distribucije* $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$,
(b) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$.

Dokaz: *tko želi znati više*

Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak iz Bernoullijeve sheme, $X_i \sim B(1,p)$.
Prisjetimo se da vrijedi $E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1-p)$ i za uzoračku aritmetičku sredinu $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vrijedi $E(\overline{X}) = p$, $Var(\overline{X}) = \frac{1}{n}p(1-p)$.

(a) Prema CGT za ($n \to \infty$) za uzoračku aritmetičku sredinu
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vrijedi $\overline{X} \sim N(p, \frac{1}{n}p(1-p))$.
Za simetrični interval $(-\lambda, \lambda)$ možemo približno odrediti
$P(-\lambda \leq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \lambda) \approx 2F^*(\lambda) - 1$.
Nejednakost $-\lambda \leq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \lambda$ ekvivalentna je nejednakosti: $(\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}})^2 \leq \lambda^2$, odnosno
$(n+\lambda^2)p^2 - (2\overline{X}n + \lambda^2)p + n\overline{X}^2 \leq 0$
Trebamo riješiti nejednakost po p.
Približna rješenja p_1, p_2 kvadratne jednadžbe (veliko n) su :

$$p_1 \approx \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})},\ \ p_2 \approx \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}.$$

Kako je $(n+\lambda^2) > 0$, $p \in (p_1, p_2)$.
Zaključujemo da je

$$P(\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}) \approx 2F^*(\lambda) - 1.$$

Ako je zadana pouzdanost γ tako da je $P(G_1 < p < G_2) = \gamma$ onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $F^*(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$, tj. $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.
Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$, $G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$ čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjerojatnost p uspjeha u Bernoullijevoj shemi.
(b) Prema Čebiševljevoj nejednakosti za slučajnu varijablu $\overline{X}$ koja ima
$E(\overline{X}) = p,\ Var(\overline{X}) = \frac{1}{n}p(1-p)$ u obliku
$P(p - \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \overline{X} \leq p + \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$.
Nejednakost $p - \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \overline{X} \leq p + \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ekvivalentna je nejednakosti (vidi pod (a)): $\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$.
Zaključujemo da je

$$P(\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \leq p \leq \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ako je zadana pouzdanost γ tako da je $P(G_1 < p < G_2) = \gamma$ onda možemo odrediti λ tako da vrijedi $1 - \frac{1}{\lambda^2} = \gamma$ tj. $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$.

Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$, $G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$ čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjrojatnosti p uspjeha u Bernoullijevoj shemi.

NAPOMENA 13.7 *Možemo izvesti interval povjerenja i koristeći teorem Moivre-Laplacea (CGT) za relativnu frekvenciju u Bernullijevoj shemi*
$P(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) \approx F^*(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(p-1)}}) - 1,\ n \to \infty,$
tj.
$P(\frac{X}{n} - \varepsilon < p < \frac{X}{n} + \varepsilon) \approx F^*(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(p-1)}}) - 1.$
Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < p < G_2) = \gamma$, onda možemo odrediti ε tako da vrijedi $F^*(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(p-1)}}) = \frac{1+\gamma}{2}$, tj. $\varepsilon = z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, odnosno $\varepsilon = z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}}$, uz $p(1-p) \le \frac{1}{4}$.
Procjenitelji $G_1 = \frac{X}{n} - \varepsilon$, $G_2 = \frac{X}{n} - \varepsilon$ čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjerojatnosti p uspjeha u Bernoullijevoj shemi. varijable
$X \sim B(n,p)$ s pouzdanošću γ ako je poznat parametar n broj ponavljanja pokusa.
Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$$\left(\frac{x}{n} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{x}{n} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}}\right),$$

gdje je $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distribucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

PRIMJER 13.6 *Odredite interval povjerenja za vjerojatnost p u Bernoullijevoj shemi s pouzdanošću $\gamma = 0.95$ ako se pokus ponovi n=100, a broj uspjeha je 32.*

Rješenje: Za slučajnu varijablu $X \sim B(n,p)$ vrijedi

$$P(\overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \le p \le \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}) = \gamma$$

gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije $F^*(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$, $\overline{X} = \frac{X}{n}$ relativna frekvencija uspjeha.
Procjenitelji $G_1 = \overline{X} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$, $G_2 = \overline{X} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$ čine interval povjerenja (G_1, G_2) za paranetar vjerojatnosti p.
Parametar vjerojatnost p s pouzdanošću γ poprimit će vrijednosti u intervalu $(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$ gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.
Iz uzorka je uzeta relativna fekvencija $\overline{x} = \frac{x}{n} = \frac{32}{100}$, za pouzdanost $\gamma = 0.95$ iz

tablice očitamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i odredimo interval

$$\begin{aligned}
&(\overline{x} - \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}) \\
= \ &(0.32 - 1.96 \frac{1}{\sqrt{100}} \sqrt{0.32(1-0.32)}, 0.32 + 1.96 \frac{1}{\sqrt{100}} \sqrt{0.32(1-0.32)}) \\
= \ &(0.23, 0.41).
\end{aligned}$$

Parametar vjerojatnosti p s pouzdanošću $\gamma = 0.95$ poprimit će vrijednosti u intervalu $(0.23, 0.41)$.

