Sadržaj

Poglavlje 8

PRIMJERI KONTINUIRANIH SLUČAJNIH VARIJABLI

U ovom poglavlju istaknut ćemo kontinuirane slučajne varijable koje se pojavljuju u određenim "scenarijima" i njihove funkcije gustoće vjerojatnosti definirat će se kao specifične distribucije (razdiobe): normalna, uniformna, eksponencijalna, gama, hi-kvadrat, Studentova. Normalna distribucija, hi-kvadrat i studentova distribucija imaju veliku ulogu u matematičkoj statistici.

MOTIV 8.1 *Potrošnja materijala u nekom proizvodnom procesu je slučajan pokus. U prosjeku svaki dan se potroši 20 komada. Svaki mjesec se nabavlja 640 komada potrošnog materijala. Neka je X slučajna varijabla = vrijeme potrebno da se potroši zaliha (dogodi događaj α puta).*
(a) Kolika je vjerojatnost da ponestane potrošnog materijal?
(b) Kolika mora biti mjesečna nabavka da vjerojatnost nestašice bude 0.01?

8.1 NORMALNA DISTRIBUCIJA

Najvažnija kontinuirana distibucija je normalna distribucija. Ona se pojavljuje kao aproksimacija mnogih drugih distribucija i pojavljuje se u mnogim statističkim testovima. Njemački matematičar Carl F. Gauss (1777-1855) je 1809. godine objavio monografiju u kojoj je dao normalnu distribuciju kao model za pogreške u eksperimentu.

MOTIV 8.2 *Neka je kritična čvrstoća jednog tipa plastičnih ploča normalna slučajna varijabla X s očekivanom čvrstoćom 1250 kg i standardnom devijacijom 55 kg. Koje je maksimalno opterćenje takvo da je očekivani broj slomljenih ploča najviše* 5%*?*

Definicija 8.1 *(NORMALNA DISTRIBUCIJA)*

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X^* : \Omega \to \mathbb{R}$ *kažemo da ima standardnu normalnu distribuciju ili standardnu Gaussovu distribuciju s parametrima 0 i 1 i označavamo* $X^* \sim N(0,1)$ *ako ima funkciju gustoće vjerojatnosti*

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kažemo da ima normalnu distribuciju ili Gaussovu distribuciju s parametrima* μ *i* σ *i označavamo*
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *ako ima funkciju gustoće vjerojatnosti*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

NAPOMENA 8.1 *Ako* $X^* \sim N(0,1)$ *ima standardnu normalnu distribuciju, onda funkcija slučajne varijable* $X = \sigma \cdot X^* + \mu$ *ima normalnu distribuciju* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

PRIMJER 8.1 *Funkcija* $f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ *je funkcija gustoće vjerojatnosti.*

Rješenje: Koristimo izvod $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

PRIMJER 8.2 *Funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable* $X^* \sim N(0,1)$ *je*

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

$$F^*(x) = 1 - F^*(-x)$$

Funkcija distribucije normalne slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *je*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\,dt.$$

Rješenje: Koristimo definiciju funkcije distribucije kontinuirane slučajne varijable $F^*(x) = \int_{-\infty}^{x} f^*(t)\,dt$ i formulu za funkciju distribucije za funkciju slučajne varijable $X = \sigma \cdot X^* + \mu$, $F(y) = F^*(\frac{y-\mu}{\sigma})$.

PRIMJER 8.3 *(a) Za* $X^* \sim N(0,1)$, $E(X^*) = 0$, $Var(X) = 1$.
(b) Za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $E(X^*) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$.

Rješenje: Koristimo izvod $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.
(a) $E(X^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x f^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$ (neparna funkcija).

