Sadržaj

Poglavlje 2

KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI

Teorija vjerojatnosti je matematička disciplina čiji je zadatak formirati i proučavati matematički model slučajnog pokusa. U 17. stoljeću, inspirirani kockarskim igramam matematičari B. Pascal i P. Fermat su se prvi bavili vjerojatnosnim problemima.

2.1 PROSTOR ELEMNTARNIH DOGAĐAJA

Pokus (eksperiment) je definiran odnosom uzroka i posljedica. Pretpostavke za realizaciju pokusa su: ponavljanje pokusa proizvoljno konačno mnogo puta i poznavanje mogući ih ishoda.
Ishodi pokusa su jedini objekti za izgradnju matematičkog modela pokusa.
U <u>determinističkom pokusu</u> ishod je jednoznačno određen uvjetima pokusa, a u <u>slučajnom pokusu</u> ishod nije jednoznačno odeđen uvjetima pokusa.

Osnovna pretpostavka slučajnog pokusa je da svako vršenje pokusa mora dati ishod (događaj) koji odgovara jednom i samo jednom elementarnom događaju.

MOTIV 2.1 *(a) Bacamo igraću kocku. Koji su ishodi slučajnog pokusa?*
(b) Bacamo istovremeno dvije igraće kocke. Koji su ishodi slučajnog pokusa?

Definicija 2.1 *(ELEMENTARNI DOGAĐAJ.PROSTOR ELEMENTARNIH DOGAĐAJA)*
Slučajni pokus je definiran svojim osnovnim ishodima koji se međusobno isključuju i zovu se elementarni događaji. Označavaju se malim grčkim slovima $\omega_1, \omega_2, ..$
Skup $\Omega = \{\omega_i : \omega_i =$*elementarni događaji,* $i = 1, .., n, ...\}$ *je neprazan skup i zove se prostor elementarnih događaja.*

PRIMJER 2.1 *Slučajni pokus= bacanje novčića;*
elementarni događaji: ω_1, ω_2; $\omega_1 =$ *"palo pismo"*, $\omega_2 =$ *"pala glava";*
Prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 2.2 *motiv*
(a) Slučajni pokus= bacanje kocke;
elementarni događaji: $\omega_1, ..., \omega_6$; $\omega_1 =$ *"pao broj 1", ...,omega*$_6$ = *"pao broj 6";*
Prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$
(b) Slučajni pokus= bacanje istovremeno dvije kocke;
elementarni događaji: $\omega_1, ..., \omega_{36}$; $\omega_1 = (1, 1)$,... ,$\omega_{36} = (6, 6)$.
Prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_{36}\}$.

PRIMJER 2.3 *Slučajni pokus (eksperiment)= vrijeme trajanja tri sijalice;*
elementarni događaj: $\omega = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0$; *Prostor elementarnih događaja* $\Omega = \{\omega = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$

PRIMJER 2.4 *Slučajni pokus (eksperiment)= dnevna količina padalina i maksimalna dnevna temperatura u Zagrebu;*
elementarni događaj: $\omega = (x, y) : x \leq 0, -30 < y \leq 50$; *Prostor elementarnih događaja* $\Omega = \{\omega = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, -30 < y \leq 50\}$

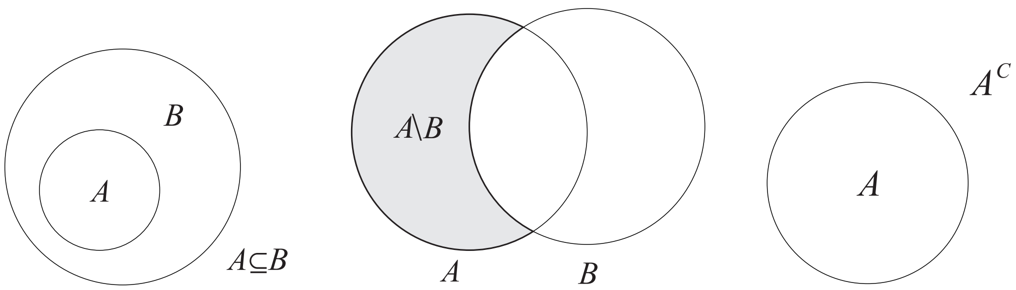
Definicija 2.2 *(SLUČAJNI DOGAĐAJ)*
Slučajni događa je podskup prostora elementarnih događaja . Slučajni događaji označavaju se velikim tiskanim slovima latinice A,B,...; $A \subseteq \Omega$.
(SIGURAN DOGAĐAJ)
Cijeli prostor elementarnih događaja Ω *je siguran događaj koji se mora dogoditi u svakom vršenju pokusa.*
(NEMOGUĆ DOGAĐAJ)

