Sadržaj

Poglavlje 14

INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU

14.1 INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU NORMALNU distribucije poznatog očekivanja

MOTIV 14.1 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2 i poznatog očekivanja $\mu = 10$. Uzet je uzorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost uzorka $(7, 8, 10, 9, 9)$. Odredite interval povjerenja za varijancu σ^2 slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.*

TEOREM 14.1 *Neka je $(X_1, X_2, ..X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s nepoznatim parametrom varijancom σ^2, i poznatog očekivanja μ. Interval povjerenja (G_1, G_2) za parametar varijance σ^2 s pouzdanošću γ čine procjenitelji:*

$$G_1 = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \;\; i \;\; G_2 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2,$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantili hi-kvadrat distribucije $\chi^2(n)$, $F(z_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \frac{1-\gamma}{2}$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Dokaz: *tko želi znati više*

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $Y = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$.
Na intervalu (λ_1, λ_2) :
$P(\lambda_1 < \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 < \lambda_2) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$, tj.

$$P(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \sigma^2 < G_2) = \gamma = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$, onda možemo odrediti λ_1, λ_2 tako da vrijedi $F(\lambda_1) = \frac{1-\gamma}{2}$, $F(\lambda_2) = \frac{1+\gamma}{2}$ tj. $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ su kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n)$.
Procjenitelji $G_1 = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$, $G_2 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ čine interval povjerenja

$$(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2)$$

za parametar σ^2 slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s pouzdanošću γ.
Parametar varijanca σ^2 s pouzdanošću γ poprimit će vrijednosti u intervalu

$$(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2),$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n)$.
Ako je tablica hikvadrat distribucije $Y \sim \chi^2(n)$, dana u obliku
$P(Y > \varepsilon) = p$, onda $P(Y > \lambda_2) = \frac{1-\gamma}{2}$, $P(Y > \lambda_1) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 14.1 *Ova procjena parametra varijance slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ poznatog očekivanja može koristiti za određivanje širine inervala*

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 (\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})$$

uz zadanu pozdanost γ za interval povjerenja

$$(\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2, \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2),$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.

NAPOMENA 14.2 *Kvantili za hikvadrat distribuciju za* $n = 5$, $\chi^2(5)$, $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	12.83	16.75

γ	0.95	0.99
$\frac{1-\gamma}{2}$	0.025	0.01
$z_{\frac{1-\gamma}{2}}$	0.83	0.55

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 14.1 *motiv*

Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *nepoznate varijance* σ^2 *i poznatog očekivanja* $\mu = 10$. *Uzet je uzorak veličine* $n = 5$ *i dobivena je vrijednost uzorka* $(7, 8, 10, 9, 9)$. *Odredite interval povjerenja za varijancu* σ^2 *slučajne varijable s pouzdanošću* $\gamma = 0.95$.

Rješenje: $P(\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2) = \gamma$.
Za varijancu σ^2, poznatog očekivvanja interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2, \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)$, gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n)$.
Za $n = 5$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$.
Iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.83$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 12.83$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\sum_{i=1}^{5}(x_i-10)^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 15$
dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$(\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2, \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2) = (\frac{1}{12.83}\cdot 15, \frac{1}{0.83}\cdot 15) = (1.17, 18.07).$$

14.2 INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU NORMALNE distribucije nepoznatog očekivanja

MOTIV 14.2 *U četiri mjerenja Rockwellove tvrdoće jedne ploče radnici du dobili sljedeće vrijednosti:*
$64.9, 64.1, 63.8, 64.0$.
Odredite interval povjerenja za varijancu tvrdoće s pouzdanošću 99%.

TEOREM 14.2 *Neka je* $(X_1, X_2, ..X_n)$ *slučajni uzorak slučajne varijable* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *s nepoznatim parametrom varijancom* σ^2*, nepoznatog očekivanja* μ*. Interval povjerenja* (G_1, G_2) *za varijance* σ^2 *s pouzdanošću* γ *čine procjenitelji:*

$$G_1 = \frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2} \;\; i \;\; G_2 = \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2},$$

gdje je $\widehat{S^2}$ *korigirana uzoračka varijanca, a* $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$*,* $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$*, kvantili hikvadrat distribucije* $\chi^2(n-1)$*,*
$F(z_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \frac{1-\gamma}{2}$*,* $F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Dokaz: *tko želi znati še*

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda je $Y = \frac{n-1}{\sigma^2}\widehat{S^2} \sim \chi^2(n-1)$.
Na intervalu $(\lambda_1, \lambda_2) : P(\lambda_1 < \frac{n-1}{\sigma^2}\widehat{S^2} < \lambda_2) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$ tj.