$$\begin{aligned} Var(X^*) &= E((X^*)^2) - (E(X^*))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$E(X) = E(\sigma \cdot X^* + \mu) = \sigma \cdot E(X^*) + \mu = \mu,$$

$$Var(X) = Var(\sigma \cdot X^* + \mu) = \sigma^2 Var(X^*) = \sigma^2.$$

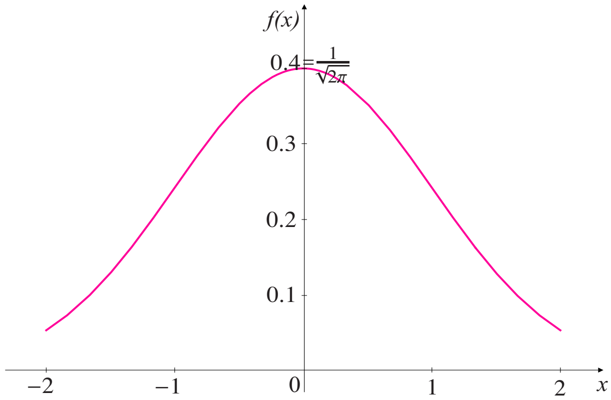
PRIMJER 8.4 *Skicirajte graf funkcije gustoće vjerojatnosti* $f(x)$. *Krivulja se zove Gaussova zvonolika krivulja. Krivulja je simetrična u odnosu na pravac* $x = \mu$. *dostiže maksimum u točki* $(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$, *a točke infleksije su u* $\mu - \sigma$ *i* $\mu + \sigma$. *Os x je horizontalna asimptota. Ako* $\sigma < 1$ *graf se sužava i maksimala vrijednost raste, a ako je* $\sigma > 1$ *graf se širi i maksimalna vrijednost pada.*

PRIMJER 8.5 *Neka je* $X^* \sim N(0,1)$. *Tada možemo izračunati vjerojatnost da slučajna varijabla* X^* *poprimi vrijednost iz nekog intervala* $[a,b]$:

$$P(\alpha \leq X^* \leq \beta) = F^*(\beta) - F^*(\alpha).$$

Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Tada možemo izračunati vjerojatnost da slučajna varijabla* $X = \sigma \cdot X^* + \mu$ *poprimi vrijednost iz nekog intervala* $[a,b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = F^*(\frac{b-\mu}{\sigma}) - F^*(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$



Slika 8.1: Graf funkcije gustoće vjerojatnosti $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ jediniďż˝ne normalne sluďż˝ajne varijable $X \sim N(0, 1)$.

NAPOMENA 8.2 *U literaturi je poznata Laplaceova funkcija*

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x exp^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

Ona je obično tabelirana. Veza funkcija F^*, F i $L(x)$ je sljedeća:

$$F^*(x) = \frac{1}{2} + L(x)$$

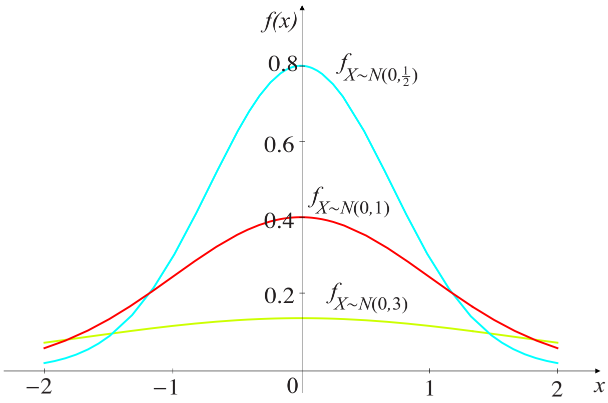
$$F(x) = \frac{1}{2} + L(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

PRIMJER 8.6 *Slučajna varijabla $X \sim N(20, 4)$. Provjerite*
(a) $P(18 \le X \le 22) = 0.68$
(b) $P(16 \le X \le 24) = 0.95$
(c) $P(14 \le X \le 26) = 0.99$

Rješenje:

$$\begin{aligned} (a)\ \ P(18 \le X \le 22) &= F^*(\frac{22-20}{2}) - F^*(\frac{18-20}{2}) = F^*(1) - F^*(-1) \\ &= F^*(1) - (1 - F^*(1)) = 2F^*(1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = 0.68 \end{aligned}$$

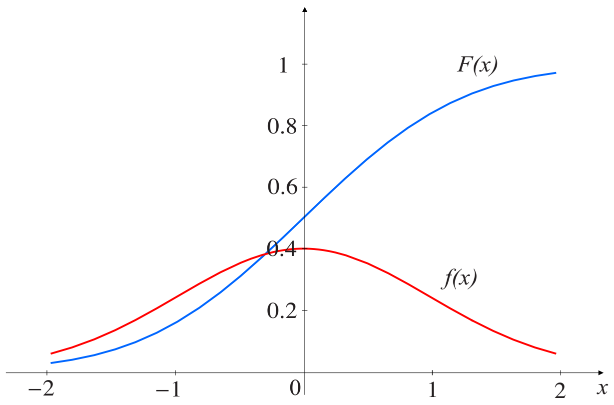
PRIMJER 8.7 *Slučajna varijabla $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Provjerite pravilo 3σ :*
(a) $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0.68$
(b) $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 0.95$
(c) $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 0.99$



