Sadržaj

Poglavlje 9

DVODIMENZIONALNI SLUČAJNI VEKTOR

Pojam slučajne varijable generalizira se za dvije i n varijabli. U ovom poglavlju posebno će se obraditi diskretni dvodimenzionali slučajni vektor. Pojam n-dim slučajnog vektora važan je za definiciju slučajnog uzorka.

Definicija 9.1 *(n-dim SLUČAJNI VEKTOR, engl. random vector)*

Neka su su $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$,..., $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkciju $(X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ zovemo n-dim slučajni vektor ako vrijedi $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega \in \Omega : \; X_1(\omega) \le x_1, \; X_2(\omega) \le x_2, ..., \; X_n(\omega) \le x_n\} \subset \mathcal{F}$$

i označavamo $(X_1, X_2, ..., X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)), \; \omega \in \Omega$.

Definicija 9.2 *(FUNKCIJA DISTRIBUCIJE n-dim SLUČAJNOG VEKTORA, engl. distribution function of random vector)*

Neka je $(X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ n-dim slučajni vektor. Funkciju $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) := P(X_1 \le x_1, ..., X_n \le x_n)$$

zovemo funkcija distribucije diskretnog n-dim slučajnog vektora $(X_1, X_2, .., X_n)$.

9.1 DISKRETNI DVODIMENZIONALNI SLUČAJNI VEKTOR

MOTIV 9.1 *Promatramo slučajni pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X = suma brojeva koji su pali i slučajnu varijablu Y = broj 1 ako su pali jednaki brojevi, inače 0. (a) Nađite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y). (b)Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 3 a manji ili jednak 6 i da su pali isti brojevi? (c) Jesu li X i Y nezavisne varijable? (d) Izračunajte kovarijancu. (e) Jesu li X i Y korelirane varijable?*

Definicija 9.3 *DISKRETNI n-dim SLUČAJNI VEKTOR*

Ako su slučajne varijable $X_1, X_2, ..., X_n$ diskretne slučajne varijable, onda za slučajni vektor $(X_1, X_2, ..., X_n)$ kažemo da je diskretni n-dim slučajni vektor.

Definicija 9.4 *(FUNKCIJA VJEROJATNOSTI n-dim SLUČAJNOG VEKTORA, engl. probability function of random vector)*

Neka je $(X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ n-dim diskretni slučajni vektor. Funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) := \begin{cases} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ...X_n = x_n), & (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{R}(X_1, X_2, ..., X_n), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zovemo funkcija vjerojatnosti diskretnog n-dim slučajnog vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Definicija 9.5 *DISKRETNI 2-dim SLUČAJNI VEKTOR*

Ako su slučajne varijable X i Y diskretne slučajne varijable, onda za slučajni vektor (X, Y) kažemo da je diskretni dvodimenzionalni slučajni vektor.

Definicija 9.6 *(FUNKCIJA VJEROJATNOSTI diskretnog 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)*

Neka su $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretne slučajne varijable sa slikama $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$, $\mathcal{R}(Y) = \{y_1, y_2, ...\}$ Funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način:

$$f(x, y) := \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & x = x_i \in \mathcal{R}(X),\ y = y_j \in \mathcal{R}(X), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zovemo funkcija vjerojatnosti diskretnog 2-dim slučajnog vektora (X, Y).

T: SVOJSTVA funkcije vjerojatnosti slučajne varijable X.
(i) $0 \leq f(x_i, y_j) \leq 1$,
(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1$.
Dokaz: *tko želi znati više*

(i) Za $(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\})$
$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x_i, y_i) \leq 1$.
(ii) Za $(x_i, y_j) \neq (x_k, y_l) \;\Rightarrow$
$\{\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\} \bigcap \{\omega : X(\omega) = x_k, Y(\omega) = y_l\} = \emptyset$,
svojstvo (ii) slijedi prema svojstvu (P3), prebrojive aditivnosti funkcije P:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = P(\Omega) = 1.$$

NAPOMENA 9.1 *Diskretni 2-dim slučajni vektor je zadan sa svojom slikom* $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, ...; j = 1, ...\}$ *i funkcijom vjerojatnosti* f *slučajne varijable, vrijednostima* $\{f(x_i, y_j),\ i = 1, ...;\ j = 1, ...\}$.
U literaturi se zato može naći zapis slučajnog vektora (X, Y) *kao uređene sheme:*

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & & p_{1j} & \dots \\ x_2 & p_{21} & & & p_{2j} & \\ \dots & & & & & \\ x_i & p_{i1} & & & p_{ij} & \\ \dots & & & & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

gdje su $p_{ij} = f(x_i, y_j),\ i, j \in \{1, 2, ...\}$.

