Sadržaj

Poglavlje 6

PRIMJERI DISKRETNIH SLUČAJNIH VARIJABLI

U ovom poglavlju istaknut ćemo diskretne slučajne varijable koje se pojavljuju u određenim ”scenarijima” i njihove funkcije vjerojatnosti definirat će se kao specifične distribucije (razdiobe): binomna, Poissonova, hipergeometrijska, geometrijska. Binomna distribucija vezana je uz scenario Bernoullijeve sheme, Poissonova je granični slučaj binomne, hipergeometrijska distribucija odgovara uzorku bez vraćanja, a scenario u kome se broje pokušaji dok se ne dogodi željeni događaj prati geometrijska distribucija.

6.1 Bernoullijeva shema. Binomna distribucija (razdioba)

MOTIV 6.1 *U velikoj kutiji nalazi se* $p = 10\%$ *neispravnih proizvoda. Ako uzmemo uzorak od* $r = 5$ *proizvoda iz kutije (s vraćanjem), slučajna varijabla* $X =$ *broj neispravnih proizvoda u uzorku ima binomnu distribuciju* $X \sim B(r, p)$. *Izračunajte vjerojatnost*
(a) da se ne pojavi niti jedan neispravni proizvod,
(b) da se pojavi jedan neispravni proizvod u uzorku,
(c) da se pojavi bar jedan neispravni proizvod u uzorku.

Jacob Bernoulli (1654-1705) je bio jedan od najpoznatih članova švicarske matematičke obitelji Bernoulli.

Definicija 6.1 *(Bernoullijeva shema)*

U m nezavisnih pokusa, vjerojatnost da se dogodi događaj A u svakom od njih je jednaka i $P(A) = p$. Takvu shemu događaja zovemo Bernoullijeva shema.
(Pretpostavljamo da su pokusi nezavisni, tj. da vjerojatnost pojave događaja A u svakom od pokusa ne ovisi od toga da li se on dogodio ili nije u nekom drugom pokusu.)

Definicija 6.2 *(Binomna slučajna varijabla)*

Slučajnu varijablu X = broj pojavljivanja događaja A u $m \in \mathbb{N}$ pokusa u Bernoullijevoj shemi s vjerojatnošću p, $p \in (0,1)$ zovemo Binomna slučajna varijabla.
Specijalno, slučaju samo jednog pokusa $m = 1$ slučajnu varijablu zovemo Bernoullijeva.
Slika Binomne slučajne varijable je $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, ..., m\}$.
Funkcija vjerojatnosti Binomne slučajne varijable je

$$f(x) := \begin{cases} P(X = k) = \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k}, & x = k \in \mathcal{R}(X) \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Funkcija distribucije Binomne slučajne varijable je

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k: k \le x} \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k}, & 0 \le x < m \\ 1, & m \le x. \end{cases}$$

Definicija 6.3 *(BINOMNA DISTRIBUCIJA)*

Za sve slučajne varijable koje imaju sliku $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, ..., m\}$ i funkciju vjerojatnosti

$$f(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, \ x \in \mathcal{R}(X)$$

kažemo da imaju BINOMNU DISTRIBUCIJU (RAZDIOBU) s parametrima m i p i označavamo

$$X \sim B(m, p).$$

PRIMJER 6.1 *Funkcija $f(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$ je funkcija vjerojatnosti.*
Prisjetimo se Binomnog teorema i iskoristimo za računanje

$$\begin{aligned} \sum_{0 \le x \le m} f(x) &= \sum_{0 \le x \le m} \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x} = \sum_{0 \le k \le m} \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k} \\ &= (p + (1-p))^m = 1. \end{aligned}$$

PRIMJER 6.2 *Očekivanje diskretne slučajne varijable koja ima binomnu distribuciju $X \sim B(m, p)$ je*

$$E(X) = m \cdot p$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{0\leq x\leq m} x\cdot f(x) = \sum_{x=0}^{m} x\binom{m}{x}p^x\cdot(1-p)^{m-x} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k\cdot\binom{m}{k}p^k\cdot(1-p)^{m-k} \\
&= mp\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}p^{k-1}\cdot(1-p)^{(m-1)-(k-1)} \\
&= mp\cdot(1-(1-p))^{m-1} = mp\cdot 1 = mp.
\end{aligned}$$

