UDRUGA HRVATSKIH GRAĐEVINSKIH FAKULTETA
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU GRAĐEVINSKI FAKULTET
ZAJEDNIČKI TEMELJI '17.

DOI: https://doi.org/10.5592/CO/ZT.2017.20

Rješavanje SPRP multirezolucijskim postupkom uz primjenu trostruke baze ABF

Nives Brajčić Kurbaša, Blaž Gotovac

Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije
kontakt: nives.brajcic@gradst.hr

Sažetak

Atomske bazne funkcije (ABF) posjeduju svojstvo univerzalnosti vektorskog prostora kao klasične bazne funkcije i svojstvo finitnosti (konačna duljina nosača) kao splineovi te na taj način popunjavaju skup elementarnih funkcija. U ovom radu ukratko su opisana svojstva eksponencijalnih ABF $EFup_n(\xi, \omega)$, koji za razliku od algebarskih ABF $EFup_n(\xi)$, sadrže parametar ili frekvenciju ω koja im omogućava dodatna aproksimacijska svojstva. Problem izbora vrijednosti parametra ω u numeričkoj analizi riješen je primjenom tzv. trostruke baze. Primjena atomskih baznih funkcija $EFup_n(\xi, \omega)$ ilustrirana je na primjeru rješavanja singularno perturbiranog rubnog problema (SPRP) i to korištenjem trostruke baze u metodi kolokacije uz primjenu multirezolucijskog postupka.

Ključne riječi: *ABF eksponencijalnog tipa, frekvencija, trostruka baza, SPRP*

Solving the SPRP by using a triple base ABF

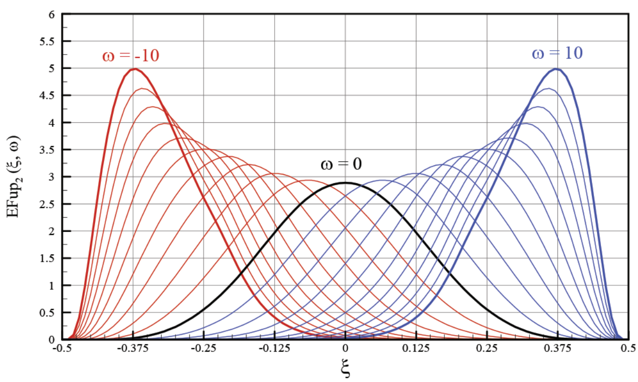
Abstract

Atomic basis functions (ABF) possess the property of universality of the vector space as a classical basis functions and finiteness as splines, and thus filling a set of elementary functions. In this paper basic properties of exponential ABF $EFup_n(\xi, \omega)$ are described briefly, which, unlike the algebraic ABF $EFup_n(\xi)$, contain a parameter or frequency ω which gives them additional approximation properties. The problem of selecting parameter value ω in numerical analysis has been solved using the so-called triple base. The application of the basis function $EFup_n(\xi, \omega)$ is illustrated in the example of solving the singularly perturbated boundary problem (SPBP) by using a triple base in the collocation method using the multi-resolution procedure.