PRIMJER 9.1 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretni vjerojatnosni prostor slučajnog pokusa bacanje igraće kocke.* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6},\ i = 1, .., 6$.
Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla definirana na sljedeći način:* X *= broj koji je pao.*
Neka je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla definirana na sljedeći način:* $Y = 1$ *ako je pao paran broj veći od 3, inače 0.*
X *je slučajna varijabla. Slika slučajne varijable je skup* $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Y *je slučajna varijabla. Slika slučajne varijable je skup* $\mathcal{R}(Y) = \{0, 1\}$.
Naći funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y).

Rješenje: Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} P(X=x_i, Y=y_j), & x=x_i \in \mathcal{R}(X), y=y_j \in \mathcal{R}(Y) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{6}, & x=x_i \in \{4,6\},\ y=y_j \in \{1\} \\ \frac{1}{6}, & x=x_i \in \{1,2,3,5\},\ y=y_j \in \{0\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Slučajni vektor (X,Y) možemo za zadati s

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 2 & \frac{1}{6} & 0 \\ 3 & \frac{1}{6} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

PRIMJER 9.2 *Neka je (X,Y) slučajni vektor za slučajni pokus izbora dva broja iz {1,2,3}, pri čemu je X= prvi izabrani broj, Y= izabrani broj nije manji od prvog. Naći funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora.*

Rješenje:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Definicija 9.7 *(FUNKCIJA DISTRIBUCIJE DISKRETNOG 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)*

Neka je $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom* $\mathcal{R}((X,Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1,...; j = 1,...\}$. *Funkciju* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definiranu na sljedeći način:*

$$F(x,y) := P(X \le x, Y \le y) = \sum_{i:\, x_i \le x} \sum_{j:\, y_j \le y} f(x_i, y_j)$$

zovemo funkcija distribucije diskretnog 2-dim slučajnog vektora (X,Y).

T: SVOJSTVA funkcije distribucije diskretnog 2-dim slučajnog vektora:

(F1) $\lim\limits_{x\to-\infty,\, y\to-\infty} F(x,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = F(-\infty,y) = 0$

$\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = F(x,-\infty) = 0$

(F2) $\lim\limits_{x\to\infty,\, y\to\infty} F(x,y) = F(\infty,\infty) = 1$

(F3) $0 \le F(x,y) \le 1$

(F4)

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2),$$

$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R},\ \ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2.$

(F6) F je rastuća funkcija po svakoj varijabli.

Dokaz: *tko želi znati više*

(F1) Kako je događaj $X \le -\infty,\ Y \le -\infty$ nemoguć događaj

$$F(-\infty,-\infty) := P(X \le -\infty,\ Y \le -\infty) = P(\emptyset) = 0.$$

$$F(-\infty,y) = P(X \le -\infty \bigcap Y \le y) = P(\emptyset \bigcap Y \le y) = P(\emptyset) = 0.$$

(F2) Budući je događaj $X \le \infty,\ Y \le \infty$ siguran događaj, onda je

$$F(\infty,\infty) = P(\Omega) = 1.$$

(F3) tvrdnja slijedi iz svojstava (F1) i (F2).

(F4) Neka su $a, b \in \mathbb{R},\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2.$ Računamo

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) & \\ &= P(a_1 < X \le b_1, Y \le b_2) - P(a_1 < X \le b_1, Y \le a_2) \\ &= (F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2)) - (F(b_1,a_2) - F(a_1,a_2)). \end{aligned}$$

(F6) Neka su $a_1, b_1 \in \mathbb{R},\ a_1 < b_1.$

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \le b_1, Y \le y) &= F(b_1,y) - F(a_1,y) - F(b_1,-\infty) + F(a_1,-\infty) \\ &= F(b_1,y) - F(a_1,y) \ge 0. \end{aligned}$$

Iz svojstva (F5) slijedi da je $F(a_1,y) \le F(b_1,y)$, funkcija je rastuća po prvoj varijabli.

PRIMJER 9.3 *Za slučajni vektor* (X, Y) *iz primjera zadan s*

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 2 & \frac{1}{6} & 0 \\ 3 & \frac{1}{6} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

odredite vrijednost funkcije distribucije $F(1,0), F(1,1)$, $F(2,0)$, $F(2,1)$, $F(4,0)$. *Izračunajte vjerojatnost* $P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1)$ *i* $P(1 < X \leq 4, Y \leq 0)$.