PRIMJER 6.3 *Varijanca diskretne slučajne varijable koja ima binomnu distribuciju $X \sim B(m,p)$ je*

$$Var(X) = m\cdot p\cdot(1-p)$$

Rješenje: (pokušajte sami)

NAPOMENA 6.1 *Ako je $p = 1/2$ binomna distribucija je simetrična.*

PRIMJER 6.4 *Promatramo slučajan pokus gađanja u metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka mete je $\frac{1}{2}$. Neka je slučajna varijabla X = broj pogodaka u metu. Nađite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X, očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
To je Bernoullijeva shema događaja s $m = 3$ nezavisna pokusa (ili ponavljamo isti pokus 3 puta nezavisno). Promatramo događ aj A = pogodak u metu.

$P(A) = \frac{1}{2} = p$ u svakom nezavisnom ponavljanju.

Slučajna varijabla
X = broj pojavljivanja događaja A (broj uspjeha) ima binomnu distribuciju $X \sim B(m,p) = B(3, \frac{1}{2})$.
Funkcija vjerojatnosti je

$$\begin{aligned}
f(x) &:= \begin{cases} P(X=k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^k\cdot(1-\frac{1}{2})^{3-k}, & x = k\in\{0,1,2,3\} \\ 0, & \text{inače.}\end{cases} \\
&= \begin{cases} \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3, & x = k\in\{0,1,2,3\} \\ 0, & \text{inače.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Funkcija distribucije je:

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum\limits_{k:k\le x} \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^k \cdot (1-\frac{1}{2})^{3-k}, & 0 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum\limits_{k:k\le x} \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3, & 0 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$$

$$E(X) = mp = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad Var(X) = mp(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

(Do ovih rezultata došli smo i kad smo razmatrali taj primjer slučajne varijable u prethodnom poglavlju.)

PRIMJER 6.5 *Bacamo kocku 4 puta. Neka je slučajna varijabla X = broj šestica. Da li je to slučajna varijabla koja ima binomnu distribuciju? Nađite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X, očekivanje i varijancu. Izračunajte vjerojatnost da su pale bar dvije šestice?*

Rješenje:

To je Bernoullijeva shema događaja s $m = 4$ nezavisna pokusa (ili ponavljamo isti pokus 4 puta nezavisno). Promatramo događaj A = "pala je 6". $P(A) = \frac{1}{6} = p$ u svakom nezavisnom ponavljanju. Slučajna varijabla X = broj šestica je broj pojavljivanja A (broj uspjeha) i ona ima binomnu distribuciju $X \sim B(m,p) = B(4, \frac{1}{6})$. Funkcija vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} \binom{4}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{4-k}, & x = k \in \{0,1,2,3,4\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija distribucije je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum\limits_{k:k\le x} \binom{4}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{4-k}, & 0 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x. \end{cases}$$

$$E(X) = mp = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}, \quad Var(X) = mp(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{36}.$$

Trebamo odrediti $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - F(2-) = 1 - \sum_{i:x_i<2} f(x_i) \\ &= 1 - (f(0) + f(1)) = 1 - ((\tbinom{4}{0})(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^4 + (\tbinom{4}{1})(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{4-1}) \\ &= \frac{171}{1296} \end{aligned}$$

PRIMJER 6.6 *tko želi znati više*

Označimo vrijednost funkcije vjerojatnosti f binomne distribucije s parametrima m i p s $f(m,p;k), k \in \{0,1,...,m\}$. Tada vrijedi rekurzivna relacija

$$f(m,p;k+1) = \frac{m-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} f(m,p;k)$$

