Sadržaj

Poglavlje 4

UVJETNA VJEROJATNOST

Thomas Bayes (1702 – 1762) uvodi pojam uvjetne vjerojatnosti: vjerojatnost da se dogodi događaj B ako se dogodio događaj A jednaka je kvocijentu vjerojatnosti da se dogode događaji i A i B i vjerojatnosti događaja A.

MOTIV 4.1 *Kontolor u tvornici daje nakon vizualnog pregleda tri tipa odluke: 1) proizvod je defektan i šalje se na daljnje pretrage 2) sumnja se da je proizvod defektan i šalje se na daljnje pretrage 3) proizvod je ispravan. Pokazalo se dosada da je kontolor bio u pravu kad je odlučio: o neispravnosti u* 80% *slučajeva, o sumnji na neispravnost u* 50% *slučajeva, a o ispravnosti proizvoda a u* 90% *slučajeva.*

U toku jednog dana kontrolor donosi prvu odluku kod 50%*, drugu kod* 20% *i treću dijagnozu kod* 30% *proizvoda. (a) Odredite vjerojatnost neispravnosti proizvoda. (b) Odredite vjerojatnost pogrešne odluke tj. odluke kontolora da je proizvod ispravan a on je zaista neispravan. (c) Odredite vjerojatnost nepotrebnih troškova ili slanja na daljnje pretrage proizvoda ako je zaista ispravan.*

Definicija 4.1 *(UVJETNA VJEROJATNOST)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $A \in \mathcal{F}$ *takav da je* $P(A) > 0$*. Tada funkciju* $P_A : \mathcal{F} \to [0,1]$ *zovemo uvjetna vjerojatnost a definiramo* $\forall\ B \in \mathcal{F}$ *kao*

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

vjerojatnost od B uz uvjet da se dogodio A.

$$P(A) = 0 \Rightarrow P_A(B) = P(B).$$

tko želi znati više

TEOREM 4.1 *Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost. Zadovoljava uvjete*
(UP1) $P_A(B) \geq 0, B \subset \mathcal{F}$ *(svojstvo nenegativnosti);*
(UP2) $P_A(\Omega) = 1$ *(svojstvo normiranosti);*
(UP3) $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \ \Rightarrow\ P_A(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_A(A_i)$

(svojstvo prebrojive aditivnosti).

Dokaz: (UP3) $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbf{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$
$\Rightarrow A_i \cap A \in \mathcal{F},\ i \in \mathbf{N},\ (A_i \cap A) \cap (A_j \cap A) = \emptyset,\ i \neq j$

$$\begin{aligned} P_A(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A))}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_A(A_i)\,. \end{aligned}$$

NAPOMENA 4.1 *važno*
T: Ako je Ω *konačan i ako su svi elementarni događaji jednako vjerojatni onda je uvjetna vjerojatnost događaja B uz uvjet da se dogodio događaj A prema aksiomatskoj definiciji jednaka vjerojatnosti a priori:*

$$P_A(B) = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

D:

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretni vjerojatnosni prostor, gdje je* Ω *konačan prostor elementarnih događaja i* $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n},\ i = \{1, \ldots, n\}$. *Neka je* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $|A| = m > 0$ *i* $P(A) = \frac{m}{n}$. *Za* $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tako da je* $|A \cap B| = r$, *uvjetna vjerojatnost* $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ *je definirana na slijedeći način*

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{r}{m}.$$

PRIMJER 4.1 *Bacamo kocku. Kolika je vjerojatnost da će "pasti" paran broj pod uvjetom da je je "pao" broj manji od 4?*

Rješenje: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.
$A = \{1,2,3\}$, $P(A) > 0$, $P(A) = \frac{3}{6}$ $B = \{2,4,6\}$, $P_A(B) = ?$
$P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\{2\})}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{3}$.