Rješenje:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i:\, x_i \leq x} \sum_{j:\, y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

$F(1,0) = f(1,0) = p_{11} = \frac{1}{6}$,
$F(1,1) = f(1,0) + f(1,1) = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{6}$,
$F(2,0) = f(1,0) + f(2,0) = p_{11} + p_{21} = \frac{2}{6}$,
$F(2,1) = f(1,0) + f(1,1) + f(2,0) + f(2,1) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = \frac{2}{6}$,
$F(4,0) = f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + f(4,0) = p_{11} + p_{21} + p_{31} + p_{41} = \frac{3}{6}$.
Koristimo formule

$$P(a_1 < X \leq b_1,\ a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

$P(a_1 < X \leq b_1,\ Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)$

$$\begin{aligned} P(1 < X \leq 2,\ 0 < Y \leq 1) &= F(2,1) - F(1,1) - F(2,0) + F(1,0) \\ &= \frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 0. \end{aligned}$$

$$P(1 < X \leq 4,\ Y \leq 0) = F(4,0) - F(1,0) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

ili
$P(1 < X \leq 2,\ 0 < Y \leq 1) = P(\emptyset) = 0$,
$P(1 < X \leq 4,\ Y \leq 0) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

PRIMJER 9.4 *Bacimo istovremeno dva novčića od 1 kune i od 5 kuna. Neka su X i Y slučajne varijable definirane:*

X=1 ako je pao slavuj, inače 0

Y= 1 ako je pao medo, inače 0.
Promatramo slučajni vektor (X,Y). Napišite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora. Odredite $F(1,1)$, $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$ *i* $P(0 < X \leq 1, Y \leq 0)$.

Rješenje: $\mathcal{R}(X) = \{0,1\}$, $\mathcal{R}(Y) = \{0,1\}$.
$\mathcal{R}((X,Y)) = \{(x_i, y_j),\ i = 1,2;\ j = 1,2\} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = x_i \in \{0,1\},\ y = y_j \in \{0,1\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4}.$$

$$F(x,y) := P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i:\, x_i \leq x} \sum_{j:\, y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

$F(0,0) = f(0,0) = p_{11} = \frac{1}{4}$
$F(0,1) = f(0,0) + f(0,1) = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
$F(1,0) = f(0,0) + f(1,0) = p_{11} + p_{21} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$F(1,1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$
Koristimo formule

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2)$$

$P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2) = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2)$

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 1,\ 0 < Y \leq 1) &= F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) + F(0,0) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$P(0 < X \leq 1, Y \leq 0) = F(1,0) - F(0,0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

ili
$P(0 < X \leq 1,\ 0 < Y \leq 1) = P(\{(s,m)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,
$P(0 < X \leq 1,\ Y \leq 0) = P(\{s,5\}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 9.5 *motiv*

Promatramo slučajni pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X = suma brojeva koji su pali i slučajnu varijablu Y = broj 1 ako su pali jednaki brojevi, inače 0. (a) Nađite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y). (b) Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 3 a manji ili jednak 6 i da su pali isti brojevi?

Rješenje: (a) $(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$

(b) $P(3 < X \leq 6, Y = 1) = f(4, 1) + f(5, 1) + f(6, 1) = \frac{1}{36} + 0 + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$.

Definicija 9.8 *(MARGINALNA FUNKCIJA VJEROJATNOSTI komponenata 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA, engl. marginal distribution)*

Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j),\ i = 1, ...;\ j = 1, ...\}$ i funkcijom vjerojatnosti
$f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$

$$f(x, y) := \begin{cases} P(X = x_i,\ Y = y_j), & (x, y) = (x_i, y_j) \in \mathcal{R}((X, Y)) \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Funkciju $f_1(x) = f(X = x,\ Y = proizvoljno) = \sum_j f(x, y_j),$ *zovemo marginalna funkcija vjerojatnosti komponente X slučajnog vektora (X, Y).*
Funkciju $f_2(y) = f(X = proizvoljno,\ Y = y) = \sum_i f(x_i, y)$ *zovemo marginalna funkcija vjerojatnosti komponente Y slučajnog vektora (X, Y).*

$$\begin{pmatrix} X/Y & y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & f_1(x) \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & \sum_j p_{1j} \\ x_2 & p_{21} & & & p_{2j} & \dots & \sum_j p_{2j} \\ \dots & \dots & & & \dots & & \dots \\ x_i & p_{i1} & & & p_{ij} & & \sum_j p_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ f_2(y) & \sum_i p_{i1} & \dots & & \sum_i p_{ij} & & \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{pmatrix}$$

PRIMJER 9.6 *U prethodnim primjerima slučajnih vektora odredite marginalne funkcije vjerojatnosti komponenti X i Y slučajnog vektora (X, Y).*

Rješenje:

(a) $\begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 2 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 3 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 4 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 6 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ f_2(y) & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & 1 \end{pmatrix}$, $\quad X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} X/Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{6}{18} \\ 2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{6}{18} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{6}{18} \\ f_2(y) & \frac{2}{18} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (c) $\begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ f_2(y) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 & \frac{2}{36} \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 & \frac{4}{36} \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 & \frac{6}{36} \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 & \frac{4}{36} \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 & \frac{2}{36} \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ f_2(y) & \frac{30}{36} & \frac{6}{36} & 1 \end{pmatrix}$

