

DOI: <https://doi.org/10.5592/CO/ZT.2017.06>

## **Modeliranje međudjelovanja ljuskastih konstrukcija i tekućine kombinacijom metode konačnih elemenata i čestične metode**

**Marina Sunara Kusić**

FGAG, Sveučilište u Splitu, Hrvatska  
kontakt: [marina.sunara@gradst.hr](mailto:marina.sunara@gradst.hr)

### **Sažetak**

U ovome radu je prikazan numerički model za međudjelovanje konstrukcije i tekućine u uvjetima dinamičkog opterećenja. Model se zasniva na pristupu sa zasebnim rješenjima, pri čemu se za analizu konstrukcije koristi model zasnovan na metodi konačnih elemenata (eng. *Finite element method* - FEM), a za analizu tekućine model zasnovan na metodi hidrodinamike izglađenih čestica (eng. *Smoothed particle hydrodynamics* – SPH). Modelom je moguće opisati glavne nelinearne značajke konstrukcije: tečenje (popuštanje) u tlaku i vlaku i razvoj plastičnosti. Moguće je adekvatno simulirati i osnovne nelinearne karakteristike tekućine: stišljivost, viskoznost i turbulenciju. Numerički testovi provedeni pomoću razvijenog numeričkog modela prikazuju njegovu pouzdanost i mogućnost primjene. Provjera modela izvršena je na primjeru rezultata numeričkih i eksperimentalnih rezultata iz literature.

**Ključne riječi:** *3D numerički model, interakcija, FSI, FEM, SPH*

## **Modelling fluid and shell structure interaction by combined finite element method and particle method**

### **Abstract**

Numerical model for the fluid structure interaction under dynamic loading is presented in this paper. The partitioned approach applied involves the use of the finite element method (FEM) for the analysis of structure, while the smoothed particle hydrodynamics (SPH) is used for the analysis of fluid. The model can be used to describe main nonlinear characteristics of the structure: flow (yield) under compression and tension, and increase in plasticity. It is also possible to simulate basic nonlinear characteristics of the fluid (compressibility, viscous flow, and turbulence). Numerical tests performed using the developed numerical model show its reliability and application. The model is validated using the numerical and experimental results from literature.

**Keywords:** *3D numerical model, shell model, FSI, FEM, SPH*

## 1 Uvod

Konstrukcije u direktnom kontaktu s tekućinom vrlo su česte u standardnoj inženjerskoj praksi (brane, spremnici, cjevovodi i dr.). Njihovo rušenje može prouzročiti veliku materijalnu štetu i gubitke ljudskih života. Numerički modeli kojima se može realno simulirati ponašanje ovih konstrukcija svakako moraju uključivati i međudjelovanje konstrukcije i tekućine kako bi slika ponašanja ovog kompleksnog sustava bila realna.

Za numeričko rješavanje problema međudjelovanja konstrukcije i tekućine često se primjenjuje metoda konačnih elemenata s tzv. proizvoljnim Lagrange-Eulerovim pristupom (eng. *arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation* - ALE), kao i neke druge metode kojima je osnova metoda konačnih elemenata (eng. *Least Squares Finite Element Method* - LSFEM) [1] i *Particle Finite Element Method* - PFEM [2]). U posljednje se vrijeme za numeričko rješavanje međudjelovanja primjenjuju relativno nove čestične metode (eng. *Smoothed Particle Hydrodynamics* – SPH [3] i *Moving Particle Semi-implicit* – MPS [4]).

Rješavanje problema međudjelovanja izvedenu je prema pristupu sa zasebnim rješenjima (eng. *partitioned approach*), pri čemu se za analizu konstrukcije koristi model zasnovan na metodi konačnih elemenata, a za analizu tekućine model zasnovan na metodi hidrodinamike izglađenih čestica. U nastavku je kratko prikazan razvijeni numerički model [5] i primjeri sa zaključcima.

## 2 Numerički model

### 2.1 Model za konstrukciju

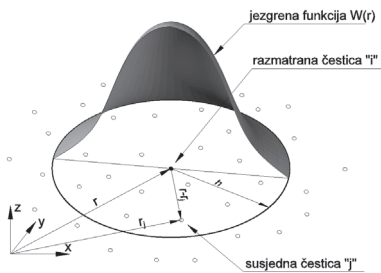
Za analizu konstrukcije koristi se model zasnovan na degeneriranim izoparametrijskim konačnim elementima ljuske. Model korišten u ovom radu je preuzet od Huang [6] i nadopunjen od Radnića i dr. [7]. Mogu se koristiti 8-čvorni ili 9-čvorni elementi s 5 ili 6 stupnjeva slobode u svakom čvoru. Šesti stupanj slobode (rotacijska krutost oko normale na srednju plohu ljuske) dodan je prema Kozuliću [8]. Korišteni model materijala ponajprije je namijenjen modeliranju ljuski od konstrukcijskog čelika, uz pretpostavku elastoplastičnog ponašanja [5]. Moguće je modelirati ljusku koja se sastoji od više slojeva različitog materijala i različitih debljina. Model uzima u obzir geometrijsku nelinearnost za probleme s velikim pomacima, koristeći tzv. ažurirani Lagrangeov postupak [9].