PRIMJER 4.2 *Izabiremo slučajno dva broja između brojeva od 1 do 9. Ako je njihov zbroj paran broj kolika je vjerojatnost da su oba neparna?*

Rješenje:
$\Omega = \{\{\omega_i, \omega_j\} : \omega_i \neq \omega_j, \omega_1, ..., \omega_9 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{9}$.
$A \subset \Omega$, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\}$, $\omega_{i_1} + \omega_{i_2}$ = paran,

$$P(A) = \frac{C_4^{(2)} + C_5^{(2)}}{C_9^{(2)}} = \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

$B \subset \Omega$, $B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\}$, $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}$ = neparni, $P_A(B) = ?$

$$P(B \cap A) = \frac{C_5^{(2)}}{C_9^{(2)}} = \frac{20}{72}, P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{8}.$$

TEOREM 4.2 *(FORMULA PRODUKTA VJEROJATNOSTI)*

Vjerojatnost produkta (presjeka) dva događaja ($A \cap B$) jednaka je produktu vjerojatnosti jednog od njih i uvjetne vjerojatnosti drugog, pod uvjetom da se prvi dogodio.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B), \quad P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Dokaz:
Ako je $P(A) > 0$, prema definiciji uvjetne vjerojatnosti P_A :
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.
Ako je $P(A) = 0 \Rightarrow P_A(B) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0$.

TEOREM 4.3 *(FORMULA PRODUKTA VJEROJATNOSTI*)*

Vjerojatnost produkta (presjeka) n događaja ($A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$) jednaka je

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{(A_1 \cap A_2)}(A_3) \cdot ... \cdot P_{(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}(A_n) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i). \end{aligned}$$

Dokaz: Pomoću AMI.

PRIMJER 4.3 *Iz špila karata (52 karte) izvlačimo jednu za drugom dvije karte. Kolika je vjerojatnost da obe karte budu pik?*

Rješenje: A="obje karte su pik"
A_1="prva je pik", $P(A_1) = \frac{13}{52}$
A_2="druga je pik", $P(A_2/A_1) = \frac{12}{51}$
$A = A_1 \cap A_2$.
Prema formuli produkta (presjeka) vjerojatnosti:
$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$.
Ili direktno (pomoću formule za uzorak bez vraćanja):

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{C_{13}^{(2)} \cdot C_{13}^{(0)} \cdot C_{13}^{(0)} \cdot C_{13}^{(0)}}{C_{52}^{(2)}} = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{1}{17}.$$

PRIMJER 4.4 *U kutiji se nalazi 10 kuglica: 6 bijelih i 4 crne. Izvlačimo 3 kuglice jednu za drugom. Kolika je vjerojatnost da će bar jedna od njih biti bijela?*

Rješenje: A="izvučena bar jedna bijela", A^c="izvučene sve crne",
A_1="prva izvučena crna", $P(A_1) = \frac{4}{10}$
A_2="druga izvučena crna", $P(A_1/A_2) = \frac{3}{9}$,
A_3="treća izvučena crna", $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8}$.
Prema formuli produkta (presjeka) vjerojatnosti
$P(A^c) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$.
Ili direktno (pomoću formule za uzorak bez vraćanja):
$P(A^c) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{C_4^{(3)} \cdot C_6^{(0)}}{C_{10}^{(3)}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{30}$.
$P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{29}{30}$.

PRIMJER 4.5 *U kutiji se nalazi 50 proizvoda: 20% neispravnih. Kontrolor izvlači 5 proizvoda sukcesivno (bez vraćanja). Kolika je vjerojatnost da će ocjena kontrolora biti pozitivna (svi proizvodi u uzorku ispravni)?*

Rješenje: A="izvučeni svi ispravni predmeti",
A_1="prvi izvučeni ispravan", $P(A_1) = \frac{40}{50}$
A_2="drugi izvučeni ispravan", $P(A_2/A_1) = \frac{39}{49}$,
A_3="treći izvučeni ispravan", $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{38}{48}$.