Dokaz: Računamo

$$\frac{f(m,p;k+1)}{f(m,p;k)} = \frac{n! \cdot p^{k+1}(1-p)^{m-k-1}}{(k+1)!(m-k-1)!} : \frac{n! \cdot p^k(1-p)^{m-k}}{k!(m-k)!} = \frac{m-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

NAPOMENA 6.2 *Prisjetimo se primjera za uzorak s vraćanjem.*
Slučajni pokus: izbor od r elemenata (s vraćanjem) iz skupa koji ima n elemenata $n = n_T + n_D$, $r = r_T + r_D$.
Ω =svi uzorci veličine r iz n-čl. skupa, važan poredak
$|\Omega| = \overline{V}_n^{(r)} = n^r$;
Događaj A="uzorak ima r_T ispravnih i r_D neispravnih";
$|A|$ =Broj svih uzoraka veličine r iz n -čl. skupa s vraćanjem koji imaju r_T ispravnih i r_D neispravnih:
Koristimo formulu za uzorak s vraćanjem $|A| = \binom{r}{r_T} \cdot (n_T)^{r_T} \cdot (n - n_T)^{(r-r_T)}$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{r}{r_T} \cdot (n_T)^{r_T} \cdot (n-n_T)^{r-r_T}}{n^r} = \binom{r}{r_T} \cdot (\frac{n_T}{n})^{r_T} \cdot (1 - (\frac{n_T}{n}))^{(r-r_T)}.$$

Promatramo slučajnu varijablu
X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elemenata, od toga n_T ispravnih
Ako s $p = \frac{n_T}{n}$ označimo postotak točnih (ispravnih) proizvoda ukupno, onda slučajna varijabla X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima postotak p ispravnih elemenata ima binomnu distribuciju s parametrima r i p, $X \sim B(r,p)$. (Analogno za neispravne elemente)

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 6.7 *motiv*

U velikoj kutiji nalazi se $p = 10\%$ neispravnih proizvoda. Ako uzmemo uzorak od $r = 5$ proizvoda iz kutije (s vraćanjem), slučajna varijabla $X =$ broj neispravnih proizvoda u uzorku ima binomnu distribuciju $X \sim B(r, p)$. Izračunajte vjerojatnost
(a) da se ne pojavi niti jedan neispravni proizvod,
(b) da se pojavi jedan neispravni proizvod u uzorku,
(c) da se pojavi bar jedan neispravni proizvod u uzorku.

Rješenje:
(a) $P(X = 0) = f(0) = f(5, \frac{1}{10}; 0) = \binom{5}{0}(\frac{1}{10})^0(1 - \frac{1}{10})^5 = 0.59049.$
(b) Možemo računati direktno

$$P(X = 1) = f(1) = f(5, \frac{1}{10}; 1) = \binom{5}{1}(\frac{1}{10})(1 - \frac{1}{10})^4 = \frac{5}{10}0.6561 = 0.32805.$$

Drugi način je da koristimo rekurzivnu formulu:*tko želi znati više*

$$f(r, p; k + 1) = \frac{r - k}{k + 1} \cdot \frac{p}{1 - p} f(r, p; k)$$

$$P(X = 1) = f(r, p; 1) = \frac{r - 0}{0 + 1} \cdot \frac{p}{1 - p} f(r, p; 0) = r\frac{p}{1 - p} f(r, p; 0).$$

Za $r = 5$ i $p = \frac{1}{10}$

$$P(X = 1) = f(5, \frac{1}{10}; 1) = 5\,\frac{1}{9}\,f(5, \frac{1}{10}; 0) = \frac{5}{9}0.59049 = 0.32805.$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - (1 - p)^m \\ &= 1 - (1 - \frac{10}{100})^5 = 1 - (\frac{9}{10})^5 = 1 - 0.59049 = 0.4095. \end{aligned}$$

NAPOMENA 6.3 *Ako $m \to \infty$ binomna distribucija teži normalnoj distribuciji (vidi kasnije - Moivre Laplace teorem).*

NAPOMENA 6.4 *Ako $p \to 0$ i $m \to \infty$ binomna distribucija teži Poissonovoj (vidi Poissonova distribucija).*

6.2 POISSONOVA DISTRIBUCIJA

MOTIV 6.2 *Kroz naplatnu kućicu prođu prosječno u minuti 2 automobila. Kolika je vjerojatnost da će u toku bilo koje minute proći*
(a) jedan automobil,
(b) barem 3 automobila?

