[1]

4 UVJETNA VJEROJATNOST

Definicija 4.1 *(UVJETNA VJEROJATNOST)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $A \in \mathcal{F}$ *tako da je* $P(A) > 0$. *Tada funkciju* $P_A : \mathcal{F} \to [0,1]$ *zovemo uvjetna vjerojatnost a definiramo za* $\forall B \in \mathcal{F}$ *kao*

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

vjerojatnost od B *uz uvjet da se dogodio* A.

$$P(A) = 0 \Rightarrow P_A(B) = P(B).$$

TEOREM 4.1 *Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost. Zadovojava uvjete*

(UP1) $P_A(B) \geq 0, B \subset \mathcal{F}$ *(svojstvo nenegativnosti);*

(UP2) $P_A(\Omega) = 1$*(svojstvo normiranosti);*

(UP3) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

$\Rightarrow P_A(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_A(A_i)$

(svojstvo prebrojive aditivnosti).

Dokaz:

(UP3) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

$\Rightarrow A_i \cap A \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N}, (A_i \cap A) \cap (A_j \cap A) = \emptyset, i \neq j$

$$\begin{aligned} P_A(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \frac{P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A))}{P(A)} \\ &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_A(A_i)\ . \end{aligned}$$

[1]VIS -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

PRIMJER 4.1 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretni vjerojatnosni, gdje je* Ω *konačan prostor elementarnih događja i* $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$, $i = \{1, ..., n\}$. *Neka je* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $|A| = m > 0$ *i* $P(A) = \frac{m}{n}$. *Za* $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tako da je* $|A \cap B| = r$, *uvjetna vjerojatnost* $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ *je definirana na slijedeći način*

$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{r}{m}$.

PRIMJER 4.2 *Bacamo kocku. Kolika je vjerojatnost da će "pasti" paran broj pod uvjetom da je je "pao" broj manji od 4?*

Rješenje:
$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.
$A = \{1, 2, 3\}$, $\quad P(A) > 0, P(A) = \frac{3}{6}$
$B = \{2, 4, 6\}$, $\quad P_A(B) = ?$
$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{2\})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$.

PRIMJER 4.3 *Izabiremo slučajno dva broja između brojeva od 1 do 9. Ako je njihov zbroj paran broj kolika je vjerojatnost da su oba neparna?*

Rješenje:
$S = \{\omega_1, ..., \omega_9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{9}$.
$\Omega = SS$
$A \subset \Omega, A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\}, \omega_{i_1} + \omega_{i_2} =$paran,
$P(A) = \frac{C_4^{(2)} + C_5^{(2)}}{C_9^{(2)}} = \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$
$B \subset \Omega, B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\}, \omega_{i_1}, \omega_{i_2} =$neparni, $P_A(B) = ?$
$P(B \cap A) = \frac{C_5^{(2)}}{C_9^{(2)}} = \frac{20}{72}$
$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{8}$.

TEOREM 4.2 *(FORMULA PRODUKTA VJEROJATNOSTI)*

Vjerojatnost produkta (presjeka) dva događaja $(A \cap B)$ *jednaka je produktu vjerojatnosti jednog od njih i uvjetne vjerojatnosti drugog, pod uvjetom da se prvi dogodio.*

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$
$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Dokaz:
Ako je $P(A) > 0$, prema definiciji uvjetne vjerojatnosti P_A :
$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.
Ako je $P(A) = 0 \Rightarrow P_A(B) = P(B)$
$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0$.

TEOREM 4.3 *(FORMULA PRODUKTA VJEROJATNOSTI*)*
Vjerojatnost produkta (presjeka) n događaja
$(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$ *jednaka je*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{(A_1\cap A_2)}(A_3) \cdot ... \cdot P_{(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}(A_n)$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Dokaz:
Pomoću AMI.

PRIMJER 4.4 *Iz špila karata (52 karte) izvlačimo jednu za drugom dvije karte. Kolika je vjerojatnost da obe karte budu pik?*

Rješenje:
A="obe karte su pik"
A_1="prva je pik", $P(A_1) = \frac{13}{52}$
A_2="druga je pik", $P(A_2/A_1) = \frac{12}{51}$
$A = A_1 \cap A_2$.
Prema formuli produkta (presjeka) vjerojatnosti:
$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$.
Ili direktno (pomoću formule za uzorak bez vraćanja):
$P(A_1 \cap A_2) = \frac{C_{13}^{(2)} \cdot C_{13}^{(0)} \cdot C_{13}^{(0)} \cdot C_{13}^{(0)}}{C_{52}^{(2)}} = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51} = \frac{1}{17}$.

