Sadržaj

Poglavlje 5

DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA

MOTIV 5.1 *U agenciji za nekretnine prema pokazateljima prodaje u prošlom razdoblju zarada po prodanom jednosobnom stanu je 3000 eura. Kolika je očekivana mjesečna zarada na jednosobnim stanovima ako je prema zadnjim pokazateljima vjerojatnost prodaje nijednog stana 0.1, 1 stana 0.3, 2 stana 0.4, a vjerojatnost prodaje 3 stana 0.2 .*

Opisna definicija pojama slučajne varijable: to je funkcija koja elementarnim događajima nekog slučajnog pokusa pridružuje realan broj.

Ako je pokus takav da slučajna varijabla predstavlja prebrajanje onda ćemo govoriti o diskretnoj slučajnoj varijabli.

Ako je pokus takav da slučajna varijabla uključuje mjerenje (temperatura, tlak, vrijeme, postotak) onda ćemo govoriti o kontinuiranoj slučajnoj varijabli jer se vrijednosti mjerenja prikazuju intervalima.

Diskretna slučajna varijabla se zadaje vrijednostima koje su pridružene ishodima pokusa i vjerojatnostima događaja da slučajna varijabla poprimi te vrijednosti.

Kontinuirana slučajna varijabla zadaje se vjerojatnostima da poprimi vrijednosti unutar pojedinog intervala. Vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla poprimi pojedinu vrijednost unutar intervala je nula.

PRIMJER 5.1 *Neka je slučajni pokus bacanje dvije kocke istovremeno. Elemntarnim događajima možemo pridružiti realan broj koji odgovara sumi palih brojeva. To pridruživanje je funkcija X sa vrijednostima u skupu* $\{2, 3, 4, ..., 12\}$ *koje ovise o ishodu slučajnog pokusa,* *pa to opravdava naziv slučajna varijabla X =suma brojeva koji su pali. To je diskretna slučajna varijabla.*

PRIMJER 5.2 *Neka je slučajni pokus godišnje poslovanje jednog poduzeća. Kontinuirana slučajna varijabla X se može definirati kao omjer prodaje i profita u jednoj godini.*

5.1 DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA

MOTIV 5.2 *Promatramo slučajan pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu $X =$ suma brojeva koji su pali. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 3 a manji ili jednak 6, tj. $P(3 < X \leq 6)$?*

Definicija 5.1 *(DiSKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA*

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretni vjerojatnosni prostor. Funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zovemo diskretna slučajna varijabla ako je slika $\mathcal{R}(X) = \{X(\omega_1), X(\omega_2), ..., X(\omega_n), ...\}$ diskretan (konačan ili prebrojiv) skup.

PRIMJER 5.3 *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretni vjerojatnosni prostor gdje je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je diskretna slučajna varijabla definirana na sljedeći način:*

$$X(\omega_1) = 0,\ X(\omega_2) = 1.$$

Definicija 5.2 *Za diskretnu slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}, P)$ definiramo vjerojatnost da poprimi vrijednost $a \in \mathbb{R}$*

$$P(X = a) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}).$$

PRIMJER 5.4 *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}, P)$ diskretni vjerojatnosni prostor gdje je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, a vjerojatnost $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}, i = 1, .., 4$. Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla definirana na sljedeći način: $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0,\ X(\omega_3) = X(\omega_4) = 1$.*
Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost 1 tj. izračunajte $P(X = 1)$.

Rješenje:
Vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost 1 iznosi:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} \\ &= P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definicija 5.3 *(FUNKCIJA VJEROJATNOSTI SLUČAJNE VARIJABLE, engl. probability function of X)*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *diskretna slučajna varijabla sa slikom* $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$. *Funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiranu na sljedeći način:*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & x = x_i \in \mathcal{R}(X) \\ 0, & inače. \end{cases}$$

zovemo funkcija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable X.

T: SVOJSTVA funkcije vjerojatnosti slučajne varijable X.