$$P(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2}) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Ako je zadana pozdanost γ, $P(G_1 < \sigma^2 < G_2) = \gamma = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$, i onda možemo odrediti λ_1, λ_2 tako da vrijedi $F(\lambda_1) = \frac{1-\gamma}{2}, F(\lambda_2) = \frac{1+\gamma}{2}$ tj. $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.
Procjenitelji $G_1 = \frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2}$, $G_2 = \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2}$ čine interval povjerenja

$$(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2})$$

za parametar σ^2 slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s pouzdanošću γ.
Parametar varijanca σ^2 s pouzdanošću γ poprimit će vrijednosti u u intervalu

$(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2})$, gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}, \lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.
Ako je tablica hikvadrat distribucije $Y \sim \chi^2(n-1)$, dana u obliku
$P(Y > \varepsilon) = p$, onda $P(Y > \lambda_2) = \frac{1-\gamma}{2},\ P(Y > \lambda_1) = \frac{1+\gamma}{2}$.

NAPOMENA 14.3 *Ova procjena parametra varijance slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznatog očekivanja može koristiti za određivanje*

$$\delta = (n-1)\widehat{s^2}(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})$$

širine inervala uz zadanu pozdanost γ za interval povjerenja

$$(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2}),$$

gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}, \lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.

NAPOMENA 14.4 *Kvantili za hikvadrat distribuciju za $n = 4$, $\chi^2(4)$,*
$F(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$:

γ	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	11.14	14.86

γ	0.95	0.99
$\frac{1-\gamma}{2}$	0.025	0.01
$z_{\frac{1-\gamma}{2}}$	0.48	0.21

PRIMJER 14.2 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2 i nepoznatog očekivanja μ. Uzet je uzorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost uzorka* $(7, 8, 10, 9, 9)$. *Odredite interval povjerenja za varijancu σ^2 slučajne varijable s pouzdanošću* $\gamma = 0.95$.

Rješenje: $P(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2}) = \gamma$.
Za varijancu σ^2 interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2})$, gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}, \lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.
Za $n = 5$, iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.48$,
$\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 11.14$.

Koristeći date vrijednosti iz uzorka: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(7+8+10+9+9) = 8.6$,
$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 15$

$$\begin{aligned}\widehat{s^2} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 8.6)^2 \\ &= \frac{1}{4}((7-8.6)^2 + (8-8.6)^2 + (10-8.6)^2 + (9-8.6)^2 + (9-8.6)^2) = 1.3\end{aligned}$$

dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{s^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{s^2}) = (\frac{(5-1)}{11.14}\cdot 1.3, \frac{(5-1)}{0.48}\cdot 1.3) = (0.47, 10.83).$$

PRIMJER 14.3 *Neka slučajna varijabla ima normalnu distribuciju $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nepoznate varijance σ^2 i nepoznatog očekivanja μ. Uzet je uzorak veličine $n = 5$ i dobivena je vrijednost korigirane uzoračke varijance $\widehat{s^2} = 0.64$. Odredite interval povjerenja za varijancu σ^2 slučajne varijable s pouzdanošću $\gamma = 0.95$.*

Rješenje: $P(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2}) = \gamma$.
Za varijancu σ^2 interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S^2})$, gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.
Za $n = 5$, iz tablice očitavamo za $\gamma = 0.95$, $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.48$,
$\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 11.14$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\widehat{s^2} = 0.64$ dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{s^2}, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{s^2}) = (\frac{(5-1)}{11.14}\cdot 0.64, \frac{(5-1)}{0.48}\cdot 0.64) = (0.229, 5.33).$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 14.4 *motiv*

U četiri mjerenja Rockwellove tvrdoće jedne ploče radnici du dobili sljedeće vrijednosti: $64.9, 64.1, 63.8, 64.0$.
Odredite interval povjerenja za varijancu tvrdoće s pouzdanošću 99%.

Rješenje:

Za varijancu σ^2 interval povjerenja pouzdanosti γ je $(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{S}^2, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{S}^2)$, gdje su $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat distribucije $\chi^2(n-1)$.
Za $n = 4$, i $\gamma = 0.99$, iz tablice za $\chi^2(3)$ očitavamo za $\lambda_1 = z_{\frac{1-\gamma}{2}} = 0.07$
$\lambda_2 = z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 12.84$.
Koristeći date vrijednosti iz uzorka $\widehat{s}^2 = 0.233$ dobivamo interval povjerenja za σ^2 :

$$(\frac{(n-1)}{\lambda_2}\widehat{s}^2, \frac{(n-1)}{\lambda_1}\widehat{s}^2) = (\frac{3}{12.84} \cdot 0.233, \frac{(3)}{0.07} \cdot 0.233) = (0.054, 9.98).$$

Interval povjerenja za varijancu uz pouzdanost 99% je $[0.05, 9.98]$.