Definicija 9.9 *(MARGINALNA FUNKCIJA DISTRIBUCIJE VJEROJATNOSTI komponenata 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA, engl. marginal distribution)*

Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom $\mathcal{R}((X, Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, ...;\ j = 1, ...\}$ i funkcijom distribucije vjerojatnosti $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$

$$F(x, y) := P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i:\, x_i \leq x} \sum_{j:\, y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Funkciju $F_1(x) := F(x, \infty) = P(X \leq x, -\infty < Y \leq \infty) = \sum_{u \leq x} f_1(u)$, zovemo marginalna funkcija distribucije vjerojatnosti komponente X slučajnog vektora (X, Y).
Funkciju $F_2(y) := F(\infty, y) = P(-\infty < X \leq \infty, Y \leq y) = \sum_{u \leq y} f_2(u)$ zovemo marginalna funkcija distribucije vjerojatnosti komponente Y slučajnog vektora (X, Y).

Definicija 9.10 *(NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA, engl. independent variables)*

Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 2-dim slučajni vektor sa funkcijom distribucije vjerojatnosti $F(x, y)$. Za slučajne varijable X i Y kažemo da su nezavisne ako je za svaki (x, y)

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Neka je $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *diskretni 2-dim slučajni vektor sa funkcijom vjerojatnosti* $f(x,y)$*. Za slučajne varijable X i Y kažemo da su nezavisne ako je za svaki* (x,y)

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Inače su X i Y zavisne.

PRIMJER 9.7 *U primjerima provjeri jesu li slučajne varijable u slučajnim vektorima (X,Y) nezavisne.*

Rješenje:
(a) nisu jer je npr. $f(4,1) \neq f_1(4) \cdot f_2(1)$, $f(4,1) = \frac{1}{6}$, $f_1(4) = \frac{1}{6}$, $f_2(1) = \frac{2}{6}$;
(b) nisu jer je npr. $f(1,1) \neq f_1(1) \cdot f_2(1)$, $f(1,1) = \frac{1}{9}$, $f_1(4) = \frac{6}{18}$, $f_2(1) = \frac{2}{18}$;
(c) jesu jer je $f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j)$, $i, j = 1, 2$;
(d) nisu jer je npr. $f(6,1) \neq f_1(6) \cdot f_2(1)$, $f(6,1) = \frac{1}{36}$, $f_1(6) = \frac{5}{36}$,
$f_2(1) = \frac{6}{36}$.

Definicija 9.11 *(OČEKIVANJE 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)*
Neka je $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *2-dim slučajni vektor i neka komponente X i Y su slučajne varijable koje imaju očekivnje E(X) i E(Y) onda se matematičko očekivanje slučajnog vektora definira s*

$$E(X,Y) = (E(X), E(Y)).$$

Definicija 9.12 *(OČEKIVANJE funkcije DISKRETNOG 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)*
Neka je $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *diskretni 2-dim slučajni vektor sa slikom* $\mathcal{R}((X,Y)) = \{(x_i, y_j), i = 1, .; j = 1, ...\}$ *i funkcijom vjerojatnosti*
$f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$

$$f(x,y) := \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & (x,y) = (x_i, y_j) \in \mathcal{R}((X,Y)) \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Neka je zadana funkcija $h : R^2 \to R$*. Kažemo da je slučajna varijabla* $h(X,Y)$ *funkcija od slučajnog vektora (X,Y) i za nju definiramo očekivanje ako red* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$ *konvergira i označavamo*

$$E(h(X,Y)) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) f(x_i, y_j).$$

PRIMJER 9.8 $E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j f(x_i, y_j)$ *za* $h(x,y) = x \cdot y$.

PRIMJER 9.9 *Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable onda je*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y),$$

jer

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j f_1(x_i) \cdot f_2(y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_1(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j f_2(y_j) = E(X) \cdot E(Y). \end{aligned}$$

PRIMJER 9.10 *Ako je* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *n-dim slučajni vektor i sve varijable nezavisne onda*

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot ... \cdot E(X_n).$$

PRIMJER 9.11 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ *za* $h(x,y) = x + y$.

PRIMJER 9.12 *Ako je* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *n-dim slučajni vektor onda*

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n).$$

PRIMJER 9.13 *Neka je* (X,Y) *diskretni 2-dim slučajni vektor takav da Y ne poprima vrijednost 0. Odredi* $E(\sin \frac{X}{Y})$.