Keywords: *ABF of exponential type, frequency, triple base, SPBP*

1 Uvod

Atomske bazne funkcije (ABF) eksponencijalnog tipa $EFup_n(\xi, \omega)$ finitne su funkcije iz klase C^∞ s kompaktnim nosačem, a elementi su linearnog vektorskog prostora Eup_n [1, 2, 9], te zadržavaju sva svojstva materinske bazne funkcije $Eup_n(\xi, \omega)$. Indeks n označava najveći stupanj eksponencijalnog polinoma koji se može prikazati točno u obliku linearne kombinacije međusobno pomaknutih funkcija $EFup_n(\xi, \omega)$ na odsječku duljine, $\Delta\xi_n = 2^{-n}$ [1, 2].
ABF eksponencijalnog tipa u odnosu na bazne funkcije algebarskog tipa sadrže i parametar ω, ili analogno trigonometrijskim funkcijama, frekvenciju ω. S obzirom na apsolutnu vrijednost parametra ili frekvencije ω bazne funkcije mijenjaju svoj oblik, odnosno imaju otklon u lijevu ili desnu stranu ovisno o njegovom predznaku (slika 1.). Upravo ovo svojstvo čini ih "podatljivima" i daje im prednost u odnosu na algebarske ABF, i to naročito u opisivanju rješenja s velikim gradijentima gdje su općenito algebarske bazne funkcije podložne tzv. Gibsovom efektu.
Za vrijednost parametra $\omega = 0$ eksponencijalne ABF "prelaze" u algebarske ABF, tj. $EFup_n(x,0) = Fup_n(x)$.



Slika 1. Funkcija za različite vrijednosti parametra

Međutim, u praktičnoj primjeni eksponencijalnih ABF nema, općenito gledano, jedinstvenog kriterija za izbor parametra u problemima aproksimacije zadane funkcije i rješavanju diferencijalnih jednadžbi ako on nije zadan unutar same jednadžbe. S obzirom na to da eksponencijalne ABF točno opisuju eksponencijalne polinome za koje vrijedi

$$y' = \omega \cdot y \rightarrow \omega = y'/y \tag{1}$$

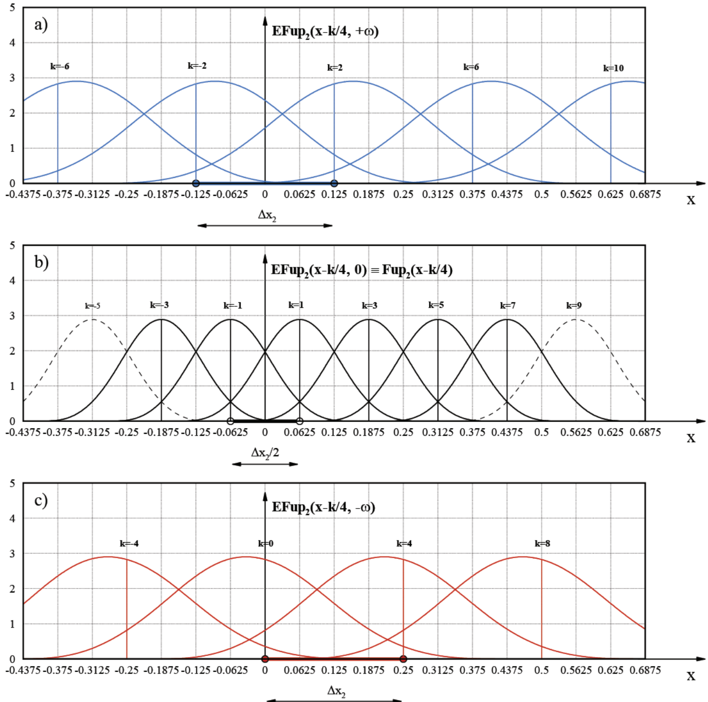
gdje je eksponencijalni polinom, jedan od kriterija izbora parametra u određenim primjerima aproksimacije funkcije je upravo (1), dok u drugim primjerima može pomoći u određivanju intervala vrijednosti parametra. Kada su problemi opisani diferencijalnom jednadžbom, parametar ω određuje se iz fizikalnih karakteristika problema.