(i) $0 \leq f(x_i) \leq 1$,

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

D:
(i) Za $I = \{x_i\}$, $P(X = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \;\Rightarrow\; 0 \leq f(x_i) \leq 1$.
(ii) Za $x_i \neq x_j \;\Rightarrow\; \{\omega : X(\omega) = x_i\} \bigcap \{\omega : X(\omega) = x_j\} = \emptyset$, svojstvo (ii) slijedi prema svojstvu (P3), prebrojive aditivnosti funkcije P :

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = P(\Omega) = 1.$$

NAPOMENA 5.1 *važno*

Diskretna slučajna varijabla je zadana sa svojom slikom $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, x_3, .., x_n, ..\}$ *i funkcijom vjerojatnosti slučajne varijable* f. *Zapis slučajne varijable X kao uređene sheme:*

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & p_3 & ... & p_n & ... \end{pmatrix},$$

gdje su $p_i = f(x_i),\ i = 1, 2, ...$

PRIMJER 5.5 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretni vjerojatnosni prostor gdje je* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4},\ i = 1, .., 4$. *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla definirana na sljedeći način:* $X(\omega_1) = 7$, $X(\omega_2) = 8$, $X(\omega_3) = 9$, $X(\omega_4) = 10$. *Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable* X .

Rješenje: Slika slučajne varijable X je $\mathcal{R}(X) = \{7, 8, 9, 10\}$.. Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = x_i \in \{7, 8, 9, 10\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Slučajnu varijablu X možemo zadati shemom $X \sim \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

PRIMJER 5.6 *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretni vjerojatnosni prostor slučajnog pokusa bacanja igraće kocke. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6\}$, a vjerojatnost $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$, $i = 1, .., 6$.*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla definirana na sljedeći način: X = broj koji je pao.

Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X.

Rješenje: Slika slučajne varijable je skup $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(X = i) = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, .., 6$$

Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Slučajnu varijablu X možemo zadati s $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

PRIMJER 5.7 *Promatramo slučajan pokus gađanja u metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka mete je $\frac{1}{2}$. Neka je slučajna varijabla X = broj pogodaka u metu. Nađite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X.*

Rješenje: Slučajnu varijablu X možemo zadati s $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Definicija 5.4 *(FUNKCIJA DISTRIBUCIJE DIS. SL. VARIJABLE, engl. distribution function)*

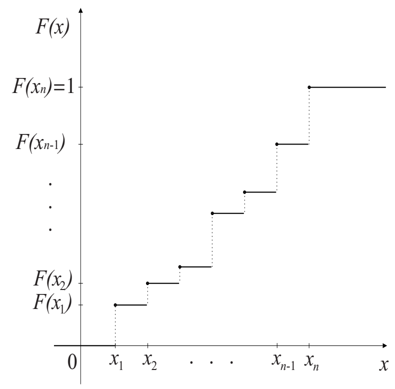
Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla sa slikom $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$. Funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način:

$$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{i : x_i \leq x} f(x_i)$$

zovemo funkcija distribucije diskretne slučajne varijable X.
Veza funkcije vjerojatnosti i funkcije distribucije diskretne slučajne varijable je:

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i-),$$

gdje je $F(x_i-) = \lim_{x \to x_i-} F(x)$.



Slika 5.1: Graf funkcije distribucije $F(x)$ diskretne slučajne varijable X.

T: SVOJSTVA FUNKCIJE DISTRIBUCIJE diskretne slučajne varijable:

(F1) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

(F2) $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

(F3) $0 \leq F(x) \leq 1$

(F4) F je neprekinuta zdesna, $F(x) = F(x+)$, $F(x-) = P(X < x)$

(F5) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$

(F6) F je rastuća funkcija.

