Sadržaj

Poglavlje 7

KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA

MOTIV 7.1 *Neka je omjer prodaje i profita slučajna varijabla* $X = \frac{100}{profit}$. *Neka je poslovanje takvo da je nemoguće da će profit biti veći ili jednak* 50% , *a sigurno će profit biti veći ili jednak* 33.3%. *Neka je vjerojatnost da će omjer X poprimiti vrijednost manju ili jednaku x zadan sa funkcijom* $F(x) = \frac{(x^2-4)}{5}$. *Kolika je vjerojatnost da će profit biti između* 40% *i* 20%? *Koliki je očekivani profit?*

MOTIV 7.2 *Vrijeme trajanja sijalica je slučajna varijabla X. Uzimamo uzorak i 5% sijalica traje do 100 sati. Kolika je vjerojatnost da će nova sijalica trajati duže od 200 sati tj.* $P(X > 200)$?

Definicija 7.1 *KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Za funkciju* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kažemo da je kontinuirana slučajna varijabla ako je slika* $\mathcal{R}(X)$ *interval* $I \subseteq \mathbb{R}$, *ako slika ne sadrži izolirane točke i ako za svaki interval* $I \subset \mathbb{R}$ *praslika* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ *je familija skupova u* $\mathcal{F}$.

Definicija 7.2 *Za kontinuiranu slučajnu varijablu* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *definiramo vjerojatnost da poprimi vrijednosti iz intervala* $I \subset \mathbb{R}$:

$$P(X \in I) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\});$$

$P(X = a) = 0$ *za bilo koji* $a \in \mathbb{R}$.

Definicija 7.3 *(FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI SL. VAR. engl. probability density function)*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kontinuirana slučajna varijabla sa slikom* $\mathcal{R}(X)$. *Funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiranu na sljedeći način:*

$$f(x) := \lim_{\triangle x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \triangle x)}{\triangle x}, \; x \in \mathcal{R}(X)$$

zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X.
Za funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(a \leq X \leq b).$$

NAPOMENA 7.1 *Geometrijsku interpretaciju funkcije gustoće* f *dobijemo pomoću geometrijske interpretacije određenog integrala funkcije* f :

$P(a \leq X \leq b)$ *je površina ispod krivulje gustoće vjerojatnosti* f *na segmentu* $[a, b]$.

T: SVOJSTVA funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X.
(i) $f(x) \geq 0, \; x \in \mathcal{R}(X)$
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

D:
(i) Za $x \in \mathcal{R}(X), \; x \in I \subseteq \mathbb{R}, \; f(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \triangle x)}{\triangle x} \geq 0$,
(ii) Za $\mathcal{R}(X) = \mathbb{R}$ svojstvo (ii) slijedi iz ekvivalentne definicije od f i svojstva (P2), normiranosti funkcije P: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(X \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$.

NAPOMENA 7.2 *Budući da slika kontinuirane slučajne varijable ne sadrži izolirane točke*
$P(X = a) = 0$ *onda vrijedi (za razliku od diskretnih slučajnih varijabli):*

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

NAPOMENA 7.3 *tko želi znati više*

Svojstvo $\int_a^b f(x)\,dx = P(a \leq X \leq b)$ *ekvivalentno je definiciji od* f.

Promatramo segment $[a, b]$ *i gledamo subdivizije*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \;\; x_{i+1} = x_i + \triangle x_i, \;\; i = 1, .., n.$$

Postoji $t_i \in [x_i, x_i + \triangle x_i]$ *tako da* $P(x_i \leq X \leq x_i + \triangle x) \approx f(t_i) \cdot \triangle x_i$,

$\sum_i P(x_i \leq X \leq x_i + \triangle x_i) \approx \sum_i f(t_i) \cdot \triangle x_i$.

Ako promatramo $\lim_{\triangle x_i \to 0}$ *po svim subdivizijama, na desnoj strani prepoznajemo definiciju određenog integrala funkcije* f *na segmentu* $[a, b]$, *pa slijedi*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

PRIMJER 7.1 *Kontinuirana slučajna varijabla je zadana sa svojom slikom* $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{R}$. *Zadana je funkcija* f*:*

$$f(x) := \begin{cases} a \cdot x, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & x < 0,\, x > 5. \end{cases}$$

(a) Odredite konstantu a tako da funkcija f *bude gustoća vjerojatnosti slučajne varijable* X.

(b) Izračunajte vjerojatnost $P(0 < X < 2)$.

(c) Skicirajte graf funkcije f.

Rješenje:

(a) Da bi f bila funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable ona mora imati svojstva nenegativnosti i svojstvo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Zato, iz $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^5 a \cdot x\,dx = 1$ dobivamo da je $a = \dfrac{1}{\int_0^5 x\,dx} = \dfrac{1}{25/2} = \dfrac{2}{25}$.

Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}\,x, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & x < 0,\, x > 5. \end{cases}$$

(b) $P(0 < X < 2) = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{2}{25}\,x\,dx = \frac{2}{25} \cdot \frac{4}{2} = \frac{4}{25}$.

(c) Funkcija f je definirana na cijelom $\mathbb{R}$, neprekinuta je na $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Definicija 7.4 *(FUNKCIJA DISTRIBUCIJE KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE, engl. distribution function)*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kontinuirana slučajna varijabla sa slikom* $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{R}$. *Funkciju* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiranu na sljedeći način:*

$$F(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

zovemo funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable X.

Veza funkcije vjerojatnosti i funkcije distribucije slučajne varijable je:

$$f(x) = F'(x).$$

T: SVOJSTVA FUNKCIJE DISTRIBUCIJE slučajne varijable:
(F1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$
(F2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = 1$
(F3) $0 \le F(x) \le 1$
(F4) F je neprekinuta funkcija, $F(x) := P(X \le x) = P(X < x)$,
(F5) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx,\ \ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$
(F6) F je rastuća funkcija.
D:
(F1) Kako je događaj $X \le -\infty$ nemoguć događaj

$$F(-\infty) := P(X \le -\infty) = P(\emptyset) = 0.$$

(F2) Kako je događaj $X \le \infty$ siguran događaj

$$F(\infty) := P(X \le \infty) = P(\Omega) = 1.$$

(F3) tvrdnja slijedi iz svojstava (F1) i (F2).
(F4) Iz definicije kontinuirane sl. varijable, slika nema izoliranih vrijednosti, pa je $P(X = a) = 0$ te na integral ne utječu točke prekida funkcije f.
(F5) Neka su $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Računamo

$$\begin{aligned} F(b) &= P(X \le b) = P((X \le a) \cup (a < X \le b)) \\ &= P(X \le a) + P(a < X \le b) = F(a) + P(a < X \le b) \end{aligned}$$

pa slijedi $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$.

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(F6) Neka su $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Iz svojstva (F5) slijedi da je $F(a) \le F(b)$, funkcija je rastuća.

PRIMJER 7.2 *Za funkciju distribucije kontinuirane slučajne varijable* $F(x) = P(X \le x)$ *vrijedi:*

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a),\ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} F(b) &= P(X < b) = P((X \le a) \cup (a < X < b)) \\ &= P(X \le a) + P(a < X < b) = F(a) + P(a < X < b) \end{aligned}$$

PRIMJER 7.3 *Slučajna varijabla X iz prethodnog primjera je zadana s funkcijom gustoće vjerojatnosti*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & x < 0, x > 5. \end{cases}$$

(a) Napišite funkciju distribucije.
(b) Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednosti veće od 0 i manje od 2 , $P(0 < X < 2) =?$
(c) Skicirajte graf funkcije distribucije $F(x)$.

Rješenje:
(a)

$$F(x) := P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{2}{25}t\,dt, & 0 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{25}, & 0 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x. \end{cases}$$

(b) $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{2^2}{25} - 0 = \frac{4}{25}$.
(c) Funkcija $F(x)$ je neprekinuta na $\mathbb{R}$.

Definicija 7.5 *(OČEKIVANJE KONTINUIRANE SL. VAR., engl. mean ili mathematical expectation)*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kontinuirana slučajna varijabla sa slikom* $\mathcal{R}(X)$ *i funkcijom vjerojatnosti* $f(x)$. *Kažemo da kontinuirana slučajna varijabla X ima očekivanje ako integral* $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$ *konvergira i označavamo*

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx.$$

Definicija 7.6 *(VARIJANCA ILI DISPERZIJA KONTINUIRANE SL. VAR., engl. variance)*

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kontinuirana slučajna varijabla sa slikom* $\mathcal{R}(X)$ *i funkcijom gustoće vjerojatnosti* $f(x)$. *Kažemo da kontinuirana slučajna varijabla X ima varijancu ako integral* $\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$ *konvergira i označavamo*

$$Var(X) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx.$$

Možemo računati varijancu i pomoću relacije

$$Var(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - (E(X))^2.$$

(Dokaz vidi kasnije - očekivanje funkcije slučajne varijable).

Definicija 7.7 *(STANDARDNA DEVIJACIJA, engl. standard deviation)*
Standardna devijacija slučajne varijable X definira se kao

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

PRIMJER 7.4 *Neka je zadana slučajna varijabla iz prethodnog primjera s funkcijom gustoće vjerojatnosti* $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & x < 0, x > 5. \end{cases}$
(a) Izračunajte očekivanje slučajne varijable $E(X)$.
(b) Izračunajte varijancu i standardnu devijaciju $Var(X)$, $\sigma(X)$.

