Sadržaj

Poglavlje 3

AKSIOMATSKA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI

Klasična definicija a priori i klasična definicija a posteriri imaju nedostatke. Ruski matemtičar A. Kolmogorov(1903.-1987.) smatra se ocem moderne terorije vjerojatnosti i on uvodi aksiomatsku definiciju vjerojatnosti u monografiji *Osnovni pojmovi teorije vjerojantosti*(1933.).

MOTIV 3.1 *Vjerojatnost da jedna vrsta gume ima rok trajanja veći od 10000 km je 0.95. Kolika je vjerojatnost da će na autu*
(a) sve gume trajati duže od 10000 km?
(b) barem jedna guma puknuti prije pređenih 10000 km?

MOTIV 3.2 *(a) Tri bagerista su slučajno uzimali ključeve svojih strojeva iz kutije. Kolika je vjerojatnost da je bar jedan izabrao ključeve svog vozila?*

tko želi znati više
(b)Ako je bilo n bagerista kolika je vjerojatnost da je bar jedan sjeo u svoj bager?

Definicija 3.1 *(SKUP SVIH MOGUĆIH DOGAĐAJA SLUČAJNOG POKUSA)*
Neka je Ω prostor elementarnih događaja. Partitivni skup ili skup svih podskupova od Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$ zovemo skup svih mogućih događaja slučajnog pokusa.
Podskup $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ zovemo familija događaja iz Ω.

Definicija 3.2 *(SIGMA ALGEBRA DOGAĐAJA)*

Neka familija događaja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ima svojstva:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \subset \mathcal{F} \Rightarrow A^c \subset \mathcal{F}$

(iii) Ako je $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Takvu familiju skupova $\mathcal{F}$ zovemo sigma algebra događaja (σ-algebra).

Ako je Ω konačan skup onda je i svaka σ-algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ konačna i naziva se algebra događaja.

PRIMJER 3.1 *Familija skupova $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ je σ-algebra (minimalna).*
Familija skupova $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ je σ-algebra (maksimalna).

T: SVOJSTVA:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(b) Ako je $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

D:

(a) Prema definiciji (i), (ii) $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{F}$.

(b) Prema definiciji (iii) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c \in \mathcal{F}$.

Definicija 3.3 *(AKSIOMATSKA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI)*

Neka je Ω prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa. neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra skupova na Ω . Funkcija $P{:}\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zove se vjerojatnost na $\mathcal{F}$ ako vrijedi:

(P1) $P(A) \geq 0, A \subset \mathcal{F}$ (svojstvo nenegativnosti);

(P2) $P(\Omega) = 1$ (svojstvo normiranosti);

(P3) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (svojstvo prebrojive aditivnosti).

Definicija 3.4 *(VJEROJATNOSNI PROSTOR)*

Vjerojatnosni prostor zovemo uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, a P vjerojatnost na $\mathcal{F}$.

Ako je Ω prebrojiv ili konačan skup elementarnih događaja onda $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zovemo diskretni vjerojatnosni prostor.

Ako je Ω konačan skup elementarnih događaja, $|\Omega| = n$, onda $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zovemo n dimenzionalni diskretni vjerojatnosni prostor.

Definicija 3.5 *(DOGAĐAJ)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Događaj A je element od $\mathcal{F}$.

TEOREM 3.1 *(svojstva funkcije P)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Tada za funkciju vjerojatnosti P vrijedi:

(a) $P(\emptyset) = 0$;

(b) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \{1, ..., n\}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(svojstvo konačne aditivnosti);

(c) $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ *(svojstvo monotonosti);*

(d) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$;

(e) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dokaz:

(a) Neka je $A_1 = \Omega, A_i = \emptyset, i \geq 2$. Prema definiciji vjerojatnosti (P2)

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

(b) Neka su $A_i = \emptyset, i > n$. Prema svojstvu (a) $P(A_i) = \emptyset$. Koristeći definiciju vjerojatnosti (P2)

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(c) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \backslash A)$. Prema svojstvu (b)

$$P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \backslash A).$$

Prema definiciji vjerojatnosti (P1) $P(B \backslash A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

(d) $\Omega = A \cup A^c, \Rightarrow 1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$.

(e) Uočimo slijedeće relacije $A \cup B = A \cup (B \backslash A), B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$.

Prema svojstvu (b) računamo:

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$, i

$P(B) = P((A \cap B) \cup (B \backslash A)) = P(A \cap B) + P(B \backslash A)$.

Zaključujemo da je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

NAPOMENA 3.1 *Vjerojatnost je funkcija* $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$.

NAPOMENA 3.2 *važno*

T: Ako je Ω konačan i ako su svi elementarni događaji jednako vjerojatni onda je vjerojatnost događaja A prema aksiomatskoj definiciji jednaka vjerojatnosti a priori:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

D:

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ konačan skup elementarnih događaja koji su svi jednako vjerojatni, a $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor. Prema svojstvu normiranosti i zahtjevu da je vjerojatnost svakog elementarnog događaja jednaka:

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow n \cdot P(\{\omega_i\}) = 1 \Rightarrow P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Neka je događaj $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, ..., \omega_{ik}\}$. Koristeći svojstvo konačne aditivnosti vjerojatnost događaja $A \subset P(\Omega)$ je onda jednaka

$$P(A) = \sum_{\omega_{ik} \in A} P(\{\omega_{ik}\}) = k \cdot P(\{\omega_{ik}\}) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Uočimo da je P(A)= klasičnoj definiciji vjerojatnosti a priori.