Francuski matemati čar Simeon D. Poisson (1781-1840) je 1838 objavio rad u kojem je promatrao slučajne varijable koje broje dolaske na neko mjesto u vremenskom intervalu određene duljine.

Definicija 6.4 *(POISSONOVA DISTRIBUCIJA)*

Za diskretnu slučajnu varijablu X koja ima sliku $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, ..\}$ *i funkciju vjerojatnosti*

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x \in \mathcal{R}(X)$$

kažemo da ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ *i označavamo*

$$X \sim Po(\lambda).$$

PRIMJER 6.8 *Funkcija* $f(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$ *je funkcija vjerojatnosti. Prisjetimo se razvoja eksponencijalne funkcije u McLaurinov red* $e^x = \sum\limits_{0 \le x \le \infty} \dfrac{x^k}{k!}$.
Računamo

$$\sum_{0 \le k \le \infty} f(k) = \sum_{0 \le k \le \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1.$$

PRIMJER 6.9 *Očekivanje diskretne slučajne varijable koja ima Poissonovu distribuciju* $X \sim Po(\lambda)$ *je*

$$E(X) = \lambda.$$

Rješenje:

$$E(X) = \sum_{0 \le k \le \infty} k \cdot f(k) = \sum_{x=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

PRIMJER 6.10 *Varijanca diskretne slučajne varijable koja ima Poissonovu distribuciju* $X \sim Po(\lambda)$ *je*

$$Var(X) = \lambda.$$

Rješenje: (Pokušajte sami).

PRIMJER 6.11 *Ako u Bernoullijevoj shemi broj m nezavisnih pokusa teži* ∞ *(jako velik) a vjerojatnost događaja A kojeg promatramo u svakom pokusu teži* 0 *(jako mala) onda slučajna varijabla* X = *broj pojavljivanja događaja A ima binomnu distribuciju koju možemo dobro aproksimirati s Poissonovom distribucijom s parametrom* $\lambda = mp$*, tj.* $X \sim Po(mp)$.

Dokaz: *tko želi znati višr*

Neka je $X \sim B(m, p)$, s parametrima $m \to \infty,\ p \to 0,\ m \cdot p \to \lambda$.
Računamo graničnu vrijednost funkcije vjerojatnosti binomne distribucije:

$$
\begin{aligned}
\lim f(k) &= \lim_{m\to\infty,\ p\to 0,\ m\cdot p\to\lambda} \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k} \\
&= \lim_{p\to\frac{\lambda}{m}} \binom{m}{k} (\frac{\lambda}{m})^k \cdot (1-\frac{\lambda}{m})^{m-k} \\
&= \frac{(\lambda)^k}{k!} \lim_{m\to\infty} (m(m-1)\cdot(m-k+1)) \frac{1}{m^k} (1-\frac{\lambda}{m})^{m-k} \\
&= \frac{(\lambda)^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Dobili smo funkciju vjerojatnosti Poissonove distribucije za $\lambda = mp$.

PRIMJER 6.12 *U velikoj kutiji nalazi se* $p = 1\%$ *neispravnih proizvoda. Ako uzmemo uzorak od* $r = 100$ *proizvoda iz kutije, slučajna varijabla* X = *broj neispravnih proizvoda u uzorku ima binomnu distribuciju* $X \sim B(r, p)$. *Budući je r veliki u odnosu na mali p i* $r \cdot p = 1$ *slučajnu varijablu X možemo aproksimirati Poissonovom distribucijom* $X \sim Po(rp)$. *Izračunajte vjerojatnost da se pojavi bar jedan neispravni proizvod u uzorku.*

Rješenje:
Računamo po Poissonovoj distribuciji: $X \sim Po(\lambda),\ \lambda = r \cdot p = 1$,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = 0.6321$$

Ako bi računali po binomnoj distribuciji: $X \sim B(r, p),\ r = 100,\ p = \frac{1}{10}$,

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) \\
&= 1 - \binom{100}{0} (99/100)^{100} = 1 - 0.3660 = 0.63396
\end{aligned}
$$

Usporedimo li rezultate dobivene vidimo da greška nije velika.