Rješenje: $h(x,y) = \sin \frac{x}{y}$

$$E(\sin \frac{X}{Y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{x_i}{y_j} f(x_i, y_j)$$

9.2 KONTINUIRANI 2-dim SLUČAJNI VEKTOR *tko želi znati više*

MOTIV 9.2 *Mladić i djevojka su dogovorili sastanak na trgu u 12 sati. Čekat će se najdulje 20 minuta nakon dolaska. Kolika je vjerojatnost da se susretnu ako su oboje došli na trg od 12 do 13 sati?*

Definicija 9.13 *KONTINUIRANI 2-dim SLUČAJNI VEKTOR*

Ako su slučajne varijable X i Y kontinuirane slučajne varijable, onda za slučajni vektor (X, Y) kažemo da je kontinuirani dvodimenzionalni slučajni vektor.

Definicija 9.14 *(FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI kontinuiranog 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)*

Neka su $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ kontinuirane slučajne varijable sa slikama $\mathcal{R}(X)$ i $\mathcal{R}(Y)$. Funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način:
(i) $0 \leq f(x, y)$
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1.$
zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuiranog 2-dim slučajnog vektora (X, Y).

Definicija 9.15 *(FUNKCIJA DISTRIBUCIJE kontinuiranog 2-dim SLUČAJNOG VEKTORA)*

Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ kontinuirani 2-dim slučajni vektor sa slikom $\mathcal{R}((X, Y))$. Funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način:

$$F(x, y) := P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy$$

zovemo funkcija distribucije kontinuiranog 2-dim slučajnog vektora (X, Y).

NAPOMENA 9.2 *Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ kontinuirani 2-dim slučajni vektor sa slikom $\mathcal{R}((X, Y)) = [a, b] \times [c, d]$.Tada vrijedi*

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y)dxdy.$$

NAPOMENA 9.3 *Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ kontinuirani 2-dim slučajni vektor sa slikom $\mathcal{R}((X, Y))$. Neka je događaj A vezan uz slučajni pokus i vektor (X, Y). Ako označimo područje u xy ravnini koje odgovara događaju A sa D_A onda vjerojatnost događaja A (geometrijsku vjerojatnost) možemo računati pomoću*

$$P(A) = \int\int_{D_A} f(x,y)dxdy.$$

MOTIV 9.3 *Mladić i djevojka su dogovorili sastanak na trgu u 12 sati. Čekat će se najdulje 20 minuta nakon dolaska. Kolika je vjerojatnost da se susretnu ako su oboje došli na trg od 12 do 13 sati?*

Rješenje:

Neka su X i Y slučajne varijable koje predtavljaju vrijeme dolaska djevojke i mladića. Pretpostavit ćemo da jednaki vremenski intervali imaju jednaku vjerojatnost, pa su funkcije gustoće vjerojatnosti za obe varijable jednake:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Budući su slučajne varijable X i Y nezavisne možemo odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) :

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Računamo vjerojatnost događaja $A = \{(x,y) \in [0,60] \times [0,60] : |x-y| < 20\}$:
$P(A) = P(|X-Y| < 20) = \int\int_{D_A} f(x,y)dxdy = \frac{5}{9}$.
(vidite PRIMJER **??** u 2. poglavlju.)

9.3 KOVARIJANCA, KORELACIJA, PRAVCI REGRESIJE

MOTIV 9.4 *Promatramo slučajni pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X = suma brojeva koji su pali i slučajnu varijablu Y = broj 1 ako su pali jednaki brojevi, inače 0. (c) Jesu li X i Y nezavisne varijable? (d) Izračunajte kovarijancu. (e) Jesu li X i Y korelirane varijable?*

Definicija 9.16 *(KOVARIJANCA SLUČAJNOG VEKTORA - engl.covariance of X and Y)*

Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 2-dim slučajni vektor. Kovarijanca slučajnog vektora (X, Y) je

$$\mu_{XY} = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable onda je $\mu_{XY} = 0$.

PRIMJER 9.14 *(a) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\mu_{XY}$*
(b) Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable onda je $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Dokaz: *tko želi znati više*

Ako je $h(x, y) = x + y$ onda je $Z = X + Y$ slučajna varijabla, funkcija slučajnog vektora (X, Y).

$$\begin{aligned} Var(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2X \cdot Y + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(X \cdot Y) + E(Y^2) - ((E(X))^2 + 2E(X) \cdot E(Y) + (E(Y))^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)) \end{aligned}$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable onda je $\mu_{XY} = 0$ pa tvrdnja slijedi iz (a).