D:
(F1) Kako je događaj $X \leq -\infty$ nemoguć događaj, slijedi
$F(-\infty) := P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0.$
(F2) Kako je događaj $X \leq \infty$ siguran događaj slijedi
$F(\infty) := P(X \leq \infty) = P(\Omega) = 1.$
(F3) tvrdnja slijedi iz svojstava (F1) i (F2).
(F4) Iz definicije funkcije distribucije $F(x) = P(X \leq x)$ u točkama prekida

x_i F je neprekinuta zdesna jer $F(x) = F(x+)$, $F(x-) = P(X < x)$
(F5) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Računamo

$$\begin{aligned} F(b) &= P(X \leq b) = P((X \leq a) \cup (a < X \leq b)) \\ &= P(X \leq a) + P(a < X \leq b)) = F(a) + P(a < X \leq b), \end{aligned}$$

otkuda slijedi $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
(F6) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Iz svojstva (F5) slijedi da je $F(b) \leq F(a)$, pa je funkcija F rastuća.

PRIMJER 5.8 *Za funkciju distribucije diskretne slučajne varijable* $F(x) = P(X \leq x)$ *vrijede i slijedeće relacije:*

(a) $P(a < X < b) = F(b-) - F(a),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b,$

(b) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b,$

(c) $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$

Rješenje:

$$\begin{aligned} (a) \quad F(b-) &= P(X < b) = P((X \leq a) \cup (a < X < b)) \\ &= P(X \leq a) + P(a < X < b) = F(a) + P(a < X < b). \end{aligned}$$

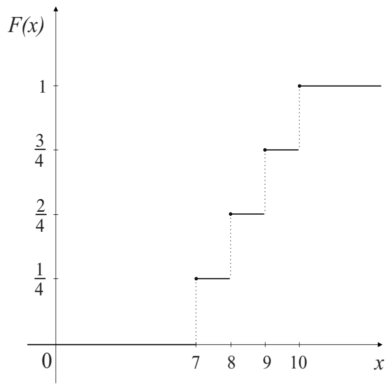
$$\begin{aligned} (b) \quad F(b) &= P(X \leq b) = P((X < a) \cup (a \leq X \leq b)) \\ &= P(X < a) + P(a \leq X \leq b) = F(a-) + P(a \leq X \leq b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad F(b-) &= P(X < b) = P((X < a) \cup (a \leq X < b)) \\ &= P(X < a) + P(a \leq X < b) = F(a-) + P(a \leq X < b). \end{aligned}$$

PRIMJER 5.9 *Za slučajnu varijablu X iz primjera zadanu s*

$$X \sim \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

napišite funkciju distribucije. Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednosti veće od 8 i manje ili jednako 10?



Slika 5.2: Graf funkcije distribucije $F(x)$ diskretne slučajne varijable X iz primjera (5.9).

Rješenje:

$$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} f(x_i) = \begin{cases} 0, & x < 7 \\ \frac{1}{4}, & 7 \leq x < 8 \\ \frac{2}{4}, & 8 \leq x < 9 \\ \frac{3}{4}, & 9 \leq x < 10 \\ 1 & 10 \leq x. \end{cases}$$

Koristimo formulu

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{i:a<x_i \leq b} f(x_i),$$

$$P(8 < X \leq 10) = \sum_{i:8<x_i \leq 10} f(x_i) = f(9) + f(10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

ili odmah uvrstimo vrijednosti $F(b), F(a)$:

$$P(8 < X \leq 10) = F(10) - F(8) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

PRIMJER 5.10 *Za slučajnu varijablu X iz primjera zadanu s*

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

napišite funkciju distribucije. Izračunajte

(a) $P(2 < X \leq 5)$

(b) $P(2 < X < 5)$

Rješenje:

$$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} f(x_i) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6}, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x. \end{cases}$$

(a) Koristimo formulu

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{i:a<x_i\leq b} f(x_i),$$

$$P(2 < X \leq 5) = \sum_{i:2<x_i\leq 5} f(x_i) = f(3) + f(4) + f(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6},$$

ili odmah uvrstimo vrijednosti $F(b), F(a)$:

$$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}.$$

(b) Koristimo formulu

$$P(a < X < b) = F(b-) - F(a) = \sum_{i:a<x_i<b} f(x_i),$$

$$P(2 < X < 5) = \sum_{i:2<x_i<5} f(x_i) = f(3) + f(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6},$$

ili odmah uvrstimo vrijednosti $F(b-), F(a)$:

$$P(2 < X < 5) = F(5-) - F(2) = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}.$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 5.11 *motiv*

Promatramo slučajan pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X = suma brojeva koji su pali. Nađite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 3 a manji ili jednak 6?