PRIMJER 6.13 *Promatramo broj automobila koji prođu kroz kontrolnu točku u intervalima od 1 minute. Neka je p konstantna vjerojatnost da će auto proći u svakom kratkom intervalu unutar 1 minute (i pretpostavimo nezavisnost o drugim događajima u tom kratkom vremenu). Slučajna varijabla* X = *broj automobila koji prođu kroz kontrolnu točku ima Poissonovu distribuciju s parametrom* $\lambda = 60 \cdot \frac{p}{60} = p$ = *prosječan broj automobila koji prođu kontrolnu točku u 1 minuti,* $X \sim Po(\lambda)$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 6.14 *motiv*

Kroz naplatnu kućicu prođu prosječno u minuti 2 automobila. Kolika je vjerojatnost da će u toku bilo koje minute proći
(a) jedan automobil,
(b) barem 3 automobila?

Rješenje: Broj automobila koji prođu naplatnu kućicu u jednoj minuti ima Poissonovu distribuciju $X \sim Po(\lambda)$, $\lambda = 2$
(a) $P(X = 1) = f(1) = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} = 2 \cdot e^{-2} = 0.27067$
(b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - (f(0) + f(1) + f(2)) \\ &= 1 - (e^{-2}(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!})) = 1 - (0.6766) = 0.3232. \end{aligned}$$

NAPOMENA 6.5 *Poissonova distribucija primjenjuje se u demografiji, biologiji, fizici, prometu i dr.*

6.3 HIPERGEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

MOTIV 6.3 *U velikom pakovanju od 100 cigli distributer garantira da je najviše $p = 10\%$ oštećenih. Kontrolor prihvaća pošiljku samo ako u uzorku od 10 proizvoda iz pakovanja (bez vraćanja) nema oštećenih. Kolika je vjerojatnost da će kontrolor odbiti pošiljku?*

NAPOMENA 6.6 *Prisjetimo se primjera za uzorak bez vraćanja. Slučajni pokus: izbor od r elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n elemenata $n = n_T + n_D$, $r = r_T + r_D$.*
Ω ={svi uzorci veličine r iz n-čl. skupa}, $|\Omega| = \binom{n}{r}$;
Događaj A="uzorak ima r_T ispravnih i r_D neispravnih";
$|A|$ =Broj svih uzoraka veličine r iz n -čl. skupa bez vraćanja koji imaju r_T ispravnih i r_D neispravnih.
Koristimo formulu za uzorak bez vraćanja:

$$|A| = C_{n_T}^{(r_T)} \cdot C_{n_D}^{(r_D)} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n_D}{r_D} = \binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n - n_T}{r - r_T}.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n_T}{r_T} \cdot \binom{n-n_T}{r-r_T}}{\binom{n}{r}}.$$

Promatramo slučajnu varijablu X = broj ispravnih predmeta u r-članom uzorku iz skupa koji ima n elemenata od toga n_T ispravnih.

Definicija 6.5 *(HIPERGEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA)*
Slučajne varijable X koje imaju sliku $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, .., n_T\}$ i funkciju vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{\binom{n_T}{x} \cdot \binom{n-n_T}{r-x}}{\binom{n}{r}}, \quad x \in \mathcal{R}(X)$$

gdje su $n_T \leq n$, $r \leq n$, n, n_T, $r \in \mathbb{N}$ kažemo da imaju Hipergeometrijsku distribuciju s parametrima n, r, n_T i označavamo $X \sim Hip\,(n, r, n_T)$.