Slika 8.2: Grafovi funkcija gustoće vjerojatnosti normalnih sludž˝ajnih varijabli $X_1 \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $X_2 \sim N(0,1)$ i $X_3 \sim N(0,3)$.

PRIMJER 8.8 *Debljina željeznih ploča ja slučajna varijabla. Možemo pretpostaviti da je to kontinuirana slučajna varijabla koja ima normalnu distribuciju s očekivanjem* $10mm$ *i standardnom devijacijom* $0.02mm$. *Kolika je vjerojatnost defektne ploče ako je kontrola dala kriterij:*
(a) ploča tanja od 9.97 mm,
(b) ploča deblja od 10.05 mm,
(c) ploča odstupa 0.03 mm od 10 mm. U kojim granicama treba biti debljina da bi u očekivani postotak defektnih ploča bio 5%*?*

Rješenje:
Za slučajnu varijablu $X \sim N(10, 0.02^2)$ računamo:
(a) $P(X < 9.97) = F^*(\frac{9.97-10}{0.02}) = F^*(-1.5) = 0.0668$. Uz ovaj kriterij očekuje se 6.7% oštećenih ploča.
(b) $P(X > 10.05) = 1 - F^*(10.05) = 1 - F^*(\frac{10.05-10}{0.02}) = 1 - F^*(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$. Uz ovaj kriterij očekuje se 0.6% oštećenih ploča.
(c) $P(9.97 < X < 10.03) = F^*(\frac{10.03-10}{0.02}) - F^*(\frac{9.97-10}{0.02}) = F^*(1.5) - F^*(-1.5) = 0.8664$.
$1 - P(9.97 < X < 10.03) = 0.1336$
Uz ovaj kriterij očekuje se 13.3% oštećenih ploča.
Prema pravilu 3σ :
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$,
$P(10 - 2 \cdot 0.02 \leq X \leq 10 + 2 \cdot 0.02) = 0.95$.
Uz ovaj kriterij očekuje se 5% oštećenih ploča.
Za $2\sigma = 0.04$ imamo interval dobrih ploča $[9.96, 10.04]$.



Slika 8.3: Grafovi funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije jediniďż˝ne normalne sluďż˝ajne varijable $X \sim N(0, 1)$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 8.9 *motiv*

Neka je kritična čvrstoća jednog tipa plastičnih ploča normalna slučajna varijabla X s očekivanom čvrstoćom 1250 kg i standardnom devijacijom 55 kg. Koje je maksimalno opterćenje takvo da je očekivani broj slomljenih ploča najviše 5%*?*

Rješenje:
Za slučajnu varijablu $X \sim N(1250, 55^2)$ računamo prema pravilu 3σ :
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95,$
$P(1250 - 2 \cdot 55 \leq X \leq 1250 + 2 \cdot 55) = 0.95.$ Za maksimalno opterećenje od 1360 kg očekuje se 5% slomljenih ploča.

PRIMJER 8.10 *Na prvoj godini GF studira 200 studenata. Očekivana težina je 75 kg a standardna devijacija 7 kg. Pretpostavimo da je težina normalno distribuirana. Koliko studenata ima težinu između 68 kg i 82 kg (tj. zaokruženo od 67.5.5 kg do 82.5 kg)?*

Rješenje:
Za slučajnu varijablu težina studenata $X \sim N(75, 7^2)$ računamo:
$P(67.5 \leq X \leq 82.5) = F^*(\frac{82.5-75}{7}) - F^*(\frac{67.5-75}{7}) = 2F^*(1.07) - 1 = 2 \cdot 0.8577 - 1 = 0.715.$
Ukupno studenata koji imaju težinu između 68 kg i 82 kg (tj. zaokruženo od 67.5.5 kg do 82.5 kg) je $200 \cdot 0.715 = 143$.