2 Raspored baznih funkcija u trostrukoj bazi ABF

Budući da ne postoji jedinstveni kriterij za izbor parametra ω, formira se baza u vektorskom potprostoru koji sadrži eksponencijalne ABF s pozitivnom i negativnom vrijednosti parametra ω tj. bazne funkcije $EFup_n(x,+\omega)$ i $EFup_n(x,-\omega)$. Time se postiže općenitost u smislu izbora predznaka frekvencije na razini dimenzije odabranog potprostora. Također, osim eksponencijalnih ABF formirana baza sadrži i algebarske ABF $Fup_n(x)$ kako bi se ispunio kriterij "razvoja jedinice". Naime, vektorski prostor EUP_n koji tvore ABF $EFup_n(x,\omega)$ ima stanovite sličnosti s vektorskim prostorom trigonometrijskih funkcija. Particija jedinice u oba prostora moguć je samo u slučaju $\omega = 0$.
Tako formirana baza, [1], koja uz eksponencijalne ABF $EFup_n(x,+\omega)$ i $EFup_n(x,-\omega)$ sadrži i algebarske ABF $Fup_n(x)$, naziva se trostruka baza. Primjerice za $n = 2$, približno rješenje problema tražit će se u sljedećem obliku (slika 2.):

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) = &\sum_{i=-6}^{n+6,4} A_i \cdot EFup_2\left(\frac{x}{x_2}-\frac{i}{4},+\omega\right)+\sum_{i=-5}^{n+5,2} B_j \cdot EFup_2\left(\frac{x}{2\cdot x_2}-\frac{j}{4},0\right)\\ &+\sum_{i=-4}^{n+4,4} C_k \cdot EFup_2\left(\frac{x}{x_2}-\frac{k}{4},-\omega\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Izraz (2) predstavlja linearnu kombinaciju međusobno pomaknutih baznih funkcija $EFup_2(x,\omega^*)$, $\omega^* = +\omega,0,-\omega$ gdje su istovrsne bazne funkcije međusobno pomaknute za duljinu karakterističnog odsječka Δx_2, pri tome je duljina karakterističnog odsječka algebarskih, ili točnije eksponencijalnih ABF za vrijednost parametra $\omega = 0$, upola manja od baznih funkcija $EFup_2(x\pm\omega)$, zbog čega je broj baznih funkcija u bazi dvostruko veći (slika 2.). Prostoru koji sadrži pozitivne i negativne frekvencije potrebno je dodati još toliko baznih funkcija kako bi dimenzija 2^n porasla na 2^{n+1}. Međusobni razmak tjemena baznih funkcija je prema tome $\Delta x_v = \Delta x_2/4$.



Slika 2. Raspored baznih funkcija EFup$_2$(x,ω^*) u trostrukoj bazi: a) Bazne funkcije s pozitivnom frekvencijom $\omega < 0$, b) Bazne funkcije s neutralnom frekvencijom $\omega = 0$, c) Bazne funkcije s negativnom frekvencijom $\omega > 0$

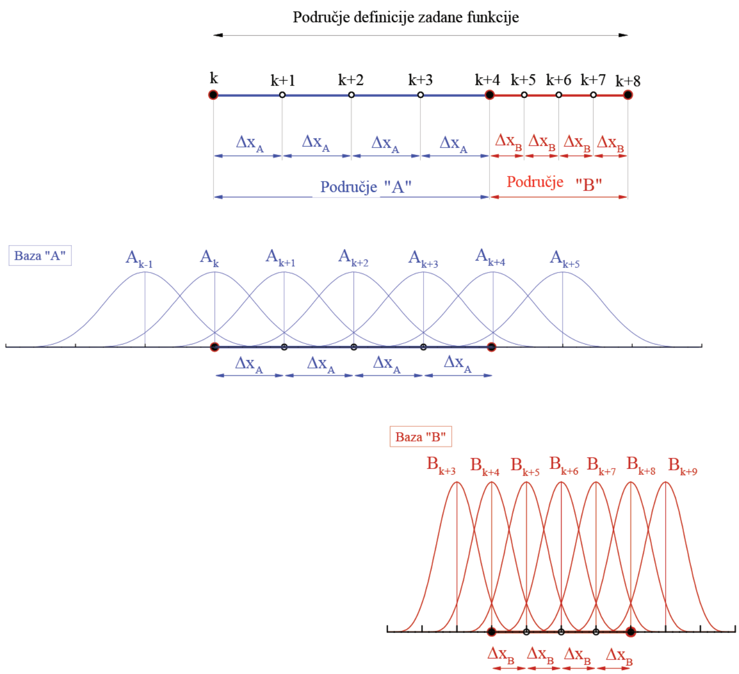
Jednadžbe za određivanje nepoznatih koeficijenata u linearnoj kombinaciji (2) su sljedeće:

- Za bazne funkcije s tjemenima u području i na rubu područja u kolokacijskim točkama zadovoljavaju se vrijednosti zadane funkcije (ili diferencijalna jednadžba).
- Za bazne funkcije čija su tjemena izvan područja dodatne uvjetne jednadžbe na oba ruba su zadovoljavanje vrijednosti prve derivacije zadane funkcije (rubnog uvjeta) na pojedinom rubu, a preostale jednadžbe su rekurzivne formule iz [1].

2.1 Multirezolucijski postupak

U pojedinim problemima, bilo da se radi o aproksimaciji funkcije ili rješavanju diferencijalne jednadžbe, grafovi rješenja na većem dijelu područja mogu biti jednostavne funkcije (npr. konstanta ili polinom nekog nižeg stupnja) koje bi se mogle točno opisati i s malim brojem baznih funkcija, dok tek na malom dijelu područja mogu biti složene funkcije s izraženim gradijentima gdje je potreban veliki broj baznih funkcija kako bi se rješenje aproksimiralo sa zahtjevanom točnosti.

U takvim slučajevima, umjesto povećavanja broja baznih funkcija na cijelom području, što je s aspekta trajanja proračuna skup postupak, pogodne su tzv. multirezolucijske metode.



Slika 3. Raspored baznih funkcija EFup²(x,0) u multirezolucijskoj metodi

Kod multirezolucijske metode područje se, ovisno o obliku rješenja, dijeli na određeni broj intervala. Na pojedinom intervalu bira se odgovarajuća podjela područja kao i prikladna vrijednost parametra ω, a u točki "spoja" između dvaju intervala postavlja se uvjet neprekinutosti derivacija.

Na slici 3. prikazan je raspored baznih funkcija u multirezolucijskom postupku za bazne funkcije $Fup_n(x)$ iz izraza (2). Područje definicije zadane funkcije podijeljeno je na dva intervala, A i B.

3 Singularno perturbirani rubni problem (SPRP)

Primjena eksponencijalnih splineova, kao "srodnih" eksponencijalnih funkcija u numeričkoj analizi, često se u literaturi pokazuje na primjeru tzv. singularno perturbiranog rubnog problema (SPRP) (npr. [3-5]), koji se često javlja u mnogim područjima dinamike fluida (prijelaz iz Navier-Stokseove u Eulerovu jednadžbu u modelima toka

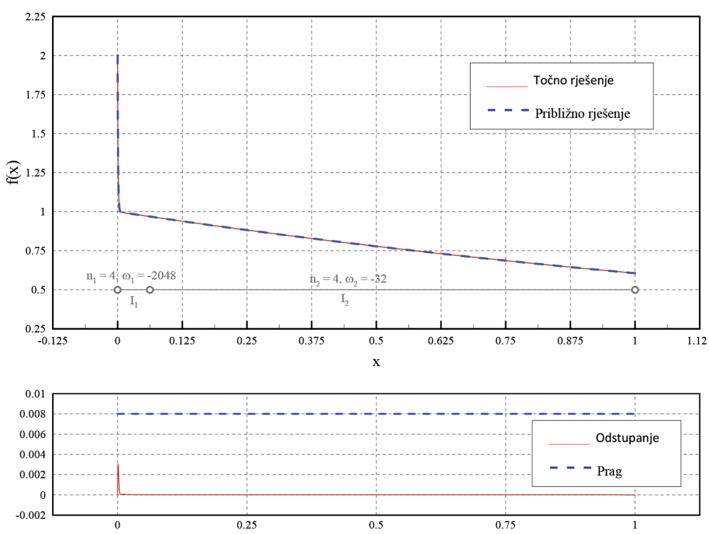
fluida). SPRP je problem konvekcije-difuzije ili reakcije-difuzije s difuznim koeficijentom vrlo blizu nule što daje visoke gradijente blizu granice područja.
Pretpostavlja se da je zadan jednodimenzionalni SPRP:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \cdot u''(x) + (1+x)^3 \cdot u'(x) = f(x) \\ &u(0) = 2 \\ &u(1) = 0{,}125 \cdot e^{-3{,}75/\varepsilon} + e^{-0{,}5} \end{aligned} \tag{3}$$