A_4="četvrti izvučeni ispravan", $P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{37}{47}$,
A_5="peti izvučeni ispravan", $P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{36}{46}$
Prema formuli produkta (presjeka) vjerojatnosti

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \\ &\quad \cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{38}{48} \cdot \frac{37}{47} \cdot \frac{36}{46} = 0.31 \end{aligned}$$

Ili direktno (pomoću formule za uzorak bez vraćanja):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{C_{40}^{(5)} \cdot C_{20}^{(0)}}{C_{50}^{(5)}} = \frac{\binom{40}{5} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{50}{5}} \\ &= \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} = 0.31 \end{aligned}$$

Definicija 4.2 *(NEZAVISNI DOGAĐAJI)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Za događaje A i B kažemo da su nezavisni ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definicija 4.3 *(FAMILIJA NEZAVISNIH DOGAĐAJA)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $A_i \in \mathcal{F}, i \in I$ familija događaja. Kažemo da je to nezavisna familija događaja ako za svaki konačni podskup različitih indeksa $\{i_1, ..., i_k\} \in I$ vrijedi

$$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

PRIMJER 4.6 *Ako su A i B nezavisni događaji, takvi da $P(A) > 0, P(B) > 0$ onda vrijedi*

$$P(B/A) = P(B) = P_A(B), \quad P(A/B) = P(A) = P_B(A).$$

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

PRIMJER 4.7 *(a) Proizvoljan događaj A i siguran događaj su nezavisni.*
(b) Proizvoljan događaj A i nemoguć događaj uvijek su nezavisni.

Rješenje:
(a) $\Omega \cap A = A, \ \ P(\Omega) = 1, \ \ P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega)$.
(b) $\emptyset \cap A = \emptyset, \ \ P(\emptyset) = 0, \ \ P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) = P(\emptyset) \cdot P(A) = 0$.

PRIMJER 4.8 *Ako su A i B nezavisni događaji onda su nezavisni događaji:*
(a) A^c i B,
(b) A i B^c,
(c) A^c i B^c.

Rješenje:
(a) $(A^c \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset, \ \ (A^c \cap B) \cup (A \cap B) = B$
$\Rightarrow P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \ P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(A^c) \cdot P(B). \end{aligned}$$

(b) $(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \emptyset, \ \ (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A,$
$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B),$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \ P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c). \end{aligned}$$

(c) $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c,$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \\ &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = P(A^c) \cdot P(B^c). \end{aligned}$$

PRIMJER 4.9 *Motor pokreće električni generator. Vjerojatnost otkazivanja motora u roku jednog mjeseca je 0.08, a generatora 0.04. Kolika je vjerojatnost da ćemo morati popravljati cijeli uređaj tijekom tog mjeseca?*

Rješenje: Prema svojstvu (e) vjerojatnosti

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

za događaj A =pokvario se motor i događaj B = pokvario se generator, računamo vjerojatnost $P(A \cup B)$. Budući su događaji A i B nezavisni onda je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Vjerojatnost otkazivanja cijelog uređaja je

$$P(A \cup B) = 0.08 + 0.04 - 0.08 \cdot 0.04 = 0.1168.$$

Vjerojatnost da će trebati popravak je 11.68

PRIMJER 4.10 *Ako su A i B nezavisni događaji pozitivnih vjerojatnosti onda se događaji ne isključuju.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno: $A \cap B = \emptyset$.
A i B su nezavisni i pozitivnih vjerojatnosti $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$, što je u kontradikciji s $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.
Zaključujemo da je pretpostavka kriva: $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$, događaji se ne isključuju.