## 2.2 Model za tekućinu

Za opis gibanja tekućine primjenjuje se metoda hidrodinamike izgladenih čestica (SPH). SPH metodom tekućina se modelira kao skupina pokretnih čestica. Svaka čestica predstavlja dio prostora i sadrži podatke o fizičkim odrednicama tog dijela volumena (masa, gustoća, tlak i sl.). Matematički model metode SPH se temelji na integralnoj interpolaciji nekog svojstva tekućine:

$$A(\vec{r}) = \int_{\Omega} A(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}' \quad (1)$$

gdje je  $h$  utjecajna duljina (eng. *smoothing length*), a  $W$  je jezgrena (kernel) funkcija [10].



Slika 1. Aproximacija svojstava čestice tekućine unutar utjecajne domene

Dakle, svojstva pojedine čestice dobivaju se težinskim zbrajanjem svojstava okolnih čestica, odnosno onih čestica koje se nalaze unutar prostorne udaljenosti  $h$  (slika 1.). Svaka čestica tekućine u svakom vremenskom koraku mora zadovoljiti nekoliko fizikalnih zakona: jednadžbu očuvanja količine gibanja (2), kontinuiteta (3) i očuvanja energije (4):

$$\frac{dv_a}{dt} = -\sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab} + g \quad (2)$$

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab} \quad (3)$$

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) v_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} \quad (4)$$

gdje  $a$  označava razmatranu česticu, a  $b$  susjednu česticu unutar domene  $h$ . Tlakovi u tekućini se izračunavaju prema jednadžbi stanja:

$$P = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (5)$$

gdje je za vodu parametar  $\gamma = 7$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ , a  $B$  je parametar brzine zvuka.

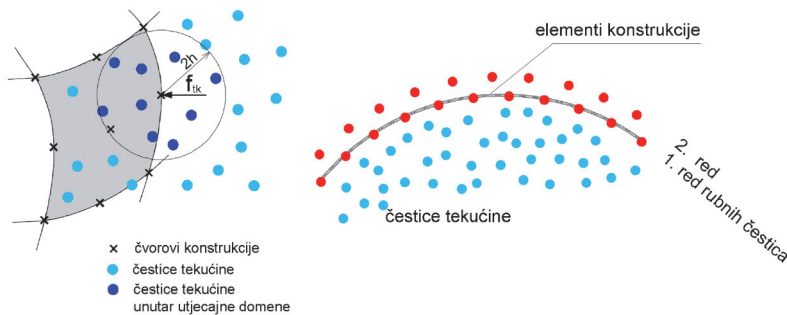
### 2.3 Model za međudjelovanje

Sile kojima tekućina djeluje na konstrukciju izračunavaju se za svaki čvor konstrukcije prema izrazu:

$$f_{tk} = -QP, \quad Q = \int_{\Gamma_i} N^T \vec{n} N d\Gamma_i \quad (6)$$

gdje je  $P$  tlak tekućine, a  $Q$  matrica međudjelovanja koja definira plohu međudjelovanja,  $N$  su bazne funkcije, a  $\vec{n}$  je vanjska normala na konstrukciju (ljsku) na plohi međudjelovanja. Sile  $f_{tk}$  predstavljaju dio efektivnog vektora opterećenja na konstrukciju, čiji se nepoznati čvorni pomaci proračunavaju metodom konačnih elemenata.

Nakon proračuna nepoznatih pomaka konstrukcije, virtualne rubne čestice na plohi međudjelovanja mijenjaju svoj položaj u skladu s izračunanim pomacima konstrukcije, čime se mijenjaju rubni uvjeti tekućine (slika 2.). Zatim slijedi analiza tekućine i proračun tlakova metodom hidrodinamike izgladenih čestica. Ovaj postupak se ponavlja za svaki vremenski korak analize, do isteka ukupnog vremena proračuna.