NAPOMENA 8.3 *U graničnom slučaju za velike m binomna distribucija* $X \sim B(m, p)$ *se može aproksimirati standardnom normalnom distribucijom. Prema integralnom Moivre-Laplaceov teoremu (centralni granični teorem za binomnu sl. var.) u poglavlju 11 vrijedi*

$$P(a < X < b) \approx F^*(\frac{b - mp + 0.5}{\sqrt{mp(1-p)}}) - F^*(\frac{a - mp - 0.5}{\sqrt{mp(1-p)}}).$$

Primijetimo da su dodani pribrojnici 0.5 i -0.5 zbog korekcije.

8.2 UNIFORMNA DISTRIBUCIJA

Definicija 8.2 *(UNIFORMNA DISTRIBUCIJA)*

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima uniformnu distribuciju na se segmentu $[a, b]$, ako je slika $R(X) = R$, a funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

i označavamo $X \sim U(a, b)$.

PRIMJER 8.11 *Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable $X \sim U(a, b)$ je*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

PRIMJER 8.12 *Za $X \sim U(a, b)$, $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

PRIMJER 8.13 *Skiciraj graf funkcije gustoće vjerojatnosti i graf funkcije distribucije vjerojatnosti.*

Funkcija $f(x)$ ima prekid u točkama a i b, a funkcija $F(x)$ je neprekinuta na $\mathbb{R}$.

8.3 EKSPONENCIJALNA DISTRIBUCIJA

Eksponencijalna distribucija se pojavljuje u problemima teorije opsluživanja.

MOTIV 8.3 *Vrijeme trajanja sijalica je slučajna varijabla X. Uzimamo uzorak i 5% sijalica traje do 100 sati. Kolika je vjerojatnost da će nova sijalica trajati duže od 200 sati tj.* $P(X > 200)$*?*

Definicija 8.3 *(EKSPONENCIJALNA DISTRIBUCIJA)*

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *kažemo da ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom* λ*, ako je slika* $R(X) = R$*, a funkcija gustoće vjerojatnosti je*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

i označavamo $X \sim Exp(\lambda)$*.*

PRIMJER 8.14 *Funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable* $X \sim Exp(\lambda)$ *je*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

PRIMJER 8.15 *Za* $X \sim Exp(\lambda)$*,* $E(X) = \frac{1}{\lambda}$*,* $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$*.*

Rješenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = parc.int. = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = parc.int. = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

PRIMJER 8.16 *Skiciraj graf funkcije gustoće i funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable* $X \sim Exp(\lambda)$*.*
Funkcija $f(x)$ *je padajuća funkcija na* $[0, \infty)$*, prekinuta u nuli. Funkcija distribucije je neprekinuta funkcija R, rastuća, konkavna, ima horizontalnu asimptotu* $y = 1$*.*

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 8.17 *motiv*

Vrijeme trajanja sijalica je slučajna varijabla koja ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Uzimamo uzorak i 5% sijalica traje do 100 sati.
(a) Odredite parametar λ.
(b) Kolika je vjerojatnost da će nova sijalica trajati duže od 200 sati?

Rješenje:
(a) $X \sim Exp(\lambda),\ P(X < 100) = 0.05 \ \Rightarrow\ F(100) = 0.05$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x, \ \Rightarrow \quad 1 - e^{-\lambda \cdot 100} = 0.05$$

$$e^{-\lambda \cdot 100} = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot 100 \approx 0.051 \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx 0.00051.$$

$$\begin{aligned}(b) P(X > 200) &= 1 - P(X < 200) = e^{-\lambda \cdot 200} \approx (e^{-\lambda \cdot 100})^2 \\ &= (0.95)^2 = 0.9025.\end{aligned}$$