Rješenje:
(a) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^5 x\frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\int_0^5 x^2dx = \frac{10}{3} = 3.333$
(b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (E(X))^2 = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2}{25}xdx - (\frac{10}{3})^2 \\ &= \frac{2}{25}\int_0^5 x^3dx - (\frac{10}{3})^2 = \frac{25}{18}. \end{aligned}$$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{6}\sqrt{2} = 1.178.$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 7.5 *motiv*
Neka je omjer prodaje i profita slučajna varijabla $X = \frac{100}{profit}$. *Neka je poslovanje takvo da je nemoguće da će profit biti veći ili jednak* 50% *, a sigurno će profit biti veći ili jednak* 33.3%. *Neka je vjerojatnost da će omjer X poprimiti vrijednost manju ili jednaku x zadan sa funkcijom* $F(x) = \frac{(x^2-4)}{5}$. *Kolika je vjerojatnost da će profit biti između* 40% *i* 20%*? Koliki je očekivani profit?*

Rješenje:
Slučajna varijabla $X = \frac{100}{profit}$ poprima vrijednosti npr. za profit 50% vrijednost

$X = 2$, a za profit 33.3% vrijdnost $X = 3$. Zaključujemo da je zadana funkcija distribucije $P(X \leq x) = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{(x^2-4)}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

Vjerojatnost da će profit biti između 40% i 20% odgovara pitanju $P(2.5 \leq X \leq 5)$. $P(2.5 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2.5) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20} = 0.55$ Očekivani profit odgovara očekivanoj vrijednosti od X.
Da bi izračunali očekivanje moramo izraziti funkciju gustoće vjerojatnosti f. Veza funkcije gustoće i funkcije distribucije je $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{2x}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & 3 \leq x. \end{cases}$$

Računamo očekivanje

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{2}^{3} x \frac{2x}{5} dx = \frac{38}{15} = 2.533.$$

Očekivani profit je dakle 39.47%.

7.1 FUNKCIJA SLUČAJNE VARIJABLE

MOTIV 7.3 *Neka je* $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$. *Opišite slučajnu varijablu* $Y = 3X + 1$.

Definicija 7.8 *(FUNKCIJA SLUČAJNE VARIJABLE) Neka je zadana po dijelovima neprekinuta funkcija* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i slučajna varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$. *Funkcija slučajne varijable* X *je slučajna varijabla* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *definirana kao kompozicija* $Y = h \circ X$.

TEOREM 7.1 *Ako je* $h(x)$ *strogo monotona i derivabilna onda funkciju slučajne varijable* $Y = h(X)$ *možemo definirati pomoću slučajne varijable* X :
(a) Ako je X *diskretna slučajna varijabla*

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X = h^{-1}(y)) = f(h^{-1}(y)).$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{x_i;\, h(x_i) \leq y} f(x_i).$$

$$E(Y) = \sum_i h(x_i) \cdot f(x_i)\,.$$

(b)Ako je X *kontinuirana slučajna varijabla*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1}(y))'|, & m < y < M \\ 0, & y \leq m,\ y \geq M. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & & y \leq m \\ F(h^{-1}(y)), & h'(x) > 0, & m < y < M \\ 1 - F(h^{-1}(y)), & h'(x) < 0, & m < y < M \\ 1, & & y \geq M. \end{cases}.$$

gdje smo označili $m = \min h(x),\ M = \max h(x)$.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx.$$

Dokaz: *tko želi znati više*
(a) $f_Y(y) = P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X = h^{-1}(y)) = f(h^{-1}(y))$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \leq h^{-1}(y)) = \sum_{x_i:\, x_i \leq h^{-1}(y)} f(x_i).$$

$$E(Y) = \sum_i y_i f_Y(y_i) = \sum_i h(x_i) f(h^{-1}(y_i)) = \sum_i h(x_i) f(x_i).$$

(b) Ako je X kontinuirana slučajna varijabla

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \begin{cases} P(X \leq h^{-1}(y), & h'(x) > 0, \\ 1 - P(X \leq h^{-1}(y), & h'(x) < 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = (F_Y(y))\prime = (F_X(h^{-1}(y)))' \cdot (h^{-1}(y))' = f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1}(y))'|.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(h^{-1}(y))(h^{-1}(y))' dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

PRIMJER 7.6 *Neka je zadana funkcija $h(x) = a \cdot x + b$, i slučajna varijabla X. Neka je Y funkcija slučajne varijable X, $Y = h(X)$, tj. $Y = a \cdot X + b$.*
(a) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Tada je Y definirana s:

$$f_Y(y) = f(\frac{y-b}{a}),$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{x_i;\, x_i \leq \frac{y-b}{a}} f(x_i),$$

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b,$$

$$Var(Y) = a^2 \cdot Var(X).$$

(b) Neka je X kontinuirana slučajna varijabla. Tada je Y definirana s:

$$f_Y(y) = f(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a},$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F(\frac{y-b}{a}), & a > 0, \\ 1 - F(\frac{y-b}{a}), & a < 0, \end{cases}$$

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b,$$

$$Var(X) = a^2 \cdot Var(X).$$

Rješenje:

(a) $f_Y(y) = P(Y = y) = P(aX + b = y) = P(X = \dfrac{y-b}{a}) = f(\dfrac{y-b}{a})$.