Slika 2. Ploha međudjelovanja konstrukcije i tekućine

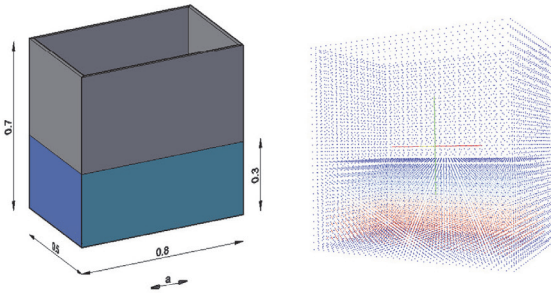
## 3 Numerički model

Pomoću prethodno prikazanog numeričkog modela za međudjelovanje konstrukcije i tekućine provedena je analiza zapljuskivanja vode u spremnicima s krutim i deformabilnim stranicama prema primjerima iz literature [4]. Spremnici su izloženi harmonijskom ubrzanju podloge prema:

$$a = a_0 \sin \omega t \quad (7)$$

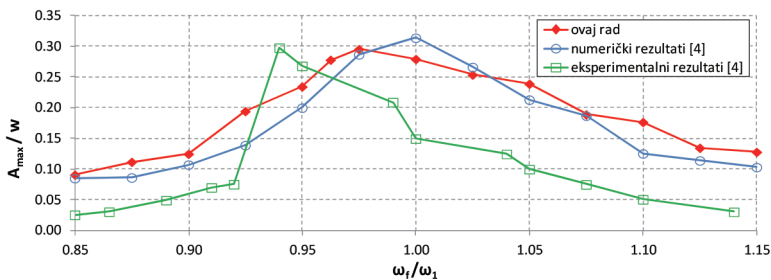
### 3.1 Zapljuskivanje u spremniku s krutim stranicama

Spremnik dimenzija 0,8 m x 0,5 m x 0,7 m napunjen je vodom do 0,3 m i izložen harmonijskom ubrzanju podloge s amplitudom  $a_0 = 0,05$  g prema izrazu (7) (slika 3.). Teorijska rezonantna frekvencija osciliranja vode u spremniku iznosi  $\omega_1 = 0,89$  Hz [11].



Slika 3. Geometrija spremnika s krutim stranicama i početni razmak čestica

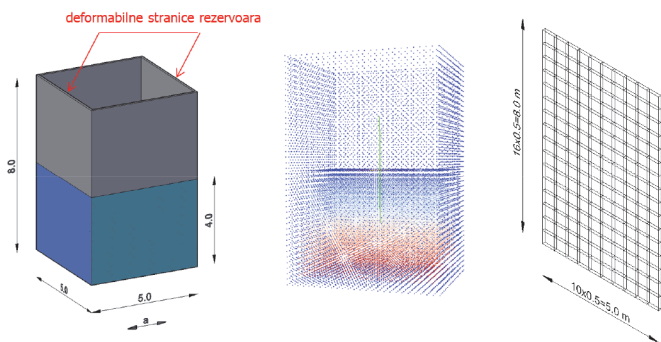
Najveće uzdizanje vode na desnoj stranici spremnika  $A_{max}$  u odnosu na početnu razinu vode i duljinu spremnika  $w$  (0,8 m) prikazano je na slici 4. Rezultati analiza su uspoređeni s rezultatima 2D numeričkog modela i eksperimentalnim rezultatima iz literature [4]. Maksimalno uzdizanje vode u spremniku  $A_{max}$  dobiveno je za pobudu s frekvencijom nešto manjom od teorijski rezonantne frekvencije (za  $\omega_f = 0,975\omega_1$ ).



Slika 4. Rezonantni odgovor spremnika s krutim stranicama

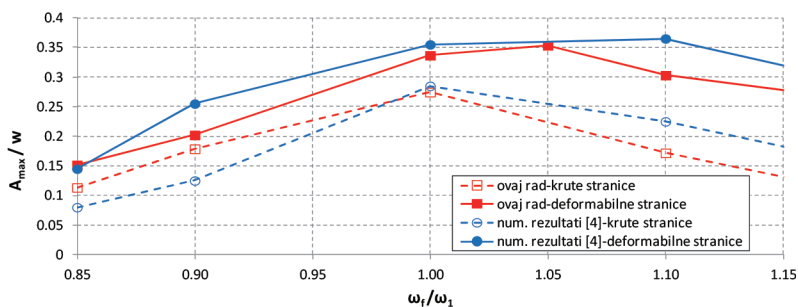
### 3.2 Zapljuskivanje u spremniku s deformabilnim stranicama

Spremnik dimenzija 5,0 m x 5,0 m x 8,0 m napunjen je vodom do 4,0 m i izložen harmonijskom ubrzanju podloge s amplitudom  $a_0 = 0,05$  g prema izrazu (7) (slika 5.). Voda je modelirana s oko 6000 čestica (početni razmak 0,2 m), a deformabilne stranice spremnika sa 320 konačnih elemenata. Deformabilne stranice su debljine  $t = 0,11034$  m, od materijala s modulom elastičnosti  $E = 5$  GPa, Poissonovim koeficijentom  $\nu = 0,3$  i gustoćom  $\rho = 7860$  kg/m<sup>3</sup>. Teorijska rezonantna frekvencija osciliranja vode u spremniku iznosi  $\omega_1 = 0,39$  Hz [11].