PRIMJER 6.15 *Funkcija $f(x) = \frac{\binom{n_T}{x} \cdot \binom{n-n_T}{r-x}}{\binom{n}{r}}$, $x \in \mathcal{R}(X)$ je funkcija vjerojatnosti.*

Rješenje: Koristimo kombinatorni identitet

$$\sum_{0 \leq x \leq n_T} \binom{n_T}{x} \cdot \binom{n - n_T}{r - x} = \binom{n}{r}$$

PRIMJER 6.16 *Slučajnu varijablu $X \sim Hip(n, r, n_T)$ ima očekivanje*

$$E(X) = r \cdot \frac{n_T}{n};$$

i varijancu

$$Var(X) = \frac{r \cdot n_T \cdot (n - n_T) \cdot (n - r)}{n^2 \cdot (n-1)}.$$

PRIMJER 6.17 *Slučajni pokus: izbor od $r = 3$ elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima $n = 10$ elemenata od kojih je $n_T = 7$.*
Promatramo slučajnu varijablu X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elemenata, od toga n_T ispravnih (bez vraćanja).
(a) Izračunajte vjerojatnost da su u uzorku dva ispravna elementa (točno)?
(b) Izračunajte vjerojatnost da su dva ispravna, ako je uzorak s vraćanjem?

Rješenje:
(a) Uzorak bez vraćanja pa X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elementata od toga n_T ispravnih (bez vraćanja) ima hipergeometrijsku distribuciju $X \sim Hip(n, r, n_T)$. Za $n = 10,\ r = 3,\ n_T = 7, X \sim Hip\,(10, 3, 7)$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{\binom{n_T}{2} \cdot \binom{n-n_T}{r-2}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{10-7}{3-2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{7}{2} \cdot 3}{\binom{10}{3}} = 0.525.$$

(b) Uzorak s vraćanjem pa X = broj ispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa koji ima n elementata od toga n_T ispravnih (s vraćanjem) ima binomnu distribuciju $X \sim B(r, p = \frac{n_T}{n})$. Za $n = 10,\ r = 3,\ n_T = 7, X \sim B(3, \frac{7}{10})$

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{r}{2} p^2 (1-p)^{r-2} = \binom{3}{2} (\frac{7}{10})^2 \cdot (1 - \frac{7}{10})^{3-2} = 0.441.$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 6.18 *motiv*

U velikom pakovanju od 100 cigli distributer garantira da je najviše $p = 10\%$ oštećenih. Kontrolor prihvaća pošiljku samo ako u uzorku od 10 proizvoda iz pakovanja (bez vraćanja) nema oštećenih. Kolika je vjerojatnost da će kontrolor odbiti pošiljku?

Rješenje:
Uzorak bez vraćanja pa X = broj neispravnih predmeta u r članom uzorku iz skupa

koji ima n elementata od toga n_D neispravnih (bez vraćanja) ima hipergeometrijsku distribuciju $X \sim Hip(n, r, n_D)$. Za $n = 100,\ r = 10,\ n_D = 10$, $X \sim Hip\,(100, 10, 10)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \frac{\binom{n_D}{0} \cdot \binom{n-n_D}{r-0}}{\binom{n}{r}} \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{100-10}{10-0}}{\binom{100}{10}} \\ &= 1 - \frac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} \\ &= 0.67. \end{aligned}$$

Vjerojatnost da će kontolor odbiti pošiljku je 0.67.

NAPOMENA 6.7 *Ako je n, n_T, $n - n_T$ veliki u odnosu na r onda nije važno je li uzorak s vraćanjem ili bez vraćanja i $Hip\,(n, r, n_T)$ distribucija teži $B(r, p = \frac{n_T}{n})$.*
Ako je uzorak iz nepoznato velike populacije možemo opet koristiti binomnu distribuciju bez obzira na vraćanje.