NAPOMENA 14.5 *Intervali povjerenja za varijancu i standardnu devijaciju ako je n veliki.*
(a) za $n > 30$, $P(\frac{2n\widehat{\sigma}^2}{(\sqrt{2n-3}+\lambda)^2} < \sigma^2 < \frac{2n\widehat{\sigma}^2}{(\sqrt{2n-3}-\lambda)^2}) = \gamma$,
$\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantili standardne normalne distribucije;*
(b) za $n \geq 100$, $P(\widehat{\sigma} - \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \sigma < \widehat{\sigma} + \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) = \gamma$,
$\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ *kvantili standardne normalne distribucije.*

PRIMJER 14.5 *Uzet je uzorak veličine 100 za visinu 18-godišnjakinja i dobivene su vrijednosti za uzoračku aritmetičku sredinu* $\overline{x} = 165$ *cm i uzoračku varijancu* $\widehat{\sigma}^2 = 5.8^2$ *cm.*
Pretpostavimo da visina djevojaka ima normalnu distribuciju.
(a) Odredite interval povjerenja za očekivnje μ *(srednju visinu) s pouzdanošću* $\gamma = 0.95$.
(b) Odredite interval povjerenja za standardnu devijaciju σ *s pouzdanošću* $\gamma = 0.95$.
(c) Koliki treba biti uzorak da s pouzdanošću $\gamma = 0.95$ *standardna devijacija ne odstupa od uzoračke standardne devijacije više od 5%?*

Rješenje:

(a) za $n > 30$, $P(\overline{X} - \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}) = \gamma$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije

$$\begin{aligned}
&(\overline{x} - \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}) \\
&= \quad (165 - 1.96\frac{5.8}{\sqrt{100}} < \mu < 165. + 1.96\frac{5.8}{\sqrt{100}}) = (163.8, 166.2).
\end{aligned}$$

(b) za $n \geq 100$, $P(\widehat{\sigma} - \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \sigma < \widehat{\sigma} + \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) = \gamma$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije

$$\begin{aligned} &(\widehat{\sigma} - \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \mu < \widehat{\sigma} + \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) \\ &= \quad (5.8 - 1.96\frac{5.8}{\sqrt{200}} < \mu < 5.8 + 1.96\frac{5.8}{\sqrt{200}}) = (4.9, 6.6). \end{aligned}$$

(c) $P(\widehat{\sigma} - \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}} < \sigma < \widehat{\sigma} + \lambda\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}}) = \gamma$, $\lambda = z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantili standardne normalne distribucije.

Iz $P(5.8 - 1.96\frac{5.8}{\sqrt{2n}} < \sigma < 5.8 + 1.96\frac{5.8}{\sqrt{2n}}) = 0.95$ i uvjeta $1.96\frac{5.8}{\sqrt{2n}} < 5.8 \cdot 5\%$ zaključujemo da je za $n \geq 769$.

γ	0.90	0.95	0.99
$\frac{1+\gamma}{2}$	0.95	0.975	0.995
$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$	1.65	1.96	2.58

14.3 Ponovimo

INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU NORMALNE distribucije (očekivanje poznato)

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n)$, iz $N(\mu, \sigma^2)$
parametar	σ^2
pouzdanost	γ
interval povjerenja za σ^2	$P(G_1 \le \sigma^2 \le G_2) \ge \gamma$
	$G_1 = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$
	$G_1 = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$
λ_1	$z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, kvantil $\chi^2(n)$
λ_2	$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantil $\chi^2(n)$

INTERVAL POVJERENJA ZA VARIJANCU NORMALNE distribucije (očekivanje nepoznato)

slučajni uzorak	$(X_1, X_2, ..., X_n)$, iz $N(\mu, \sigma^2)$
parametar	σ^2
pouzdanost	γ
interval povjerenja za σ^2	$P(G_1 \le \sigma^2 \le G_2) \ge \gamma$
	$G_1 = \frac{n-1}{\lambda_2} \cdot \widehat{S}^2$
	$G_2 = \frac{n-1}{\lambda_1} \cdot \widehat{S}^2$
λ_1	$z_{\frac{1-\gamma}{2}}$, kvantil $\chi^2(n-1)$
λ_2	$z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, kvantil $\chi^2(n-1)$