PRIMJER 4.5 *U kutiji se nalazi 10 kuglica: 6 bijelih i 4 crne. Izvlačimo 3 kuglice jednu za drugom. Kolika je vjerojatnost da će bar jedna od njih biti bijela?*

Rješenje:
A="izvučena bar jedna bijela",
A^c="izvučene sve crne",
A_1="prva izvučena crna", $P(A_1) = \frac{4}{10}$
A_2="druga izvučena crna", $P(A_1/A_2) = \frac{3}{9}$,

A_3="treća izvučena crna". $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8}$.
Prema formuli produkta (presjeka) vjerojatnosti

$$
\begin{aligned}
P(A^c) &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \\
&= \tfrac{4}{10} \cdot \tfrac{3}{9} \cdot \tfrac{2}{8} \\
&= \tfrac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

Ili direktno (pomoću formule za uzorak bez vraćanja):

$$
\begin{aligned}
P(A^c) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \frac{C_4^{(3)} \cdot C_6^{(0)}}{C_{10}^{(3)}} \\
&= \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} \\
&= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} \\
&= \frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

$P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{29}{30}$.

PRIMJER 4.6 *U kutiji se nalazi 50 proizvoda: 20% neispravnih. Kontrolor izvlači 5 proizvoda sukcesivno (bez vraćanja). Kolika je vjerojatnost da će ocjena kontrolora biti pozitivna (svi proizvodi u uzorku ispravni)?*

Rješenje:
A="izvučeni svi ispravni predmeti",
A_1="prvi izvučeni isprivan", $P(A_1) = \frac{40}{50}$
A_2="drugi izvučeni ispravan", $P(A_1/A_2) = \frac{39}{49}$,
A_3="treći izvučeni ispravan", $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{38}{48}$.
A_4="četvrti izvučeni ispravan", $P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{37}{47}$,
A_5="peti izvučeni ispravan". $P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{36}{46}$
Prema formuli produkta (presjeka) vjerojatnosti

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \\
&\quad \cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= \tfrac{40}{50} \cdot \tfrac{39}{49} \cdot \tfrac{38}{48} \cdot \tfrac{37}{47} \cdot \tfrac{36}{46} \\
&= 0.31
\end{aligned}
$$

Ili direktno (pomoću formule za uzorak bez vraćanja):

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&= \frac{C_{40}^{(5)} \cdot C_{20}^{(0)}}{C_{50}^{(5)}} \\
&= \frac{\binom{40}{5} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{50}{5}} \\
&= \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} \\
&= 0.31
\end{aligned}
$$

Definicija 4.2 *(NEZAVISNI DOGAĐAJI)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka su* $A, B \in \mathcal{F}$. *Za događ aje* A *i* B *kažemo da su nezavisni ako vrijedi*

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definicija 4.3 *(FAMILIJA NEZAVISNIH DOGAĐAJA)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $A_i \in \mathcal{F}, i \in I$ *familija događaja. Kažemo da je to nezavisna familija događaja ako za svaki konačni podskup različitih indeksa* $\{i_1, ..., i_k\} \in I$ *vrijedi*

$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$.

PRIMJER 4.7 *Ako su* A *i* B *nezavisni događaji, takvi da* $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ *onda vrijedi*

$P(B \setminus A) = P(B) = P_A(B)$

$P(A \setminus B) = P(A) = P_B(A)$.

$$P_A(B) = P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

PRIMJER 4.8 *(a) Proizvoljan događaj* A *i siguran događaj su nezavisni.*

(b) Proizvoljan događaj A *i nemoguć događaj uvijek su nezavisni.*

Rješenje:

(a) $\Omega \cap A = A, \qquad P(\Omega) = 1,$

$P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega).$

(b) $\emptyset \cap A = \emptyset, \qquad P(\emptyset) = 0,$

$P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) = P(\emptyset) \cdot P(A) = 0.$

PRIMJER 4.9 *Ako su* A *i* B *nezavisni događaji onda su nezavisni događaji:*

(a) A^c *i* B,

(b) A *i* B^c,

(c) A^c *i* B^c.

Rješenje:

(a) $(A^c \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset, (A^c \cap B) \cup (A \cap B) = B,$

$\Rightarrow P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B),$

$\Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$\qquad = P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$= P(B) \cdot (1 - P(A))$
$= P(A^c) \cdot P(B).$

(b) $(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \emptyset, (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A,$
$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B),$
$\Rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$= P(A) - P(A) \cdot P(B)$
$= P(A) \cdot (1 - P(B))$
$= P(A) \cdot P(B^c).$

(c) $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c,$
$\Rightarrow P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$
$= 1 - P(A \cup B)$
$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$
$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B))$
$= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$
$= P(A^c) \cdot P(B^c).$

PRIMJER 4.10 *Ako su A i B nezavisni događaji pozitivnih vjerojatnosti onda se događaji ne isključuju.*

Rješenje:
Pretpostavimo suprotno: $A \cap B = \emptyset$.
A i B su nezavisni i pozitivnih vjeojatnosti, $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$, što je u kontradikciji s
$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.
Zaključujemo da je pretpostavka kriva:
$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$, događaji se ne isključuju.