Rješenje:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije slučajne varijable X je

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{36}, & 3 \le x < 4 \\ \frac{6}{36}, & 4 \le x < 5 \\ \frac{10}{36}, & 5 \le x < 6 \\ \frac{15}{36}, & 6 \le x < 7 \\ \frac{21}{36}, & 7 \le x < 8 \\ \frac{26}{36}, & 8 \le x < 9 \\ \frac{30}{36}, & 9 \le x < 10 \\ \frac{33}{36}, & 10 \le x < 11 \\ \frac{35}{36}, & 11 \le x < 12 \\ 1, & 12 \le x. \end{cases}$$

Koristimo formulu $P(a < X \le b) = \sum\limits_{i: a < x_i \le b} f(x_i)$,

$$P(3 < X \le 6) = \sum_{i: 3 < x_i \le 6} f(x_i) = f(4) + f(5) + f(6) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{12}{36},$$

ili odmah uvrstimo vrijednosti $F(b), F(a)$:

$$P(3 < X \le 6) = F(6) - F(3) = \frac{15}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36}.$$

PRIMJER 5.12 *Promatramo slučajan pokus gađanja u metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka mete je $\frac{1}{2}$. Neka je slučajna varijabla X = broj pogodaka u metu. Nađite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X.*

Rješenje: Slučajnu varijablu X možemo zadati s $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Funkcija distribucije slučajne varijable X je

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$$

Definicija 5.5 *(OČEKIVANJE DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE, engl. mean ili mathematical expectation)*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla sa slikom $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$ i funkcijom vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$f(x) := \begin{cases} P(X = x_i), & x = x_i \in \mathcal{R}(X) \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Kažemo da diskretna slučajna varijabla X ima očekivanje ako red $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$ konvergira i označavamo

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i).$$

Ako je X diskretna slučajna varijabla s konačnom slikom $\mathcal{R}(X)$ onda ona ima očekivanje

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i).$$

Očekivanje slučajne varijable predstavlja očekivanu vrijednost slučajne varijable.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 5.13 *motiv*

U agenciji za nekretnine prema pokazateljima prodaje u prošlom razdoblju zarada po prodanom jednosobnom stanu je 3000 eura. Kolika je očekivana tjedna zarada na jednosobnim stanovima ako je prema zadnjim pokazateljima vjerojatnost prodaje nijednog stana 0.1, 1 stana 0.3, 2 stana 0.4, a vjerojatnost prodaje 3 stana 0.2 .

Rješenje: Slučajnu varijablu X = broj prodanih jednosobnih stanova, možemo zadati s $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1} x_i f(x_i) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} \\ &= 1.7. \end{aligned}$$

Očekivani broj prodanih jednosobnih stanova je 1.7. Očekivana tjedna zarada je 5100 eura.

NAPOMENA 5.2 *PRAVEDNA IGRA*

U teoriji igara matematičko očekivanje nekog klađenja je $E(X) = p \cdot a$, gdje je $a =$ očekivani dobitak kad se dogodi događaj s vjerojatnošću p. Ako je $E(X) < 0$ onda je igrač na gubitku, ako $E(X) > 0$ onda je na dobitku, a ako je $E(X) = 0$ onda je igra pravedna. Ako je uložen novac u iznosu ulog, onda je ukupno matematičko očekivanje ulog $\cdot E(X)$.