(b) $h(x)$ je strogo monotona za $a \neq 0$, $h^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$, $(h^{-1}(y))' = \dfrac{1}{a}$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a \cdot X + b \leq y) = \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}), & a > 0, \\ 1 - P(X \leq \frac{y-b}{a}), & a < 0. \end{cases}$$

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 7.7 *motiv*

Neka je $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$. *Opišite slučajnu varijablu* $Y = 3X + 1$.

Rješenje:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

PRIMJER 7.8 *Neka je zadana slučajna varijabla* X *s funkcijom gustoće vjerojatnosti* $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & x < 0, x > 5, \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{25}, & 0 \leq x < 5, \\ 1, & 5 \leq x, \end{cases}$

$E(X) = \frac{10}{3}$, $Var(X) = \frac{25}{18}$. *Opišite slučajnu varijablu* $Y = 3X + 1$.

Rješenje:

$h(x) = 3x + 1$, $m = min\, h(x) = 1$, $M = max\, h(x) = 16$, $x \in [0, 5]$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(\frac{y-1}{3}) \cdot \frac{1}{3}, & m < y < M \\ 0, & y \leq m, y \geq M \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{25 \cdot 3}(\frac{y-1}{3}), & 1 < y < 16 \\ 0, & y \leq 1, y \geq 16. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m \\ F(\frac{y-1}{3}), & m < y < M \\ 1, & y \geq M \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ \frac{1}{25}(\frac{y-1}{3})^2, & 1 < y < 16 \\ 1, & y \geq 16 \end{cases}$$

$$E(Y) = 3 \cdot E(X) + 1 = 3 \cdot \frac{10}{3} + 1 = 11$$

$$Var(Y) = 9 \cdot Var(X) = 9 \cdot \frac{25}{18} = \frac{25}{2}.$$

PRIMJER 7.9 *Varijanca slučajne varijable X je očekivanje slučajne varijable $Y = (X - E(X))^2$*
(a) $Var(X) = E(Y) = E((X - E(X))^2)$
(b) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Rješenje:
(a) slijedi iz defininicije varijance,
(b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Definicija 7.9 *(k-TI MOMENT)*
k-ti moment slučajne varijable X je očekivanje funkcije slučajne varijable X^k:

$$\mu_k = E(X^k).$$

PRIMJER 7.10 *Očekivanje je 1. moment slučajne varijable:*

$$\mu_1 = E(X) = \mu.$$

Definicija 7.10 *(k-TI CENTRALNI MOMENT)*
k-ti centralni moment slučajne varijable X je očekivanje funkcije slučajne varijable $(X - E(X))^k$:

$$\beta_k = E((X - E(X))^k).$$

PRIMJER 7.11 *Varijanca je 2. centralni moment slučajne varijable:*

$$\beta_2 = E((X - E(X))^2) = Var(X) = \sigma^2.$$

7.2 Ponovimo

KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA

slika kontinuirane slučajne varijable	$\mathcal{R}(X) = I \subset \mathbb{R}$
funkcija gustoće vjerojatnosti kon. sl. var.	$f(x) := \lim_{\triangle x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \triangle x)}{\triangle x}$
funkcija distribucije kon. sl. var. X	$F(x) := P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
očekivanje kon. sl. var. X	$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$
varijanca kon. sl. var. X	$Var(X) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$

FUNKCIJA OD SLUČAJNE VARIJABLE

Y je funkcija od slučajne varijable X	$Y = h(X)$,
$Y = a \cdot X + b$	$Y : \Omega \to \mathbb{R}$
očekivanje od Y	$E(Y) = a \cdot E(X) + b$
varijanca od Y	$Var(Y) = a^2 Var(X)$

FUNKCIJA od DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE $Y = a \cdot X + b$

funkcija vjerojatnosti od Y	$f_Y(y) = f(\frac{y-b}{a})$
funkcija distribucije od Y	$F_Y(y) = P(Y \le y) = \sum_{x_i;\, x_i \le \frac{y-b}{a}} f(x_i)$

FUNKCIJA od KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE $Y = a \cdot X + b$

funkcija gustoće vjerojatnosti od Y	$f_Y(y) = f(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a}$
funkcija distribucije od Y	$F_Y(y) = \begin{cases} F(\frac{y-b}{a}), & a > 0, \\ 1 - F(\frac{y-b}{a}), & a < 0, \end{cases}$