Prazan skup $\emptyset$ je nemoguć događaj koji se nikad neće dogoditi.
(POVOLJAN DOGAĐAJ)

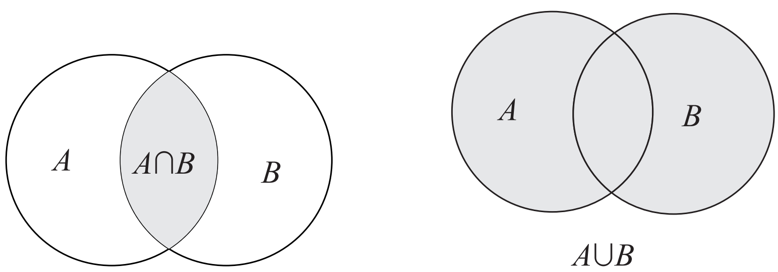
Elementarni događaj koji pripada događaju A zove se povoljan za događaj A ako pojavljivanje tog elementarnog događaja u pokusu povlačda se dogodio događaj A.

PRIMJER 2.5 *Slučajni pokus=bacanje igraće kocke;*
elementarni događaji: ω_1 = "pala 1",..., ω_6 = "pala 6";
Prostor elementarnih događaja: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
A="pao je paran broj"; A=$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}$.
Elementarni događaji $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ su povoljni za događaj A.

OPERACIJE SA SKUPOVIMA
Slučajni događaji su podskupovi od Ω. Operacije sa događajima definiramo pomoću operacija sa skupovima.
Podskup događaja: $A \subseteq B$: (dogodi se A $\Rightarrow$ dogodi se B);
Razlika događaja: $A \backslash B$: (događaj $A \backslash B$ se dogodi ako se dogodi A i ne dogodi B);
Suprotan događaj: $A^c = \Omega \backslash A$: (A^c se dogodi $\Leftrightarrow$ A ne dogodi);



Presjek događaja : $A \cap B$: (događaj $A \cap B$ se dogodi $\Leftrightarrow$ dogode se i A i B);
Unija događaja:$A \cup B$: (događaj $A \cup B$ se dogodi $\Leftrightarrow$ dogodi se ili A ili B);



T: Vrijede de Morganova pravila:

$(\bigcup\limits_k A_k)^c = \bigcap\limits_k A_k^c$;
$(\bigcap\limits_k A_k)^c = \bigcup\limits_k A_k^c$.

Definicija 2.3 *(DOGAĐAJI SE ISKLJUČUJU)*

Za događaje A i B kažemo da se međusobno isključuju ako je njihov presjek jednak $\emptyset$.

Definicija 2.4 *(POTPUN SISTEM DOGAĐAJA)*

Skupovi $A_1, A_2, ..., A_n$ *čine potpun sistem događaja ako se svi međusobno isključuju i ako im je unija cijeli prostor elementarnih događaja:*

$$A_{i,} \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j,\ i = 1, ..., n;\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

PRIMJER 2.6 *Iz skupa jednoznamenkastih brojeva izabiremo jedan broj. Neka je događaj A="broj je djeljiv s 2" , događaj B="broj je djeljiv s 3".*
Naći izraze za događaje C:
(a) C="broj djeljiv i s 2 i s 3";
(b) C="broj djeljiv ili s 2 ili s 3";
(c) C="broj paran a nije djeljiv s 3";
(d) C="broj nije paran a djeljiv s 3";
(e) C="broj nije ni paran ni djeljiv s 3".