PRIMJER 3.2 *Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da će pasti jednaki brojevi ili paran produkt?*

Rješenje: Prema svojstvu (e) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, za događaj A =pali jednaki brojevi i događaj B = produkt brojeva koji su pali je paran broj računamo vjerojatnost $P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{27}{36} - \frac{3}{36} = \frac{30}{36}$.

PRIMJER 3.3 *Pokažite da vrijedi*

$$A_i \in \mathcal{F}, i \in \{1,2,3\}, \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1 \cup A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Rješenje:

tko želi znati više

Koristimo svojstvo vjerojatnosti (e) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ za $A = A_1$, $B = A_2 \cup A_3$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 3.4 *motiv*

(a) Tri bageristа su slučajno uzimali ključeve svojih strojeva iz kutije. Kolika je vjerojatnost da je bar jedan izabrao ključeve svog vozila?

tko želi znati više

(b)Ako je bilo n bagerista kolika je vjerojatnost da je bar jedan sjeo u svoj bager?

Rješenje: (a) Događaj A_i =i-ti bagerist je izabrao ključeve svog vozila, $i = 1, 2, 3$.
Događaj B =bar jedan bagerist je izabrao ključeve svog vozila; tj. $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
$P(B) = 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2*3} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$

tko želi znati više

(b) $P(A_1 \cup ... \cup A_n) = 1 - \frac{\binom{n}{2}}{n\cdot(n-1)} + \frac{\binom{n}{3}}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} - ... + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{n!}$
$P(B) = 1 - e^{-1} \approx 0.68$, za $n > 10$.
Vjerojatnost je ista 0.68 ako je 11 bagerista ili ako je npr. 100 bagerista.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 3.5 *motiv*

Ako je vjerojatnost da jedne vrsta gume ima rok trajanja veći od 10000 km jednaka 0.95, kolika je vjerojatnost da će na autu
(a) sve gume trajati duže od 10000 km?
(b) barem jedna guma puknuti prije prđenih 10 000 km?

Rješenje:
Događaj A = jedna guma je prešla 10000 km; događaj B = sve četiri su prešle 10000 km, događaj C = bar jedna guma je pukla prije 10000 km; tj. $C = B^c$.
(a) $P(A) = 0.95 P(B) = P(A)^4$;
(b) $P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0.95^4$.

NAPOMENA 3.3 *tko želi znati više*

T: Svojstva funkcije vjerojatnosti P :
(f) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N},\ A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n, A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,

$\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$;
(svojstvo neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastući niz);

(g) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n-1} \subset ... \subset A_1, A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$,
(svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajući niz);

D: tko želi znati više

(f) Za niz događaja $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n, A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$*, definiramo pomoćni niz događaja* $B_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{N}$ *na slijedći način:*

$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, ..., B_n = A_n \backslash A_{n-1}$.

Lako se provjeri da se događaji isključuju $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$*, a* $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

Definirajmo $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Prema definiciji vjerojatnosti (P2) $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n)$,

$$\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = (b) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(g) Za niz događaja $A_n \subset A_{n-1} \subset ... \subset A_1, A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$*, definiramo pomoćni niz događaja* $C_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{N}$ *na slijedeći način:*

$C_1 = A_1 \backslash A_1 = \emptyset, C_2 = A_1 \backslash A_2, ..., C_n = A_1 \backslash A_n$.

Lako se provjeri da je dobiven monotono rastući niz $C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n \subset C_{n+1} ...$ *i vrijedi* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = A_1 \backslash A_n$*. i za* $A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \backslash A$.

Prema definiciji (P2) i svojstvu (d) vrijedi: $P(A_1 \backslash A) = P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n)$,

$P(A_1) - P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(C_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_1 \backslash A_n) = P(A_1) - \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$,

$\Rightarrow P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

3.1 Ponovimo

ALGEBRA DOGAĐAJA

Skup svih mogućih događaja	$\mathcal{P}(\Omega)$
Familija događaja	$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
sigma algebra događaja	$\mathcal{F}$ sa svojsvima
	$\emptyset \in \mathcal{F}$
	$A \subset \mathcal{F} \Rightarrow A^c \subset \mathcal{F}$
	sadrži prebrojive unije događaja iz $\mathcal{F}$
algebra događaja	$\mathcal{F}$ ako je Ω konačan

AKSIOMATSKA definicija VJEROJATNOSTI

aksiomi vjerojatnosti	
	$P(A) \geq 0, A \subset \mathcal{F}$
	$P(\Omega) = 1$
	svojstvo prebrojive aditivnosti
vjerojatnost	$P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
vjerojatnosni prostor	$(\Omega, \mathcal{F}, P)$