PRIMJER 13.7 *Pravljena je anketa o dolasku na predavanja VIS. Na uzorku 163 studenta njih 62 je odgovorilo da je dolazilo na predavanja. Odredite interval povjerenja za vjerojatnost dolaska studenata prve godine na predavanja VIS s pouzdanošću 0.95. (Pretpostavimo da je izbor binomna distribucija)*

Rješenje: Parametar vjerojatnosti p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu $(\overline{x} - \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$ gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.
Iz uzorka je uzeta relativna fekvencija $\overline{x} = \frac{x}{n} = \frac{62}{163} = 0.38$, za pouzdanost $\gamma = 0.95$ iz tablice očitamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i odredimo interval

$$\begin{aligned}
&(\overline{x} - \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}, \overline{x} + \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}) \\
= \ &(0.38 - 1.96 \frac{1}{\sqrt{163}} \sqrt{0.38(1-0.38)}, 0.38 + 1.96 \frac{1}{\sqrt{163}} \sqrt{0.38(1-0.38)}) \\
= \ &(0.30, 0.45).
\end{aligned}$$

Parametar vjerojatnosti p s pouzdanošću $\gamma = 0.95$ poprimit će vrijednosti u intervalu $(0.30, 0.45)$.
Vjerojatnost dolaska na predavanja VIS s pouzdanošću 0.95 je između 0.30 i 0.45.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 13.8 *motiv*

U anketi za izbore dobiveni su podatci za kandidata A:
u uzorku od n=2500 glasača kandidat je dobio 1000 glasova.
Odredite interval povjerenja za postotak glasova koji će dobiti kandidat A na izborima s pouzdanošću 0.95.
(Pretpostavimo da je izbor binomna distribucija)

Rjšenje: Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu $(\overline{x}-\lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})},\ \overline{x}+\lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$ gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.

Iz uzorka imamo relativnu fekvenciju $\overline{x} = \frac{x}{n} = \frac{1000}{2500} = 0.4$, za pouzdanost $\gamma = 0.95$ iz tablice očitamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i odredimo interval

$$
\begin{aligned}
&(\overline{x} - \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})},\ \overline{x} + \lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}) \\
= &\ (0.4 - 1.96\frac{1}{\sqrt{2500}}\sqrt{0.4(1-0.4)},\ 0.4 + 1.96\frac{1}{\sqrt{2500}}\sqrt{0.4(1-0.4)}) \\
= &\ (0.38, 0.42).
\end{aligned}
$$

Parametar vjerojatnosti p s pozdanošću $\gamma = 0.95$ poprimit će vrijednosti u intervalu $(0.38, 0.42)$.

Postotak glasova koje će na izborima dobiti kandidat A s pouzdanošću 0.95 je između 38% i 42%.

PRIMJER 13.9 *Ako želimo odrediti postotak p% glasova koje će dobiti kandidat A na izborima pravimo anketu. Koliki uzorak treba uzeti da bi se za p odredio interval pouzdanosti 0.95 širine 0.04?*

Rješenje: Parametar vjerojatnost p s pozdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu $(\overline{x}-\lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})},\ \overline{x}+\lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})})$ gdje je $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne distibucije.

Širina intervala $\delta = 2\lambda\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}$.

Kako je $\overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$ možemo ocijeniti veličinu uzorka n: $n \leq \frac{(z_{\frac{1+\gamma}{2}})^2}{\delta^2}$.

Za zadane $\delta = 0.04$, $\gamma = 0.95$, dobivamo $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ i

$$
n \leq \frac{(z_{\frac{1+\gamma}{2}})^2}{\delta^2} = \frac{1.96^2}{0.04^2} = 2401.
$$

Uzorak mora imati bar 2401 glasača da bi s pouzdanošću 0.95 interval povjerenja za postotak bodova na izborima za kandidata A bio širok 0.04. (greška unutar 4%).

13.5 Ponovimo

INTERVAL POVJERENJA ZA parametar t

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n)$
parametar	t
pouzdanost	γ
interval povjerenja za t	$P(G_1 \leq t \leq G_2) \geq \gamma$

INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE kad je $n \to \infty$

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n), \quad n \geq 30$
parametar	μ
pouzdanost	γ
interval povjerenja za t	$P(G_1 \leq \mu \leq G_2) \geq \gamma$
	$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	$G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
λ	$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantil $N(0,1)$

INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE NORMALNE distribucije (varijanca poznata)

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n), \quad$ iz $N(\mu, \sigma^2)$
parametar	μ
pouzdanost	γ
interval povjerenja za μ	$P(G_1 \leq \mu \leq G_2) \geq \gamma$
	$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	$G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
λ	$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantil $N(0,1)$

INTERVAL POVJERENJA ZA OČEKIVANJE NORMALNE distribucije (varijanca nepoznata)

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n)$, iz $N(\mu, \sigma^2)$
parametar	μ
pouzdanost	γ
interval povjerenja za μ	$P(G_1 \leq \mu \leq G_2) \geq \gamma$
	$G_1 = \overline{X} - \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}$
	$G_2 = \overline{X} + \lambda \frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}$
λ	$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantil $t(n-1)$

INTERVAL POVJERENJA ZA VJEROJATNOST BINOMNE distribucije (veliki n)

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n)$, iz $B(n, p)$
parametar	p
pouzdanost	γ
interval povjerenja za μ	$P(G_1 \leq p \leq G_2) \geq \gamma$
	$G_1 = \frac{X}{n} - \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{X}{n}(1 - \frac{X}{n})}$
	$G_2 = \frac{X}{n} + \lambda \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{X}{n}(1 - \frac{X}{n})}$
λ	$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantil $N(0, 1)$