Rješenje: $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9\}$
(a) C=$A \cap B = \{6\}$;
(b) C=$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$;
(c) C=$A \backslash B = \{2, 4, 8\}$;
(d) C=$B \backslash A = \{3, 9\}$;
(e) C=$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \{1, 5, 7\}$.

PRIMJER 2.7 *Iz tablice slučajnih brojeva izabran je jedan broj. Događaj A="broj je djeljiv s dva", događaj B="zadnja znamenka je 0". Što označava događaj C:*
(a) C=$A \cap B$;
(b) C=$A^c \cap B$;
(c)C=$A \cup B$;

Rješenje:
(a) C="broj je paran i zadnja znamenka je 0";
(b) C=$\emptyset$ nemoguć događaj;
(c) C=A ="broj je paran".

PRIMJER 2.8 *Slučajni pokus je gađanje u metu. Pokus se ponavlja 3 puta. Promatraju se događaji A, B, C koji znače pogađanje mete u prvom, drugom i trećem pokušaju. Pomoću tih događaja opisati slijedeće događaje:*
(a) "sva tri pogotka";
(b) "tri promašaja";
(c) "bar jedan pogodak";
(d) "bar jedan promašaj";
(e) "najviše dva pogotka";
(f) "najviše jedan pogodak";
(g) "bar dva pogotka";
(h) "do trećeg gađanja nije bilo pogodaka".

Rješenje:
(a) $A \cap B \cap C$;
(b) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$;
(c) $A \cup B \cup C$;
(d) $A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cap B \cap C)^c$;
(e) $A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c) = A^c \cup B^c \cup C^c$;=(d)
(f) $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$;
(g) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
(h) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

PRIMJER 2.9 *Za koje događaje vrijedi:*
(a) $A \cup B = A$;
(b) $A \cap B = A$;
(c) $A \cap B = A \cup B$;
(d) $A \cap B = A^c$
(e) $A \cup B = A^c$.

Rješenje:
(a) $B \subset A$;
(b) $A \subset B$;
(c) $A = B$;
(d) $A = \Omega, B = \emptyset$;
(e) $A = \emptyset, B = \Omega$.

2.2 KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI (A PRIORI)

Francuski matematičar P. S. Laplace (1749.-1827.) objavio je 1812. djelo "Theorie analitique des probabilities" u kojem uvodi pojam elemntarnih događaja i pojam vjerojatnosti a priori i a posteriori. Vjerojatnost događaja a priori određuje preko omjera koji ovisi o prirodi događaja. Za homogeni novčić prije bacanja može se odrediti da je vjerojatnost (a priori) da će pasti pismo jednaka $\frac{1}{2}$. Vjerojatnost događaja a posteriori određuje nakon velikog broja ponavljanja eksperimenta kao omjer broja pojavljivanja događaja i ukupnog broja ponavljanja.

MOTIV 2.2 *U skupu od 27 proizvoda 7 je neispravnih. Kolika je vjerojatnost da izaberemo uzorak koji se sastoji od 5 dobrih i 3 neispravna proizvoda?*

Definicija 2.5 *(KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI A PRIORI)*

Neka je prostor elementarnih događaja konačan skup $|\Omega| = n$, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. *Neka su svi elementarni događaji jednako mogući. Neka događaj A ima m povoljnih elementarnih događaja,* $A \subset \Omega, |A| = m$.
Vjerojatnost svakog elementarnog događaja je $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.
Vjerojatnost događaja A definira se kao broj:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

T: SVOJSTVA:
(1) $P(\Omega) = 1$,
(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
(3) $P(\emptyset) = 0$,
(4) $0 \le P(A) \le 1$,
(5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$,
(6) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
(7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

D:
(1) $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$,
(2) $P(A^c) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$,
(3) $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = (2) = 1 - P(\Omega) = (1) = 1 - 1 = 0$,