Definicija 9.17 *(KOEFICIJENT KORELACIJE, engl. correlation coefficient)*

Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 2-dim slučajni vektor Neka je μ_{XY} kovarijanca slučajnih varijabli X i Y, a σ_1 i σ_2 njihove standardne devijacije. Koeficijent korelacije komponenti X i Y slučajnog vektora je definiran s

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}.$$

T: SVOJSTVA KOEFICIJENTA KORELACIJE ρ_{XY} :
(i) $\rho_{XY} = \rho_{YX}$,
(ii) $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$,
(iii) $\rho_{XY} = 1$ ako je $Y = aX + b,\ a > 0$, $\rho_{XY} = -1$ ako je $Y = aX + b,\ a < 0$,
(iv) $\rho_{UW} = \rho_{XY}$, ako je $U = aX + b,\ W = cY + d,\ a, c \neq 0$.

D: *tko želi znati više*

(ii) Za slučajnu varijablu $U = \sigma_2 X - \sigma_1 Y$, odredimo varijancu:

$$\begin{aligned} Var(U) &= E(U^2) - (E(U))^2 \\ &= E(\sigma_2^2 X^2 - 2\sigma_1\sigma_2 XY + \sigma_1^2 Y^2) - (\sigma_2 E(X) - \sigma_1 E(Y))^2 \\ &= \sigma_2^2 E(X^2) - 2\sigma_1\sigma_2 E(XY) + \sigma_1^2 E(Y^2) \\ &\quad -(\sigma_2^2 (E(X))^2 - 2\sigma_1\sigma_2 E(X)E(Y) + \sigma_1^2 (E(Y))^2) \\ &= \sigma_2^2 Var(X) + \sigma_1^2 Var(Y) - 2\sigma_1\sigma_2 (E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= \sigma_2^2 \cdot \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \mu_{XY} \\ &= 2\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \mu_{XY}. \end{aligned}$$

Budući je varijanca pozitivan broj zaključujemo da je $\mu_{XY} \leq \sigma_1\sigma_2,\ \ \rho_{XY} \leq 1$.
Analogno, promatrajući slučajnu varijablu $U = \sigma_2 X + \sigma_1 Y$ dobit ćemo nejednakost $\mu_{XY} \geq -\sigma_1\sigma_2,\ \ \rho_{XY} \geq -1$.
(iii)

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(X(aX + b)) - E(X)E(aX + b) \\ &= aE(X^2) + bE(X) - a(E(X))^2 + bE(X) = aVar(X) = a\sigma_1^2, \end{aligned}$$

$$\sigma_2^2 = Var(Y) = Var(aX + b) = a^2 Var(X) = a^2\sigma_1^2,$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{a\sigma_1^2}{\sigma_1 \cdot \sigma_1 |a|} = \frac{a}{|a|}.$$

Definicija 9.18 *(NEKORELIRANE SLUČAJNE VARIJABLE)*
Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 2-dim slučajni vektor Neka je μ_{XY} kovarijanca slučajnih varijabli X i Y, a σ_1 i σ_2 njihove standardne devijacije.
Za slučajne varijable X i Y kažemo da su nekorelirane ako je koeficijent korelacije $\rho_{XY} = 0$.
Ako je $\rho_{XY} \neq 0$ slučajne varijable su korelirane.

PRIMJER 9.15 *(a) Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable onda su one nekorelirane. (b) Ako su X i Y nekorelirane slučajne varijable onda one ne moraju biti nezavisne.*

Dokaz:
(a) X i Y nezavisne $\Rightarrow \mu_{XY} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{XY} = 0 \quad \Rightarrow \quad X$ i Y nekorelirane.
(b) X i Y nekorelirane $\Rightarrow \rho_{XY} = 0$ ali ne moraju biti X i Y nezavisne (mogu se naći primjeri).

NAPOMENA 9.4 *Neka je zadan slučajni vektor (X, Y) s funkcijom vjerojatnosti $f(x, y)$, ili funkcija gustoće vjerojatnosti. Tražimo funkcijsku vezu između slučajnih varijabli X i Y npr. $Y = g(X)$ tako da $E((Y - g(X)^2)) \to \min$. Tada se krivulja dana jednadžbom $y = g(x)$ zove regresijska krivulja od Y po X (u smislu najmanjih kvadrata) i određuje se kao*

$$y = g(x) = E(Y|X = x) = \sum_{j=1} y_j \frac{f(x, y_j)}{f_1(x}$$

ili

$$y = g(x) = E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

Ako pretpostavimo linearnu ovisnost Y od X tako da je $g(x) = ax + b$ onda kao regresijsku krivulju dobijemo pravac:

$$y - \mu_2 = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

je pravac regresije Y po X.

Koeficijent $a = \rho_{XY} \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}$ je koeficijent regresije Y po X.