8.4 GAMA DISTRIBUCIJA

Definicija 8.4 *(GAMA DISTRIBUCIJA)*

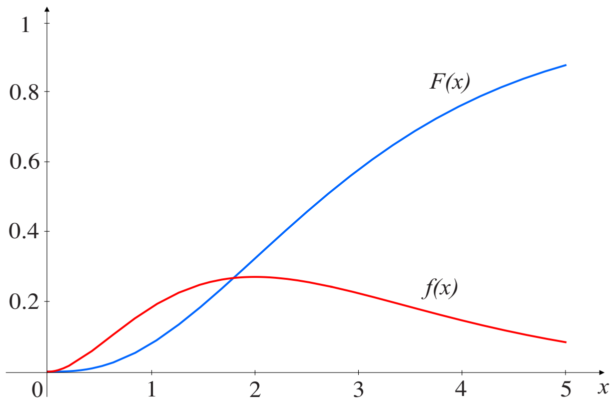
Gama distribucija je generalizacija eksponencijalne distribucije.
Neka je slučajni pokus ponavljanje događaja u vremenu s zadanim konstantnim intezitetom (λ). Slučajna varijabla koja daje vrijeme potrebno da se događaj dogodi određeni broj puta (α) ima gama distibuciju s parametrima α i λ.

Definicija 8.5 *(GAMA DISTRIBUCIJA)*

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima gama distribuciju s parametrima α i λ, (α i $\lambda > 0$) , ako je slika $\mathcal{R}(X) = \mathbb{R}$, a funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

gdje je $C = \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$, *a* $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$, *Gama funkcija,* $x > 0$ *i označavamo* $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.



Slika 8.4: Grafovi funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije slučajne varijable $X \sim \Gamma(3, 1)$.

PRIMJER 8.18 *Funkcija distribucije gama distribucije $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ je*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C \cdot \displaystyle\int_0^{x} t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t} dt, & x \geq 0. \end{cases} .$$

PRIMJER 8.19 *SVOJSTVA gama funkcije:*
(a) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$,
(b) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$,
(c) $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-2) = ... = n!,\ n \in N$,

PRIMJER 8.20 *Za* $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda),\ E(X) = \frac{\alpha}{\lambda},\ Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

PRIMJER 8.21 *Za* $\alpha > 1$ *funkcije gustoće gama distribucije ima maksimum u* $x = \frac{\alpha-1}{\lambda}$, *ima zvonoliki oblik i os* x *je horizontalna asimptota, a za* $\alpha < 1$, $f(x)$ *je strogo padajuća, konkavna funkcija koja ima vertikalnu asimptotu os* y, *a horizontalnu os* x.

Definicija 8.6 *(NEPOTPUNA GAMA FUNKCIJA)*
Tabelirana je nepotpuna gama funkcija $\gamma(z, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$.
Veza je $F(x;\ \alpha, \lambda) = \gamma(\lambda x, \alpha)$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 8.22 *motiv*
Potrošnja materijala u nekom proizvodnom procesu je slučajan pokus. U prosjeku svaki dan se potroši 20 komada. Svaki mjesec se nabavlja 640 komada potrošnog materijala. Neka je X slučajna varijabla = vrijeme potrebno da se potroši zaliha (dogodi događaj α *puta).*
(a) Kolika je vjerojatnost da ponestane potrošnog materijal?
(b) Kolika mora biti mjesečna nabavka da vjerojatnost nestašice bude 0.01?
$\lambda = 20,\ \ \alpha = 640,\ \ X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) = \Gamma(640, 20)$.

Rješenje:
Potrebni podaci: $\lambda = 20,\ \ \alpha = 640,\ \ X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) = \Gamma(640, 20)$.

(a) $P(X < 30) = F(30) = F(30; 640, 20),\ \ F(x; \alpha, \lambda) = \gamma(\lambda x, \alpha)$
$F(30; 640, 20) = \gamma(20 \cdot 30, 640) = \gamma(600, 640) = 0.057$.
Vjerojatnost da bude nestašica je 0.057.

(b) $P(X < 30) = 0.01,\ \ F(30; \alpha, 20) = 0.01$
$F(30; \alpha, 20) = \gamma(20 \cdot 30, \alpha) = \gamma(600, \alpha) = 0.01 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 660$.
Potrebne mjesečne zalihe potrošnog materijala su 660 komada da bi vjerojatnost nestašice bila 0.01 (mala).

PRIMJER 8.23 *Za* $\alpha = 1$, *gama distribucija je eksponencijalna distribucija* $X \sim \Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$.