(4) $A \subset \Omega, 0 < |A| < n \Rightarrow 0 < P(A) < 1$, prema (1) i (3) $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$.
(5) $|A| \leq |B| \Rightarrow \frac{|A|}{n} \leq \frac{|B|}{n} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
(6) $|A \cup B| = |A| + |B| \Rightarrow$
$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{n} = \frac{|A|+|B|}{n} = \frac{|A|}{n} + \frac{|B|}{n} = P(A) + P(B)$,
(7) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow$
$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{n} = \frac{|A|+|B|-|A \cap B|}{n} = \frac{|A|}{n} + \frac{|B|}{n} - \frac{|A \cap B|}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

SLABOSTI:

-restriktivna jer se može primijeniti samo na slučajne pokuse s konačno mnogo elementarnih događaja;

-kružna jer se u definiciji vjerojatnosti koristi formulacija "jednako mogući" tj. "jednako vjerojatni".

PRIMJER 2.10 *Slučajni pokus: bacanje igraće kocke. Kolika je vjerojatnost (klasična apriori) događaja A="pao broj veći ili jednak 3"?*

Rješenje:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n = |\Omega| = 6$.
$A = \{3, 4, 5, 6\}$, $|A| = 4$.
$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{4}{6} = 0.666$.

PRIMJER 2.11 *U kutiji je pet kuglica: dvije bijele i 3 crne. Iz kutije slučajno izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da će izvučena kuglica biti crna?*

Rješenje:
Slučajni pokus: izvlačimo kuglicu iz kutije u kojoj su 2 b i 3 c kuglice; $\Omega = \{b, b, c, c, c\}$, $n = |\Omega| = 5$.
A="kuglica je crna"; $A = \{c, c, c\}$, $|A| = 3$,
$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{3}{5}$.

PRIMJER 2.12 *U kutiji je n olovaka jedne vrste od kojih je n_T ispravnih, a $n_D = n - n_T$ neispravnih. Uzmemo slučajni uzorak od r olovaka. Kolika je vjerojatnost da je među njima r_T ispravnih $(0 \leq r_T \leq r)$i r_D neispravnih?*

Rješenje:
Slučajni pokus: izbor od r elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n elemenata
$n = n_T + n_D, r = r_T + r_D$.
Ω = {svi uzorci veličine r iz n-čl. skupa}, $|\Omega| = \binom{n}{r}$;
Događaj A="uzorak ima r_T ispravnih i r_D neispravnih";
$|A|$ = Broj svih uzoraka veličine r iz n-čl. skupa bez vraćanja koji imaju r_T ispravnih i r_D neispravnih:
Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja (koristimo teorem o uzastopnom prebrojavanju i broj kombinacija r_i-razreda od n_i elemenata).
$|A| = C_{n_T}^{(r_T)} \cdot C_{n_D}^{(r_D)} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n_D}{r_D} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}$.
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}}{\binom{n}{r}}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 2.13 *motiv*
U skupu od 27 proizvoda 7 je neispravnih. Kolika je vjerojatnost da izaberemo uzorak koji se sastoji od 5 dobrih i 3 neispravna proizvoda?

Rješenje:
Slučajni pokus: izbor od r elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n elemenata
$n = n_T + n_D, r = r_T + r_D$.
$n = 27,\ r = 8, n_T = 20,\ n_D = 7,\ r_T = 5,\ r_D = 3$.
Ω ={svi uzorci veličine $r = 8$ iz $n = 27$-čl. skupa};
$|\Omega| = \binom{n}{r} = \binom{27}{8} = 2220\,075$;
Događaj A="uzorak ima $r_T = 5$ ispravnih i r_D =3 neispravnih";
$|A|$ =Broj svih uzoraka veličine r iz n -čl. skupa bez vraćanja koji imaju r_T ispravnih od n_T i r_D neispravnih od n_D:
$|A| = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n_D}{r_D} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T} = \binom{20}{5} \cdot \binom{7}{3} = 542640$
P(A)=$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{542640}{2220\,075} = 0.244\,42$.

2.3 KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI A POSTERIORI

MOTIV 2.3 *Kolika je vjerojatnost šestice kod bacanja igraće kocke? Bacili smo kocku 1000 puta i 170 puta je pala šestica.*

Definicija 2.6 *(KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI A POSTERIORI)*

Neka se slučajni pokus ponavlja n puta, $n \in N$, i neka događaj A nastupi n_A puta. Ako slučajni pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p$, onda se vjerojatnost a posteriori događaja A definira kao broj:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

Često se P(A) zove STATISTIČKA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI.