PRIMJER 9.16 *Neka je $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 2-dim slučajni vektor. Neka je μ_{XY} kovarijanca slučajnih varijabli X i Y, ρ_{XY} koeficijent korelacije, σ_1 i σ_2 njihove standardne devijacije, a μ_1, μ_2 njihova očekivanja. Pretostavimo da su X i Y zavisne slučajne varijable takve da je $Y = aX + b$. Parametre a i b možemo odrediti metodom najmanjih kvadrata tako da $E((Y - (aX + b))^2)$ ima minimalnu vrijednost.*

$a = \rho_{XY} \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}$ *je koeficijent regresije Y po X.*

$b = \mu_2 - \rho_{XY} \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 = \mu_2 - \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2} \cdot \mu_1.$

$y - \mu_2 = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}(x - \mu_1),$

$y - \mu_2 = \rho_{XY} \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ *je pravac regresije Y po X.*

Analogno, ako je X=aY+b

$a = \rho_{XY} \cdot \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_2^2}$ *je koeficijent regresije X po Y*

$x - \mu_1 = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_2^2}(Y - \mu_2),$

$x - \mu_1 = \rho_{XY} \cdot \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$ *je pravac regresije X po Y.*

Dokaz: *tko želi znati više*
(metoda najmanjih kvadrata)
Označimo

$$\begin{aligned} K(a,b) &= E((Y - aX - b)^2) = E(Y - \mu_2 - a(X - \mu_1) - b + \mu_2 - a\mu_1)^2 \\ &= \sigma_2^2 + a^2\sigma_1^2 - 2a\mu_{XY} + (\mu_2 - b - a\mu_1)^2 \end{aligned}$$

$K(a,b)$ je funkcija od 2 varijable i tražimo njen ekstrem. Nužni uvjeti su

$$\frac{\partial K}{\partial a} = 2a\sigma_1^2 - 2\mu_{XY} - 2(\mu_2 - b - a\mu_1) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial b} = -2(\mu_2 - b - a\mu_1) = 0.$$

Rješavanjem ovog sustava od 2 jed. s 2 nepoznanice dobit ćemo

$$a = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}, \quad b = \mu_2 - a\mu_1 = \mu_2 - \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2} \cdot \mu_1.$$

NAPOMENA 9.5 *Pravci regresije sijeku se u točki* (μ_1, μ_2) *koja se zove centar zajedničke distribucije X i Y.*

Kut između pravaca regresije $tg\varphi = \dfrac{1 - \rho_{XY}^2}{\rho_{XY}} \cdot \dfrac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$

Ako je $\rho_{XY} = 1$ *ili* -1 *pravci regresije se poklapaju i tada postoji potpuna linearna zavisnost između X i Y.*
Ako je $\rho_{XY} = 0$ *onda su pravci regresije* $y = \mu_2$, $x = \mu_1$ *okpmiti, a ne postoji linearna zavisnost slučajnih varijabli X i Y.*

PRIMJER 9.17 *Za primjer slučajnog vektora* (X, Y) *nađite kovarijancu, koeficijent korelacije i pravce regresije.*

$$\begin{pmatrix} X/Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) & \sum y_j p_{ij} & x_i \sum y_j p_{ij} \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{6}{18} & \frac{6}{9} & \frac{6}{9} \\ 2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{6}{18} & \frac{5}{6} & \frac{10}{6} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{6}{18} & \frac{3}{3} & \frac{9}{3} \\ f_2(y) & \frac{2}{18} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} & 1 & & \frac{96}{18} \\ \sum x_i p_{ij} & \frac{1}{9} & \frac{8}{18} & \frac{26}{18} & & & \\ y_j \sum x_i p_{ij} & \frac{1}{9} & \frac{16}{18} & \frac{78}{18} & \frac{96}{18} & & \end{pmatrix}$$

$\mu_1 = E(X) = \sum x_i f_1(x_i) = 1 \cdot \frac{6}{18} + 2 \cdot \frac{6}{18} + 3 \cdot \frac{6}{18} = \frac{36}{18}$

$\mu_2 = E(Y) = \sum y_j f_2(y_j) = 1 \cdot \frac{2}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 3 \cdot \frac{11}{18} = \frac{45}{18}$

$E(X^2) = \sum x_i^2 f_1(x_i) = 1 \cdot \frac{6}{18} + 4 \cdot \frac{6}{18} + 9 \cdot \frac{6}{18} = \frac{84}{18}$

$E(Y^2) = \sum y_j^2 f_2(y_j) = 1 \cdot \frac{2}{18} + 4 \cdot \frac{5}{18} + 9 \cdot \frac{11}{18} = \frac{121}{18}$

$\sigma_1^2 = Var(X) = \frac{84}{18} - (\frac{36}{18})^2 = \frac{2}{3}$

$\sigma_2^2 = Var(Y) = \frac{121}{18} - (\frac{45}{18})^2 = \frac{17}{36}$

Kovarijanca je $\mu_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{96}{18} - \frac{36}{18} \cdot \frac{45}{18} = \frac{1}{3}$.