PRIMJER 5.14 *(a) U igri s novčićem prvi igrač se kladi u 1 kunu. Kad prvi igrač izgubi plati kunu protivniku, a kad protivnik izgubi plati 1 kunu prvom igraču. Izračunajte matematičko očekivanje? Ako je prvi igrač uložio 1000 kuna koliki je očekivani dobitak ili gubitak?*

(b) U igri s novčićem prvi igrač se kladi u 1 kunu. Kad prvi igrač izgubi plati kunu protivniku, a kad protivnik izgubi plati 90 lipa prvom igraču. Izračunajte matematičko očekivanje? Ako je prvi igrač uložio 1000 kuna koliki je očekivani dobitak ili gubitak?

Rješenje:

(a) Matematičko očekivanje je $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$. Igra je pravedna. Budući je prvi igrač uložio 1000 kn njegov dobitak (gubitak) je $1000 \cdot 0 = 0$ tj. nema niti gubitka niti dobitka jer je očekivani iznos jedank ulogu.

(b)Matematičko očekivanje je $E(X) = 0.90 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -0.05$. Igrač je na gubitku jer je $E(X) < 0$. Budući je prvi igrač uložio 1000 kn njegov očekivani gubitak je $1000 \cdot (-0.05) = -50$ kn.

Definicija 5.6 *(VARIJANCA ILI DISPERZIJA DIS. SL. VARIJABLE, engl. variance)*

Neka $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla sa slikom $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$ i funkcijom vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ima očekivanje $E(X)$. Kažemo da diskretna slučajna varijabla X ima varijancu ako red $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E(X))^2 f(x_i)$ konvergira i označavamo

$$Var(X) := \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E(X))^2 f(x_i).$$

Ako je X diskretna slučajna varijabla s konačnom slikom $\mathcal{R}(X)$ onda ona ima varijancu

$$Var(X) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 f(x_i).$$

Varijanca predstavlja srednje kvadratno odstupanje od očekivane vrijednosti slučajne varijable.

Varijancu možemo računati i pomoću relacije

$$Var(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) - (E(X))^2.$$

(Dokaz vidi kasnije - očekivanje funkcije slučajne varijable).

Definicija 5.7 *(STANDARDNA DEVIJACIJA, engl. standard deviation)*
Standardna devijacija slučajne varijable X definira se kao

$$\sigma(X) := \sqrt{Var(X)}.$$

PRIMJER 5.15 *Promatramo slučajan pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X = suma brojeva koji su pali. Nađite očekivanje i varijancu diskretne slučajne varijable X.*

Rješenje: $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1} x_i f(x_i) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) - (E(X))^2 \\ &= 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + 6^2 \cdot \frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{6}{36} + 8^2 \cdot \frac{5}{36} \\ &\quad + 9^2 \cdot \frac{4}{36} + 10^2 \cdot \frac{3}{36} + 11^2 \cdot \frac{2}{36} + 12^2 \cdot \frac{1}{36} - 7^2 \\ &= 5.83. \end{aligned}$$

PRIMJER 5.16 *Promatramo slučajan pokus gađanja u metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka mete je $\frac{1}{2}$. Neka je slučajna varijabla X = broj pogodaka u metu. Izračunajte očekivanje i varijancu.*

Rješenje: Slučajna varijabla X je $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) - (E(X))^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - (\frac{3}{2})^2 \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5.2 Ponovimo

DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA

diskretna slučajna varijabla	$X : \Omega \to \mathbb{R}$
slika diskretne slučajne varijable	$\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$
vjerojatnost da sl. var. poprimi vrijednost x_i	$P(X = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\})$
funkcija vjerojatnosti dis. sl. var. X	$f(x) = P(X = x_i),\ x = x_i \in \mathcal{R}(X)$
funkcija distribucije dis. sl. var. X	$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} f(x_i)$
očekivanje dis. sl. var. X	$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$
varijanca dis. sl. var. X	$Var(X) := \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 f(x_i)$