4.1 FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI

TEOREM 4.4 *(FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI)*
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$ čine potpun sistem događaja. Tada
$\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$

Dokaz:
Skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$, čine potpun sistem (familiju) događaja:
$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Prema teoremu o vjerojatnosti produkta (presjeka) događaja:
$P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.
$A \in \mathcal{F}$, $(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)) \\
&= P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).
\end{aligned}$$

TEOREM 4.5 *(FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI ZA UVJETNU VJEROJATNOST)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$ čine potpun sistem događaja. Tada
$\forall A, B \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow P_A(B) = P(B/A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) \cdot P(B/A \cap H_i).$$

Dokaz:

Prema formuli potpune vjerojatnosti za uvjetnu vjerojatnost i definiciji uvjetne vjerojatnosti vrijedi:

$$\begin{aligned}
P_A(B) &= \sum_{i=1}^{n} P_A(H_i) \cdot P_A(B/H_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_A(H_i) \cdot \tfrac{P_A(B \cap H_i)}{P_A(H_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) \cdot \tfrac{P(B \cap H_i \cap A)/P(A)}{P(H_i \cap A)/P(A)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) \cdot \tfrac{P(B \cap H_i \cap A)}{P(H_i \cap A)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) \cdot P(B/(H_i \cap A)).
\end{aligned}$$

TEOREM 4.6 *(BAYESOVA FORMULA)*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n \in \mathcal{F}$ čine potpun sistem događaja. Neka je događaj $A \in \mathcal{F}$,ima pozitivnu vjerojatnost $P(A) > 0$. Tada je $\forall i$, $\quad P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$,

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\cdot P(A/H_j)}.$$

Dokaz:

Definicija uvjetne vjerojatnosti i formula produkta vjerojatnosti povlači da vrijedi:

$P(H_i/A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$.

Prema formuli potpune vjerojatnosti dobivamo:

$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\cdot P(A/H_j)}$.

NAPOMENA 4.1 *Bayesovu formulu koristimo kad želimo naći istinitu hipotezu iz skupa od n postavljenih hipoteza $H_i, i = 1, ..., n$, ako znamo da se dogodio događaj A. Za svako $i = 1, ..., n$, računamo $P(H_i/A)$. Hipoteza H_{i0} za koju je $P(H_{i0}/A) \approx 1$, uzima se da je ispravna.*

PRIMJER 4.11 *Na našem fakultetu je 4% studenata i 1% studentica koji nisu državljani RH. Omjer studenata i studentica upisanih na fakultet je 40:60. Ako je slučajno izabrana jedna osoba upisana na naš fakultet koja je strani državljanin kolika je vjerojatnost da je to studentica?*

Rješenje:

Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:

H_1 =”izabrana osoba je studentica”,$P(H_1) = \frac{60}{100}$.

H_2 =”izabrana osoba je student”, $P(H_2) = \frac{40}{100}$.

$H_1 \cap H_2 = \emptyset, \qquad H_1 \cup H_2 = \Omega$.

Događaj A koji se dogodio:

A=”izabrana osoba je strani državljanin”.

Zadane su uvjetne vjerojatnosti događaja A uz uvjet jedne i druge hipoteze:

$P(A/H_1) = \frac{1}{100}, P(A/H_2) = \frac{4}{100}$.

Trbamo odrediti $P(H_1/A) =$?

Koristimo Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned} P(H_1/A) &= \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{\sum\limits_{j=1}^{2} P(H_j)\cdot P(A/H_j)} \\ &= \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)} \\ &= \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{4}{100}} \\ &= \frac{60}{220} \\ &= \frac{3}{11} \\ &= 0.27. \end{aligned}$$

PRIMJER 4.12 *Tri stroja S1, S2 i S3 učestvuju u ukupnoj proizvodnji u omjeru 60:30:10. Stroj S1 proizvodi 2proizvod koji je neispravan kolika je vjerojatnost da je bio napravljen na stroju S3?*

Rješenje:
Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:
$H_1 =$"izabrani predmet je sa stroja S1",$P(H_1) = \frac{60}{100}$.
$H_2 =$"izabrani predmet je sa stroja S2", $P(H_2) = \frac{30}{100}$.
$H_3 =$"izabrani predmet je sa stroja S3",$P(H_3) = \frac{10}{100}$
$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, \qquad H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega.$
Događaj A koji se dogodio:
A="izabrani proizvod je neispravan".
Zadane su uvjetne vjerojatnosti događaja A uz uvjet pojedne hipoteze:
$P(A/H_1) = \frac{2}{100}, P(A/H_2) = \frac{3}{100}, P(A/H_3) = \frac{4}{100}.$
Trbamo odrediti $P(H_3/A) =$?
Koristimo Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned}
P(H_3/A) &= \frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(H_j)\cdot P(A/H_j)} \\
&= \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)} \\
&= \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{100}} \\
&= \frac{4}{25} \\
&= 0.16.
\end{aligned}$$