Pravac regresije Y po X je $y - \mu_2 = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}(x - \mu_1)$, $y - \frac{45}{18} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}(x - \frac{36}{18})$,

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

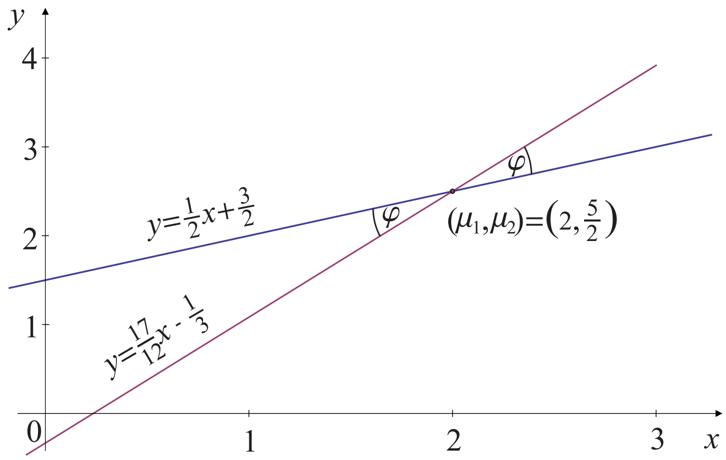
Pravac regresije X po Y je $x - \mu_1 = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_2^2}(y - \mu_2)$, $x - \frac{36}{18} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}}(y - \frac{45}{18})$,

$x = \frac{12}{17}y + \frac{4}{17}$, $y = \frac{17}{12}x - \frac{1}{3}$.

Pravci se sijeku u točki $(\mu_1, \mu_2) = (2, \frac{5}{2})$.

$tg\varphi = \frac{\frac{17}{12} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{17}{12} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{22}{41}$; Kut između pravaca regresije je $\varphi = 28.2^0$.

Koeficijent korelacije je $\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{17}{36}}} = 0.594\,09$.



Slika 9.1: Pravci regresije slučajnog vektora (X, Y).

Prisjetimo se motivacijskog primjera:

PRIMJER 9.18 *motiv*

Promatramo slučajni pokus bacanje 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X = suma brojeva koji su pali i slučajnu varijablu Y = broj 1 ako su pali jednaki brojevi, inače 0. (c) Jesu li X i Y nezavisne varijable? (d) Izračunajte kovarijancu. (e) Jesu li X i Y korelirane varijable?

Rješenje: (c) $\begin{pmatrix} X/Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 & \frac{2}{36} \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 & \frac{4}{36} \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 & \frac{6}{36} \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 & \frac{4}{36} \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 & \frac{2}{36} \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ f_2(y) & \frac{30}{36} & \frac{6}{36} & 1 \end{pmatrix}$

Varijable nisu nezavisne jer je npr. $f(6,1) \neq f_1(6) \cdot f_2(1)$,
$f(6,1) = \frac{1}{36}$, $f_1(6) = \frac{5}{36}$, $f_2(1) = \frac{6}{36}$.

(d) $E(X) = 7$, $E(Y) = \frac{1}{6}$, $E(XY) = \sum_i x_i \sum_j y_j f(x_i, y_j) = \frac{7}{6}$
Kovarijanca je $\mu_{XY} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$, pa je i koeficijnt korelacije jednak $\rho_{XY} = 0$.
(e) Varijable su nekorelirane jer je koeficijnt korelacije jednak $\rho_{XY} = 0$.

9.4 Ponovimo

DISKRETNI 2-dim SLUČAJNI VEKTOR

diskretni 2-dim sl. vek.	$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$
funkcija vjerojatnosti	$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $(x_i, y_j) \in \mathcal{R}((X, Y))$
funkcija distribucije vj.	$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
marginalne funkcije vj.	
po X	$f_1(x) = \sum_j f(x, y_j)$
po Y	$f_2(y) = \sum_i f(x_i, y)$
nezavisne sl. var.	$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j)$, za sve $(x_i, y_j) \in \mathcal{R}((X, Y))$
funkcija 2-dim sl. vek.	$Z = h((X, Y))$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
očekivanje od $Z = h((X, Y))$	$E(Z) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$
	$E(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot f(x_i, y_j)$
	$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
ako su X i Y nezavisna	$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

KOVARIJANCA - KORELACIJA PRAVCI REGRESIJE

kovarijanca od (X, Y)	$\mu_{XY} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$
	$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\mu_{XY}$
koef. korelacije od (X, Y)	$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$
nekorelirane sl. var.	$\rho_{XY} = 0$
pravac regresije Y po X	$y - \mu_2 = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1^2}(x - \mu_1)$