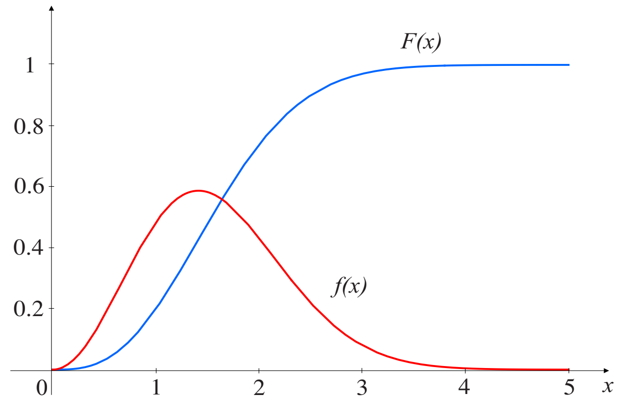
8.5 HI KVADRAT DISTRIBUCIJA

Definicija 8.7 *(HI KVADRAT DISTRIBUCIJA)*

Za $\alpha = \frac{n}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ *gama distribucija je* $\chi^2(n)$, *hi kvadrat distribucija s parametrom* n, $X \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(n)$.
Funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0 \end{cases}$$

gdje je $C = \dfrac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.



Slika 8.5: Grafovi funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije sludž˝ajne varijable $X \sim \chi^2(3)$.

PRIMJER 8.24 *Tabelira se* $\chi^2(n)$, *za* $n = 1, 2, ..., 30$, *ali u obliku:*
za $X \sim \chi^2(n)$ *i zadanu vjerojatnost* $p = P(X > x_p)$ *u tabeli možemo očitati vrijednosti* x_p.
Najčešće su tražene vrijednosti za x_p, *ako su zadane vjerojatnosti* $p = 0.99$,
$p = 0.95,\ p = 0.5,\ p = 0.1,\ p = 0.05$

PRIMJER 8.25 *Neka je* $X \sim \chi^2(20)$ *i* $P(X > x_p) = 0.1$. *Od koje ďž˝e vrijednosti slučajna varijabla poprimi veću vrijednost s vjerojatnošću 0.05?*
U tablici očitamo za $n = 20$, *i* $p = 0.1$, $x_p = 28.41$.

NAPOMENA 8.4 *Neka su slučajne varijable* $X_1, X_2, ..., X_n$ *takve da sve imaju standardnu normalnu distribuciju,* $X_i^* \sim N(0, 1)$, $i = 1, ..., n$.

Tada slučajna varijabla $Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2$ *ima hi kvadrat distribuciju,* $Y \sim \chi^2(n)$.

PRIMJER 8.26 *Za* $X \sim \chi^2(n),\ E(X) = n,\ Var(X) = 2n.$

Rješenje:
Koristimo formulu za očekivanje i varijancu gama distribucije s parametrima $\alpha = \dfrac{n}{2},\ \lambda = \dfrac{1}{2}:\ \ E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda} = \dfrac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n,\ Var(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = \dfrac{\frac{n}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2n.$

NAPOMENA 8.5 *Za* $X \sim \chi^2(n)$ *i* $n \to \infty,\ X \sim N(n, 2n).$
Za $X \sim \chi^2(n)$ *i* $n > 30$, *dobra aproksimacija je* $X \sim N(n, 2n).$

8.6 STUDENTOVA DISTRIBUCIJA

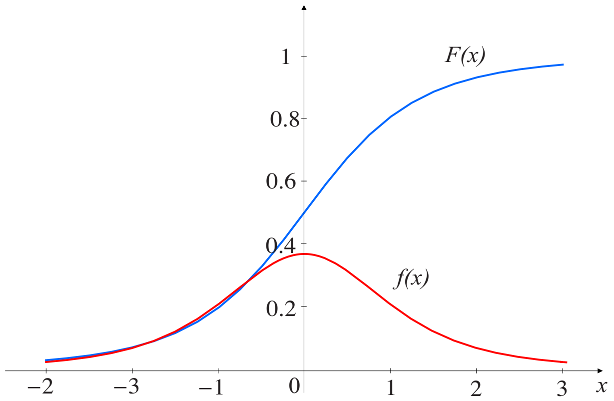
U matematičkoj statistici važna je Studentova distribucija koju je 1908 definirao S. Gosset pod pseudonimom Student.