s poznatim analitičkim rješenjem

$$u(x) = \frac{1}{(1+x)^3} e^{(1-(1+x)^4)/(4\cdot\varepsilon)} + e^{-x/2} \tag{4}$$

Na slici 4. prikazana je usporedba analitičkog rješenja (4) i aproksimacije dobivene metodom kolokacije u točki pomoću trostruke baze (2) multirezolucijskom metodom. Područje je podijeljeno na dva intervala I_1 = [0,0.0625] i I_2 = [0.0625,1]. Prvi interval I_1 podijeljen je na 4 karakteristična odsječka i odabrana je maksimalna vrijednost parametra, a da se ne prekorači točnost računala ω = -2048. Drugi interval I_2 je također podijeljen na 4 karakteristična odsječka, a odabrana je minimalna vrijednost parametra ω = -32 s obzirom na duljinu karakterističnog odsječka.
U literaturi [5] je pokazano rješenje problema (3) za vrijednost parametra ε = 10^{-3} dobiveno korištenjem eksponencijalnih splineova $E_4(\xi,\omega)$ kombiniranjem dva pristupa za rješavanje SPRP (“fitted“ operatori konačnih razlika i po dijelovima ujednačene “fitted“ mreže) te se usporedbom rješenja jasno može uočiti prednost prikazanog postupka.



Slika 4. Singularno perturbirani rubni problem

4 Zaključak

Pokazana je prednost eksponencijalnih ABF u odnosu na one algebarskog tipa, posebno u rješavanju problema s velikim gradijentima jer jedino one neće davati izražene oscilacije numeričkog rješenja. Naime, eksponencijalne ABF posjeduju dodatno svojstvo "podatljivosti" koje im omogućava parametar ili frekvencija ω. Primjena eksponencijalnih ABF $EFup_n(\xi,\omega)$ pokazana je na primjeru rješavanja singularno perturbiranog rubnog problema korištenjem trostruke baze u metodi kolokacije s multirezolucijskim pristupom.

Literatura

[1] Brajčić Kurbaša, N.: Eksponencijalne atomske bazne funkcije: Razvoj i primjena, Doktorska disertacija, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Split, 2016.

[2] Gotovac, B.: Numeričko modeliranje inženjerskih problema pomoću glatkih finitnih funkcija. Doktorska disertacija, Fakultet građevinarstva, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1986

[3] Kadalbajoo, M.K., Aggarwal, V.K.: Fitted mesh B-spline collocation method for solving self-adjoint singularly perturbed boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 161 (2005), pp. 973–987.

[4] Marušić M., Rogina M.: A Collocation Method for Singularly Perturbed Two-point Boundary Value Problems with Splines in Tension. Advances in Computational Mathematics, 6 (1996), pp. 65-76.

[5] Radunović, D.: Multiresolution exponential B-splines and singularly perturbed boundary problem. Numer. Algor., 47 (2008), pp. 191–210.

[6] Rvachev, V.L., Rvachev, V.A.: Nonclassical methods of approximation theory in boundary value problems. Kiev: Naukova Dumka, 1979