T: SVOJSTVA:
$\omega_1 = 0 =$ "nije se dogodio A";
$\omega_2 = 1 =$ "dogodio se A";
$\Omega = \{0, 1\} \times ... \times \{0, 1\}, n$ puta;
(1) $P(\Omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_\Omega}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$,
(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
(3) $P(\emptyset) = 0$,
(4) $0 \leq P(A) \leq 1$,
(5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
(6) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
(7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

D: analogno kao klasična definicija vjerojatnosti a priori.

SLABOSTI:
P(A)=$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$,
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow |P(A) - \frac{n_A}{n}| < \epsilon$, ali n_0 ovisi o realizaciji slučajnog pokusa.
Za konkretan slučajni pokus teško provjeriti ima li svojstvo stabilnosti relativnih frekvencija!

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 2.14 *motiv*

Kolika je vjerojatnost šestice kod bacanja igraće kocke? Bacili smo kocku 1000 puta i 170 puta je pala šestica.

Rješenje: Slučajni pokus: bacanje kocke.
$\omega_1 = 1 =$ " pala broj 1"; $\omega_6 = 6 =$ "pao broj 6";
$\Omega = \{1, 2, .., 6\} \times ... \times \{1, 2, .., 6\}, n = 1000$ puta;
Pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija ako jekocka homogena.
$P(\omega_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_{\omega_1}}{n} = p = \frac{1}{6}$ (iskustvo),...,
$P(\omega_6) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_{\omega_6}}{n} = p = \frac{1}{6}$ (iskustvo).
$A = \omega_6,\ n_{\omega_6} = 170$
$P(A) = \frac{n_{\omega_6}}{n} = \frac{170}{1000} = 0.1705.$

PRIMJER 2.15 *Bacamo novčić n=24000 puta. Kolika je vjerojatnost a posteriori događaja A="palo pismo" ako je pismo palo 12012 puta.*

Rješenje: Slučajni pokus: bacanje novčića.
$\omega_1 = 0 =$ "nije palo pismo"; $\omega_2 = 1 =$ "palo pismo";
$\Omega = \{0, 1\} \times ... \times \{0, 1\}, n = 24000$ puta;
Pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija ako je homogen.
$P(\omega_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_{\omega_1}}{n} = p = \frac{1}{2}$ (iskustvo),
$P(\omega_2) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_{\omega_2}}{n} = p = \frac{1}{2}$ (iskustvo).
$A = \omega_2,\ n_{\omega_2} = 12012$
$P(A) = \frac{n_{\omega_2}}{n} = \frac{12012}{24000} = 0.5005.$

2.4 GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

MOTIV 2.4 *Mladić i djevojka su dogovorili sastanak na trgu u 12 sati. Čekat će se najdulje 20 minuta nakon dolaska. Kolika je vjerojatnost da se susretnu ako su oboje došli na trg od 12 do 13 sati?*

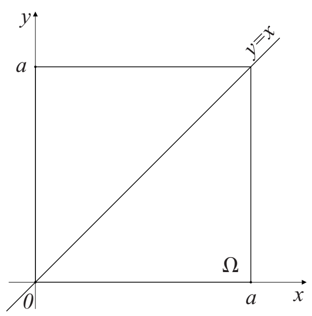
Definicija 2.7 *Neka se slučajni pokus sastoji u slučajnom izboru točke u skupu $\Omega \subseteq R^n$ za koji vrijedi $\mu(\Omega) > 0$, gdje je μ geometrijska mjera skupa:*

- $n = 1$ *duljina;*
- $n = 2$ *površina;*
- $n = 3$ *obujam.*

Neka je događaj $A \subset \Omega$ izbor točke iz skupa A. Geometrijska vjerojatnost događaja A tj. vjerojatnost da je izabrana točka iz skupa A je broj