Definicija 8.8 *(STUDENTOVA DISTRIBUCIJA)*

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima Studentovu distribuciju ili t -distribuciju s parametrom n (stupanj slobode) i označavamo $X \sim t(n)$ ako ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R$$

PRIMJER 8.27 *Skicirati graf funkcije gustoće vjerojatnosti $f(x)$. Funkcija je pozitivna, simetrična u odnosu na os y, parna, dostiže maksimum u $x = 0$, os x je horizontalna asimptota. Kad $n \to \infty$, graf postaje Gaussova krivulja.*



Slika 8.6: Grafovi funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije sluďż˝ajne varijable $X \sim t(3)$.

PRIMJER 8.28 *Tabelira se $t(n)$, za $n = 1, 2, ..., 30$, ali u obliku:*
za $X \sim t(n)$ i zadanu vjerojatnost $p = P(|X| > x_p)$ u tabeli možemo očitati vrijednosti x_p. Najčešće su tražene vrijednosti za x_p, ako su zadane vjerojatnosti $p = 0.9$, $p = 0.8$, $p = 0.7, ...,$ $p = 0.1$.

PRIMJER 8.29 *Neka je $X \sim t(20)$ i $P(|X| > x_p) = 0.1$. Izvan kojih granica slučajna varijabla poprimi vrijednost s vjerojatnošću 0.1?*
U tablici očitamo za $n = 20$, i $p = 0.1$ $x_p = 1.725$.

PRIMJER 8.30 *Neka su slučajne varijable* $X^* \sim N(0,1)$ *i* $Y \sim \chi^2(n)$. *Tada slučajna varijabla* $T = \frac{X^*}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ *ima Studentovu distribuciju,* $T \sim t(n)$.

NAPOMENA 8.6 *Za* $X \sim t(n)$, $E(X) = 0$, $Var(X) = \dfrac{n}{n-2}$, $n > 2$.

NAPOMENA 8.7 *Za* $X \sim t(n)$ *i* $n \to \infty$, $X \sim N(0,1)$.
Za $X \sim t(n)$ *i* $n > 30$, *dobra aproksimacija je* $X \sim N(0,1)$.

NAPOMENA 8.8 *Za* $n = 1$, *Studentova distribucija je Cauchyjeva distribucija.*

8.7 Ponovimo

STANDARDNA NORMALNA DISTRIBUCIJA (RAZDIOBA)

standardna normalna distribucija	$X^* \sim N(0,1)$
funkcija gustoće vjerojatnosti	$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$
funkcija distribucije vjerojatnosti	$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$
očekivanje	$E(X) = 0$
varijanca	$Var(X) = 1$

NORMALNA DISTRIBUCIJA

normalna distribucija	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
funkcija gustoće vjerojatnosti	$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot f^*(\frac{x-\mu}{\sigma})$
funkcija distribucije vjerojatnosti	$F(x) = F^*(\frac{x-\mu}{\sigma})$
očekivanje	$E(X) = \mu$
varijanca	$Var(X) = \sigma^2$
PRAVILO 3σ	za $X \sim N(\mu, \sigma)$
	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68$
	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$
	$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.99$

UNIFORMNA DISTRIBUCIJA

uniformna distribucija	$X \sim U(a, b)$
funkcija gustoće vjerojatnosti	$f(x) = \frac{1}{b-a}$, za $a \leq x \leq b$,
funkcija distribucije vjerojatnosti	$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, za $a \leq x \leq b$,
očekivanje	$E(X) = \frac{a+b}{2}$
varijanca	$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

EKSPONENCIJALNA DISTRIBUCIJA

eksponencijaln distribucija	$X \sim Exp(\lambda)$
funkcija gustoće vjerojatnosti	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$
funkcija distribucije vjerojatnosti	$F(x) == \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$
očekivanje	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
varijanca	$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

GAMA DISTRIBUCIJA, HI-kvadrat, eksponencijalna

gama distribucija	$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
hi-kvadrat distribucija	$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$
eksponencijalna distribucija	$X \sim Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$
očekivanje	$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$
varijanca	$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
hi-kvadrat $Y \sim \chi^2(n)$	$Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2$
za	$X_i \sim N(0, 1)$

STUDENTOVA ili t- DISTRIBUCIJA

Studentova distribucija	$X \sim t(n)$
očekivanje	$E(X) = 0$
varijanca	$Var(X) = \frac{n}{n-2}$, za $n > 2$
Studentova razdioba $T \sim t(n)$	$T = \frac{X^*}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$,
ako je	$X^* \sim N(0, 1)$ i $Y \sim \chi^2(n)$.