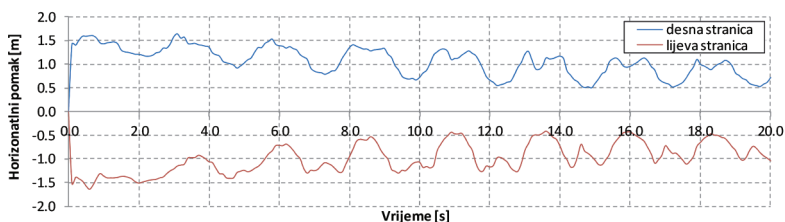
Slika 5. Geometrija spremnika s deformabilnim stranicama i diskretizacija

Najveće uzdizanje vode na desnoj stranici spremnika  $A_{max}$  u odnosu na početnu razinu vode i duljinu spremnika  $w$  (5,0 m) prikazano je na slici 6. Rezultati analiza su uspoređeni s rezultatima 2D numeričkog modela iz literature [4]. Može se uočiti vrlo dobro podudaranje rezultata u oba slučaja (krute/deformabilne stranice).

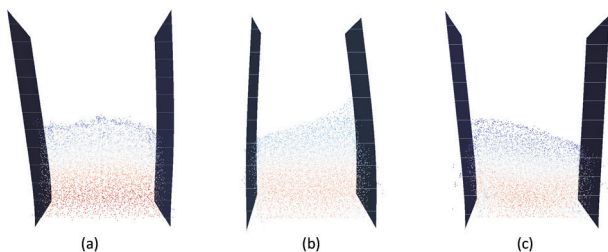


Slika 6. Rezonantni odgovor spremnika s deformabilnim stranicama

Na slici 7. prikazani su pomaci vrha deformabilne konstrukcije u vremenu, a na slici 8.b je prikazan spremnik u trenutku neposredno prije (slika 8.a) i neposredno poslije (slika 8.c) maksimalnog uzdizanja vode na desnoj stranici spremnika.



Slika 7. Pomaci vrha ljsuke u vremenu



Slika 8. Rezonantni odgovor spremnika s deformabilnim stranicama

## 4 Zaključak

U radu je prikazan numerički model za međudjelovanje ljuskastih konstrukcija i tekućine temeljen na metodama FEM i SPH. Iz priloženih primjera je vidljivo da se pomoću razvijenog numeričkog modela može realno simulirati ponašanje vode u spremniku s krutim i deformabilnim stranicama tijekom rezonantnih i nerezonantnih pobuda.

## Literatura

- [1] Kayser-Herold, O., Matthies, H.: A unified least-squares formulation for fluid-structure interaction problems, *Comput Struct*, 85 (2007), pp. 998-1011.
- [2] Zhu, M., Scott, M.H.: Modeling fluid-structure interaction by the particle finite element method in OpenSees. *Comput Struct*, 132 (2014), pp. 12–21.
- [1] Yang, Q., Jones, V., McCue, L.: Free-surface flow interactions with deformable structures using an SPH–FEM model, *Ocean Eng*, 55 (2012), pp. 136-147.
- [3] Lee, C.J.K., Noguchi, H., Koshizuka, S.: Fluid–shell structure interaction analysis by coupled particle and finite element method, *Comput Struct*, 85 (2007), pp. 688–697.
- [4] Sunara Kusić, M.: Numeričko modeliranje međudjelovanja konstrukcije i tekućine kombinacijom metode konačnih elemenata i hidrodinamike izgladenih čestica, Doktorski rad, FGAG Sveučilišta u Splitu, Split, 2017.
- [5] Huang, H.C.: *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, 1989.
- [6] Radnić, J., Harapin, A., Matešan, D.: Geometrical nonlinearity model in static analysis of shells, *Građevinar*, 55 (2003) 10, pp. 583-589.
- [7] Kozulić, V.: Numerička analiza konstrukcija sastavljenih od ljuski i stupova, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1993.
- [8] Nagtegaal, J.C., De Jong, J.E.: Some Computational Aspects of Elasto-plastic Large Strain Analysis, *Int J Numer Meth Eng*, 17 (1981), pp. 15-41.

- [9] Gingold, R.A., Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Mon Not R Astron Soc*, 181 (1977), pp. 375-389.
- [10] Ibrahim, R.A.: *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2000.