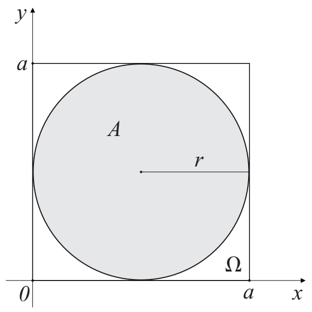
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

PRIMJER 2.16 *U kvadratu stranice a slučajno je izabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da je točka s dijagonale kvadrata?*



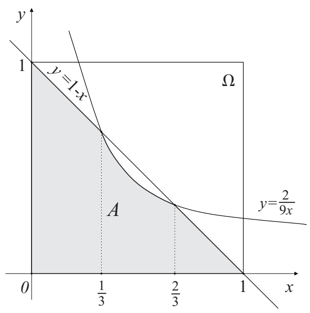
Rješenje:
Slučajni pokus: slučajni izbor točke u skupu $\Omega = [0, a] \times [0, a]$.
A=dijagonala kvadrata, $A \subset \Omega,\ A = \{(x, y) \in \Omega : x = y\}$.
$\mu(\Omega) = a^2,\ \mu(A) = 0, P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = 0.$

PRIMJER 2.17 *U kvadratu stranice a slučajno je izabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da je točka unutar upisanog kruga?*



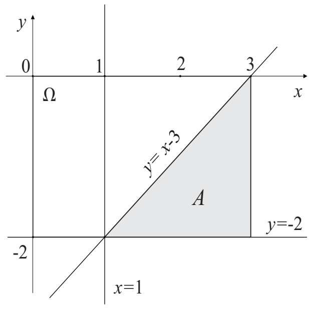
Rješenje:
Slučajni pokus: slučajni izbor točke u skupu $\Omega = [0, a] \times [0, a]$.
A=upisani krug u kvadrat, $A \subset \Omega$, $A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2\}$.
$\mu(\Omega) = a^2$, $\mu(A) = (\frac{a}{2})^2\pi$, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(\frac{a}{2})^2\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4}$.

PRIMJER 2.18 *Kolika je vjerojatnost da zbir dva slučajno izabrana broja unutar segmenta [0,1] bude manji od 1, a da njihov produkt bude manji od 2/9?*



Rješenje: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]; A \subset \Omega$,
$A = \{(x, y) \in \Omega : 0 \leq x \leq 1/3, 0 \leq y \leq 1 - x\} \cup$
$\{(x, y) \in \Omega : \dfrac{1}{3} \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq \dfrac{2}{9x}\} \cup$
$\{(x, y) \in \Omega : \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$.
$\mu(\Omega) = 1$, $\mu(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$.

PRIMJER 2.19 *Na brojevnom pravcu odaberem slučajno točke a i b tako da je a* $\in$ $[0, 3], b \in [-2, 0]$. *Odredite vjerojatnost da je udaljenost točaka a i b veća od 3?*



Rješenje: Ω= točka je unutar pravokutnika $[0,3] \times [-2,0]$.
A = točka je unutar trokuta $\{(x,y) \in \Omega : x - y > 3,\ x > 1,\ y > -2\}$.
$\mu(\Omega) = 6,\ \ \mu(A) = 2, P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{6}{2} = \frac{1}{3}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 2.20 *motiv Mladić i djevojka su se dogovorili sastanak na trgu u 12 sati i čekat će se najdulje 20 minuta nakon dolaska. Kolika je vjerojatnost da se susretnu ako su oboje došli na trg od 12 do 13 sati?*

Rješenje: Susret je unutar vremenskog razmaka od 60 minuta pa je $\Omega = [0,60] \times [0,60]$. Treba odrediti vjerojatnost događaja A=par se susreo=$\{(x,y) \in \Omega : |x - y| < 20\}$.
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{5}{9}$.

2.5 Ponovimo

Prostor elemntarnih događaja	$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$
Događaj $A \subset \Omega$	$\|A\|$ broj povoljnih elem. dog. za A
Klasična vjerojatnost a priori	$P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$
Klasična vjerojatnost a posteriori	$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$
Geometrijska vjerojatnost	$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$