TEOREM 4.4 *(FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$ čine potpun sistem događaja. Tada

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Dokaz:
Skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$, čine potpun sistem (familiju) događaja:

$H_i \cap H_j = \emptyset, \;\; i \neq j, \;\; \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \;\; \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

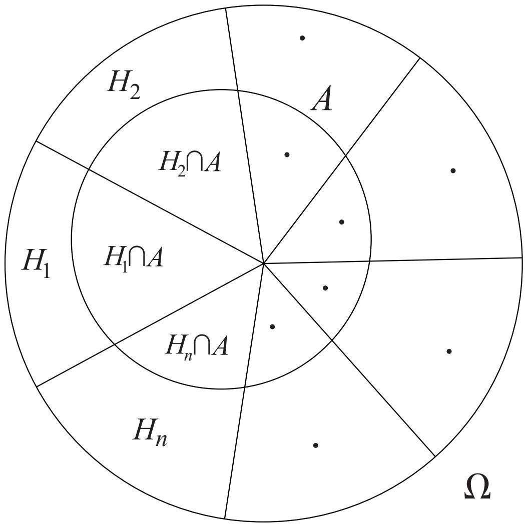
Prema teoremu o vjerojatnosti produkta (presjeka) događaja:
$P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.
$A \in \mathcal{F}$, $(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \emptyset$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \end{aligned}$$

TEOREM 4.5 *(BAYESOVA FORMULA)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$ čine potpun sistem događaja. Neka događaj $A \in \mathcal{F}$ ima pozitivnu vjerojatnost $P(A) > 0$. Tada je $\forall i$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j)}.$$



Dokaz:

Definicija uvjetne vjerojatnosti i formula produkta vjerojatnosti povlači da vrijedi:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j)}.$$

NAPOMENA 4.2 *Bayesovu formulu koristimo kad želimo naći istinitu hipotezu iz skupa od n postavljenih hipoteza $H_i, i = 1, ..., n$, ako znamo da se dogodio događaj A. Za svako $i = 1, ..., n$, računamo $P(H_i/A)$. Hipoteza H_{i0} za koju je $P(H_{i0}/A) \approx 1$, uzima se da je ispravna.*

PRIMJER 4.11 *Na našem fakultetu je 4% studenata i 1% studentica koji nisu državljani RH. Omjer studenata i studentica upisanih na fakultet je 40:60. Ako je slučajno izabrana jedna osoba upisana na naš fakultet koja je strani državljanin kolika je vjerojatnost da je to studentica?*

Rješenje:

Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:

H_1 =”izabrana osoba je studentica”, $P(H_1) = \frac{60}{100}$.

H_2 =”izabrana osoba je student”, $P(H_2) = \frac{40}{100}$.

$H_1 \cap H_2 = \emptyset, \quad H_1 \cup H_2 = \Omega$.

Događaj A koji se dogodio: A="izabrana osoba je strani državljanin".
Zadane su uvjetne vjerojatnosti događaja A uz uvjet jedne i druge hipoteze:
$P(A/H_1) = \frac{1}{100}$, $P(A/H_2) = \frac{4}{100}$. Trebamo odrediti $P(H_1/A) =?$
Koristimo Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned} P(H_1/A) &= \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{\sum\limits_{j=1}^{2} P(H_j)\cdot P(A/H_j)} = \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)} \\ &= \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{4}{100}} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} = 0.27. \end{aligned}$$

PRIMJER 4.12 *Tri stroja S1, S2 i S3 učestvuju u ukupnoj proizvodnji u omjeru* 60 : 30 : 10. *Stroj S1 proizvodi* 2%, *stroj S2* 3% *i stroj S3* 4% *neispravnih proizvoda. Ako se slučajno izabere jedan proizvod koji je neispravan, kolika je vjerojatnost da je bio napravljen na stroju S3?*