6.4 GEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

MOTIV 6.4 *Student izlazi na ispit dok ga ne položi. Ako je vjerojatnost polaganja ispita svaki put jednaka* $p = \frac{1}{5}$*, (jer je student naučio petinu gradiva) kolika je vjerojatnost da će student 4 puta izlaziti na ispit dok ga ne položi?*

Definicija 6.6 *(Geometrijska slučajna varijabla)*

Slučajnu varijablu X = broj ponavljanja pokusa (nezavisnih) dok se ne dogodi događaj A čija je vjerojatnost $p \in (0,1)$*, zovemo geometrijska slučajna varijabla.*
Slika geometrijske slučajne varijable je $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, ...\}$*.*
Funkcija vjerojatnosti Binomne slučajne varijable je

$$f(x) := \begin{cases} P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, & x = k \in \mathcal{R}(X) \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Definicija 6.7 *(GEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA)*

Za sve slučajne varijable koje imaju sliku $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, ...\}$ *i funkciju vjerojatnosti*

$$f(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p, \ x \in \mathcal{R}(X)$$

kažemo da imaju GEOMETRIJSKU DISTRIBUCIJU (RAZDIOBU)
s parametrom p i označavamo

$$X \sim G(p).$$

PRIMJER 6.19 *Funkcija* $f(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$ *je funkcija vjerojatnosti.*
Prisjetimo se sume geometrijskog reda i iskoristimo za računanje

$$\sum_{1 \le k \le \infty} f(x) = \sum_{1 \le k \le \infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = p \sum_{1 \le k \le \infty} (q)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

PRIMJER 6.20 *Očekivanje diskretne slučajne varijable koja ima geometrijsku distribuciju* $X \sim G(p)$ *je*

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Rješenje:
Prisjetimo se da konvergentan red (npr. geometrijski) možemo derivirati član po član, pa vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = (\frac{1}{1-q})' = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{1\leq k\leq\infty} k\cdot f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}\cdot p = p\cdot\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} \\ &= p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

PRIMJER 6.21 *Varijanca diskretne slučajne varijable koja ima geometrijsku distribuciju $X \sim G(p)$ je*

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Rješenje: (pokušajte sami)

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 6.22 *motiv*

Student izlazi na ispit dok ga ne položi. Ako je vjerojatnost polaganja ispita svaki put jednaka $p = \frac{1}{5}$, kolika je vjerojatnost da će student 4 puta izlaziti na ispit dok ga ne položi?

Rješenje: $X \sim G(p)$, $p = 0.2$,

$$P(X=4) = f(4) = (1-p)^{4-1}\cdot p = (1-p)^3\cdot p = \frac{64}{625} = 0.102.$$

6.5 Ponovimo

BINOMNA DISTRIBUCIJA (RAZDIOBA)

binomna distribucija	$X \sim B(m, p)$
slika binomne sl. var.	$\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, ..., m\}$
funkcija vjerojatnosti	$f(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$
očekivanje	$E(X) = mp$
varijanca	$Var(X) = mp(1-p)$

POISOONOVA DISTRIBUCIJA

Poissonova distribucija	$X \sim Po(\lambda)$
slika Poissonove sl. var.	$\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, ...\}$
funkcija vjerojatnosti	$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$
očekivanje	$E(X) = \lambda$
varijanca	$Var(X) = \lambda$

HIPERGEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

hipergeometrijska distribucija	$X \sim Hip\,(n, r, n_T)$
slika Poissonove sl. var.	$\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, .., n_T\}$
funkcija vjerojatnosti	$f(x) = \frac{\binom{n_T}{x} \cdot \binom{n-n_T}{r-x}}{\binom{n}{r}}$
očekivanje	$E(X) = r \cdot \frac{n_T}{n}$
varijanca	$Var(X) = \frac{r \cdot n_T \cdot (n-n_T) \cdot (n-r)}{n^2 \cdot (n-1)}$

GEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

geometrijska distribucija	$X \sim G(p)$
slika Poissonove sl. var.	$\mathcal{R}(X) = \{1, 2, ...\}$
funkcija vjerojatnosti	$f(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$
očekivanje	$E(X) = \frac{1}{p}$
varijanca	$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$