Rješenje:
Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:
H_1 ="izabrani predmet je sa stroja S1", $P(H_1) = \frac{60}{100}$.
H_2 ="izabrani predmet je sa stroja S2", $P(H_2) = \frac{30}{100}$.
H_3 ="izabrani predmet je sa stroja S3", $P(H_3) = \frac{10}{100}$
$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$.
Događaj A koji se dogodio: A="izabrani proizvod je neispravan".
Zadane su uvjetne vjerojatnosti događaja A uz uvjet pojedine hipoteze:
$P(A/H_1) = \frac{2}{100}$, $P(A/H_2) = \frac{3}{100}$, $P(A/H_3) = \frac{4}{100}$.
Trbamo odrediti $P(H_3/A) =?$
Koristimo Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned} P(H_3/A) &= \frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(H_j)\cdot P(A/H_j)} \\ &= \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)} \\ &= \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}} = \frac{4}{25} = 0.16. \end{aligned}$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 4.13 *motiv*

Kontolor u tvornici daje nakon vizualnog pregleda tri tipa odluke: 1) proizvod je defektan i šalje se na daljnje pretrage 2) sumnja se da je proizvod defektan i šalje se na daljnje pretrage 3) proizvod je ispravan. Pokazalo se dosada da je kontolor bio u pravu kad je odlučio: o neispravnosti u 80% *slučajeva, o sumnji na neispravnost u* 50% *slučajeva, a o ispravnosti proizvoda a u* 90% *sluČajeva.*

U toku jednog dana kontrolor donosi prvu odluku kod 50%, *drugu kod* 20% *i treću dijagnozu kod* 30% *proizvoda. (a) Odredite vjerojatnost neispravnosti proizvoda. (b) Odredite vjerojatnost pogrešne odluke tj. odluke kontolora da je proizvod ispravan a on je zaista neispravan. (c) Odredite vjerojatnost nepotrebnih troškova ili slanja na daljnje pretrage proizvoda ako je zaista ispravan.*

Rješenje:
Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:
H_1 =”prva odluka -proizvod je neispravan”, $P(H_1) = 0.5$;
H_2 =”druga odluka - sumnja se da je proizvod neispravan ”, $P(H_2) = 0.2$;
H_3 =”treća odluka- proizvod je ispravan”, $P(H_3) = 0.3$.
$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, \quad H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$.
Događaj A = ”proizvod je neispravan”.
Događaj A^c =”proizvod je ispravan”.

Zadane su uvjetne vjerojatnosti događaja A uz uvjet pojedine hipoteze:
$P(A/H_1) = 0.8, \;\; P(A/H_2) = 0.5 \;\; P(A/H_3) = 0.1$.
(a) Trebamo odrediti $P(A)$
(b) Trbamo odrediti $P(H_3/A) =?$
(c) Trebamo odrediti $P(H_1 \cup H_2/A^c)$

(a) Koristimo formulu potpune vjerojatnosti:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{3} P(H_j) \cdot P(A/H_j)$$

$$P(A) = 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.53$$

$$P(A^c) = 0.47.$$

(b)Koristimo Bayesovu formulu:

$$
\begin{aligned}
P(H_3/A) &= \frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(H_j)\cdot P(A/H_j)} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.1}{0.53} \\
&= 0.056.
\end{aligned}
$$

(c) Koristimo Bayesovu formulu:

$$
\begin{aligned}
P(H_1\cup H_2/A^c) &= \frac{P(H_1)\cdot P(A^c/H_1)+P(H_2)\cdot P(A^c/H_2)}{P(A^c)} \\
&= \frac{0.5\cdot 0.2+0.2\cdot 0.50}{0.47} \\
&= 0.425.
\end{aligned}
$$

4.1 Ponovimo

UVJETNA VJEROJATNOST

Uvjetna vjerojatnost od B uz uvjet da se dogodio A	$P_A(B) \equiv P(B/A)$
ako $P(A) > 0$	$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
ako $P(A) = 0$	$P_A(B) = P(B)$
formula produkta vjerojatnosti	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$
nezavisni događaji A i B	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
formula potpune vjerojatnosti	$P(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j)$
Bayesova formula	$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j)}$